“十一五”国家重点图书出版规划项目

The Series of Advanced Physics of Peking University

北京大学物理学丛书

群论和量子力学中的对称性

朱洪元 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

The Series of Advanced Physics of Peking University

北 京 大 学 物 理 学 丛 书

群论和量子力学中的对称性

朱洪元 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

群论和量子力学中的对称性/朱洪元著. —北京：北京大学出版社，2009.2
(北京大学物理学丛书)
ISBN 978-7-301-14547-0

Ⅰ. 群…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. ①群论②量子力学-对称　Ⅳ. O152　O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 005958 号

书　　　名：**群论和量子力学中的对称性**
著作责任者：朱洪元　著
责 任 编 辑：顾卫宇
封 面 设 计：锦绣东方
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-14547-0/O・0770
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　10 印张　150 千字
2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 次印刷
定　　　价：22.00 元

前　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展，使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活

跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

序

本书作者朱洪元先生是著名的理论物理学家、教育家，1939 年毕业于上海同济大学，1948 年获英国曼彻斯特大学哲学博士学位，曾先后任中国科学院近代物理研究所研究员、原子能研究所理论研究室主任，苏联杜布纳联合核子研究所高级研究员，中国科学院高能物理研究所研究员、理论物理研究室主任、副所长、学术委员会主任等职，兼任中国科学技术大学教授、理论物理专业主任、近代物理系主任。1980 年当选中国科学院院士（当时称中国科学院学部委员）。曾被选为中国物理学会常务理事、中国高能物理学会副理事长，曾任《高能物理与核物理》主编。

朱洪元学识渊博、造诣深厚、治学严谨。他在理论物理学的各个领域，特别是在场论和粒子物理理论等方面具有很深的造诣和贡献。他首创研究和给出了同步辐射的基本性质，是同步辐射应用的基本参考文献；研究相对论性强子的结构模型理论，采用系统的方法，在对称性分析的基础上，对强子的静态性质和相互作用、运动转化过程进行探讨，发表学术论文。1957 年朱洪元在北京大学讲授“量子场论”课程，次年在青岛的量子场论讲习班上讲授量子场论，这两次的讲稿整理后撰写为《量子场论》在 1960 年出版，成为中国几代粒子物理学者的主要教科书和研究工作参考书。朱洪元从事科学研究和教学工作四十余年，培养了大批物理学工作者，为发展中国科学与教育事业做出了卓越贡献，他的学生遍及国内外。

《群论和量子力学中的对称性》是上一世纪 60 年代，朱洪元在中国科学技术大学近代物理系讲授群论课程时的教案，是朱洪元的精心之作。本书不是纯数学的群论教材，而是一本物理学探索研究所用的群论教材，取材和写法与一般的群论书不同，有四个特点：

第一，有高度的科学性、系统性和完整性，对群和群表示论的基本内容进行系统的、科学的、严谨的、完整的阐述。

第二，着重深入讲解物理中重要的旋转群和洛伦兹群及它们的表示，并使理论的数学表述紧密联系物理内容。

第三，介绍了在群论基础上物理学中的对称性分析。

第四，书中讲解严谨，由浅入深，适合深入教学的需要。

本书是一本大学物理系本科生、研究生和教师很好的教材和参考书，也是一本具有很高学术水平的专著。

北京大学物理学院

高崇寿

2007 年 10 月 5 日

整理和出版说明

1962 年朱洪元先生特为中国科学技术大学近代物理系大学本科四年级理论专业开设专业基础课“群论”，历时一学期。当时阮图南教授尚是一名助理研究员，被朱洪元先生邀请来担任辅导教师，而我是本科班上的一名学生。朱洪元先生学风严谨，为课程精心准备了讲义，并要求阮图南负责刻蜡版油印，必须做到课程的讲义按章节提前发到每位学员手上，这样课程结束后每位学生手上都有了一份这门课的完整讲义。尽管朱洪元先生这样重视，认真负责地教学，但由于种种原因，这门群论课他仅仅教了一次，此后再没有教过。

