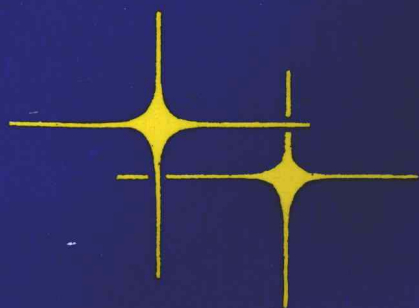


普通高等教育测绘类规划教材

海洋重力测量与磁力测量

梁开龙 刘雁春 编著
管 特 黄汉涛

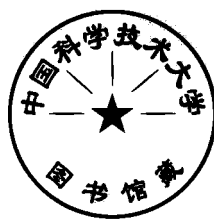


测绘出版社

普通高等教育测绘类规划教材

海洋重力测量与磁力测量

梁开龙 刘雁春 编著
管 铮 黄谟涛



测绘出版社

·北京·

内 容 提 要

本书在全面概述地球重力场与磁力场的基本理论的基础上,集中叙述了在海洋环境条件下进行重力测量与磁力测量的方法、仪器设备、数据处理及其应用,反映了当前国内外该学科发展的新技术、新水平。

本书为大专院校海洋测量专业本科教材,也可作为相关测绘专业的选修课或研究生教材,对海上石油开采、海底矿藏探查、地球物理勘探及海洋开发研究等科技人员也是必要的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

海洋重力测量与磁力测量/梁开龙等编著. —北京:测绘出版社,1996. 6
ISBN 7-5030-0849-0

I. 海… II. 梁… III. ①海洋测量:重力测量②海洋测量:磁力测量 IV.
P223

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第07379号

测绘出版社出版发行

(100045 北京市复外三里河路50号)

河北地质六队印刷厂印刷·新华书店总店北京发行所经销

1996年6月第一版·1996年6月第一次印刷

开本:787×1092 1/16·印张:12

字数:271千字·印数:0001-1300册

定价:15.00元

前 言

海洋占地球面积的 71%。要准确研究地球形状与地球内部构造，勘探海洋丰富的矿产资源，保障航天和远程武器发射等，就必须了解海洋重力场和磁力场的精细结构。高精度的海洋重力测量和海洋磁力测量正是解决这些问题的重要手段之一，也是高新技术——航天航空重力磁力测量的不可缺少的补充。

海洋重力磁力测量与陆上测量不同，它是在海洋环境下进行的连续动态测量。因此，在克服外界干扰，提高测量精度方面，有着自己特殊的考虑；在仪器设备和测量实施等方面也与陆上测量有着很大的差别。

海洋重力与磁力测量是海洋测量专业的主要课程之一。本教程按 80 学时安排，供海测专业本科教学之用，也可作为其它高等院校测量专业的教材和教学参考书；对于从事地球物理勘探和进行海洋开发研究的科技人员，也有一定的参考价值。

本书由大连舰艇学院海洋测绘