在朱洪元先生病逝后，在他离开了我们的日子里，每逢阮图南教授和我两个人有机会遇到一起时，总是情不自禁地回忆起当年朱洪元先生的那段授课，欣赏先生课程的精彩、简练和对初学者的启蒙。我们深感先生课程的取材及内容的安排，有其独到之处，深感当前图书市场上难于找到与先生讲义有类似优点的图书。例如：朱先生为正式讲群表示理论做准备，紧接在引言之后极其扼要地增加了“线性变换”一章；选择了旋转群作为重点，介绍群表示的乘积、分解，用了一章的篇幅介绍旋转群表示的应用，使学生对在量子力学中已经熟悉的角动量理论有更加深入理解，也为如何将群论应用到理论物理相关问题做出了范例；在书的最后一章非常简洁地介绍了洛伦兹群及其表示。值得指出的是，书中基于二分量旋量建立洛伦兹群的各种表示的部分，可以作为学习现代场论，建立超对称理论阶段的必要的知识准备。例如，把标量场和一个 Weyl 或Mjorana二分量的费米子场紧密联系在一起构造超对称理论的“手征超场”，把标量场、二分量的 Weyl 或 Mjorana 费米子场和矢量场紧密联系在一起构造“矢量超场”等都要用到这些知识；而利用“超场”来表述理论的超对称性具有极大的优越性。

十分庆幸，几年前在整理旧物过程中，发现了一份完整的当年这门群论课的油印讲义。因此，在征得朱洪元夫人陈凯瑞女士的同意后，阮图南教授与我一起决定根据这份油印讲义将朱洪元先生的课程内容按原貌整理出

来，定名为《群论和量子力学中的对称性》，作为教学参考书正式出版。一方面，我们以此纪念朱洪元先生；另一方面，也是为理论物理入门者在修习群论基础课，理解群理论对理论物理的意义时，提供一本对他们十分有裨益的书。

由于朱洪元先生已经于十多年前离开我们，他本人不能对这本即将出版的著作再做任何补充、修改，也不能对书稿的整理做任何工作和指导，因此阮图南教授和我经过认真思考，决定在整理成书的过程中，第一原则是忠实地反映先生的群论讲义的原来面貌，尽量保持先生课程的"原汁原味"。在整理时，除了纠正讲义中的笔误、把其中的符号做得更加前后统一，并且在可能的情况下使所用的符号和名词与近年来人们的习惯更加一致之外，我们不做任何补充和修改。

在我们整理讲义成书的过程中，陈凯瑞女士亦从朱洪元先生的遗物中找到了当年讲义的手稿，并提供给我们使用。手稿比当年油印的讲义清楚多了，对我们的整理工作有很大帮助。

万分不幸的是，在整理工作完成，正在筹备出版本书时，阮图南教授由于癌症突发，不治而离我们而去。因此，本书的最后校正工作由阮图南教授的学生张鹏飞老师和我二人共同完成。

张肇西

2007 年 10 月 5 日

目　　录

第一章　引　言

§1.1　物理规律的对称性质和守恒定律

物理现象的许多规律常常具有一些对称性质.即使我们对于规律的其它方面的具体内容还不知道,从这些对称性质出发,已经可以推导出一些重要的结论.从一种对称性质,就可以推导出一种守恒定律.例如,从物理规律对于坐标移动具有不变性,可以推导出动量守恒定律和能量守恒定律;从物理规律对于坐标的转动具有不变性,可以推导出角动量守恒定律.

试以经典力学为例.有 n 个质点彼此相互作用,它们的运动规律可以从一个拉氏函数

$$L(\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)},\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)},\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}^{(n)}) \tag{1.1}$$

推导出来.其中 $\boldsymbol{x}^{(l)}$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}^{(l)}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(l)}}{\mathrm{d}t}$ 代表第 l 个粒子的坐标和速度,为了写起来方便,在此我们已经把坐标和速度的三个分量合并起来以一个符号 $\boldsymbol{x}$ 或 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 来代表.物理规律使粒子运动的轨道满足

$$\delta\left[\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\,L\right]=0, \tag{1.2}$$

记号 δ 代表对粒子运动轨道的任何微小的变动,但在运动端点 t_a 和 t_b,粒子的坐标不作变动.

从(1.2)式可得:

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\delta L&=\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\sum_{l,i}\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}}\delta x_i^{(l)}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i^{(l)}}\delta\dot{x}_i^{(l)}\right\}\\&=\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\sum_{l,i}\delta x_i^{(l)}\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i^{(l)}}\right)\right\}\quad(l=1,2,\cdots,n;i=1,2,3),\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 i 用来代表坐标或速度的三个不同的分量.

由于 $\partial x_i^{(l)}$ 是任意的,从(1.3)式得到如下的拉氏运动方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\delta\dot{x}_i^{(l)}}\right)=0. \tag{1.4}$$

力学运动规律的对称性质反映在拉氏函数的对称性质中. 例如,由于空间的均匀性,物理规律的形式对于坐标平行移动具有不变性,这种性质由拉氏函数 L 对于坐标的移动具有不变性体现. 亦即

$$L(\boldsymbol{x}^{(1)'},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)'},\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)'},\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}^{(n)'}) = L(\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)},\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)},\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}^{(n)}), \tag{1.5}$$

这里

$$x_i^{(l)'} = x_i^{(l)} + \delta x_i.$$

从(1.5)式可得

$$\sum\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}}\delta x_i^{(l)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}}\delta\dot{x}_i^{(l)}\right\} = 0. \tag{1.6}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x_i^{(l)'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_i^{(l)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\delta x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_i^{(l)}}{\mathrm{d}t},\quad \delta x_i^{(l)} = \delta x_i,\quad \delta\dot{x}_i^{(l)} = \frac{\mathrm{d}x_i^{(l)'}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_i^{(l)}}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.7}$$

并利用运动方程(1.4),可得

$$\sum_i \delta x_i \sum_l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}} = 0. \tag{1.8}$$

由于 δx_i 是任意的和彼此独立的,故若 $p_i^{(l)} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}}$,有

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (i = 1,2,3),\quad p_i = \sum_l p_i^{(l)}, \tag{1.9}$$

(1.9)式就是动量守恒定律.

又例如,由于时间的均匀性,物理规律的形式对于时间坐标的移动具有不变性. 这种性质表现为拉氏函数不是时间 t 的显函数. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{l,i}\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}}\dot{x}_i^{(l)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}}\ddot{x}_i^{(l)}\right\}, \tag{1.10}$$

其中 $\ddot{x}_i^{(l)} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}_i^{(l)}}{\mathrm{d}t}$. 若 $H = \sum_{l,i} p_i^{(l)}\dot{x}_i^{(l)} - L$,利用运动方程(1.4)可得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.11}$$

(1.11)式就是能量守恒定律.

再例如,由于空间的各向同性,物理规律的形式对于坐标的转动具有不变性,这种性质由拉氏函数 L 对于坐标转动具有不变性体现. 亦即

$$L(\boldsymbol{x}^{(1)'},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)'},\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)'},\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}^{(n)'}) = L(\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)},\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)},\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}^{(n)}), \tag{1.12}$$

这里

$$x_i^{(l)'} = \sum_k a_{ik}x_k^{(l)},\qquad \dot{x}_i^{(l)'} = \sum_k a_{ik}\dot{x}_k^{(l)},$$

其中 a_{ik} 满足下列正交条件和幺模条件:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i a_{ik}a_{ij} = \delta_{kj}, \\ &\sum_k a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \\ &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

我们将坐标作无穷小的转动.令

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}, \tag{1.14}$$

其中 ε_{ik} 为一阶无穷小量.那么从(1.13)式可得

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_n (\delta_{ik} + \varepsilon_{ik})(\delta_{jk} + \varepsilon_{jk}) \\ &= \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

其中我们略去了二阶无穷小项.从(1.15)式得

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}. \tag{1.16}$$

从(1.12)式可得,在无穷小转动中

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i^{(l)} &= x_i^{(l)'} - x_i^{(l)} = \sum_j \varepsilon_{ij} x_j^{(l)}, \\ \delta \dot{x}_i^{(l)} &= \dot{x}_i^{(l)'} - \dot{x}_i^{(l)} = \sum_j \varepsilon_{ij} \dot{x}_j^{(l)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

从(1.12)和(1.17)式可得

$$\sum_{l,i} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i^{(l)}} \delta x_i^{(l)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}} \delta \dot{x}_i^{(l)} \right\} = 0. \tag{1.18}$$

利用运动方程(1.4)和(1.17),得

$$\sum_{l,i,j} \varepsilon_{ij} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}} x_j^{(l)} \right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(l)}} \cdot \dot{x}_j^l \right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \sum_{l,i,j} \varepsilon_{ij} x_j^{(l)} p_i^{(l)} \right\}. \tag{1.19}$$

利用(1.16)式并考虑到 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ 的任意性和相互独立性,可得

$$\frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad 当\ \boldsymbol{M} = \sum_l [\boldsymbol{x}^{(l)} \times \boldsymbol{p}^{(l)}]. \tag{1.20}$$

(1.20)式就是角动量守恒定律.

从上面这些例子可以看到,我们有可能不知道物理规律的许多具体内容,或即使知道了具体的运动方程,也由于问题的复杂性,一时难于得到运动方程的解;然而我们可以从物理规律的对称性质直接推导出一系列十分

重要的守恒定律.

知道了物理规律的对称性质,我们还可以从运动方程的一个解推导出许多其它的解.例如,若

$$x_i^{(l)}(t) \quad (l=1,2,\cdots,n;i=1,2,3) \tag{1.21}$$

是运动方程的一个解,假使运动方程对于坐标转动具有不变性,那么所有各套

$$\left.\begin{aligned} &x_i^{(l)}(t) \quad (l=1,2,\cdots,n;i=1,2,3),\\ &x_i^{(l)\prime}(t)=\sum_j a_{ij}x_j^{(l)}(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

都是运动方程的解.其中 a_{ij} 为任何一套满足正交关系和幺模条件(1.13)式的系数.如果运动方程对于坐标反射具有不变性,那么

$$x_i^{(1)\prime}(t)=-x_i^{(l)}(t) \quad (l=1,2,\cdots,n;i=1,2,3) \tag{1.23}$$

也是运动方程的解.

§1.2 物理规律的对称性质和量子力学

物理规律的对称性质不仅对研究经典力学问题有很大的意义,对于研究量子力学中的问题也有重要的意义.在比较复杂的微观物理问题中求相应的波动方程的解是十分困难的.利用物理规律的对称性质,可以对于许多问题得到定性的解释;在一些特殊的情况下,甚至可以得到一些定量的结果.

在量子力学中.对称性和守恒定律之间同样地存在着如§1.1中所指出的密切关系.如所周知,标志不同定态的量子数其实就是守恒量的本征值,或和守恒量的本征值相联系.以氢原子的定态为例.它们由一套量子数

$$n,j,l,m \tag{1.24}$$

标志.其中,n 和能量 E_n 相联系,

$$E_n=-\frac{\alpha^2\mu c^2}{2n^2}, \tag{1.25}$$

这里 $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}\approx\frac{1}{137}$ 是精细结构常数,μ 是电子的质量;j 和总角动量 J 相联系:

$$J^2=j(j+1)\hbar^2; \tag{1.26}$$

l 和轨道角动量 L 相联系: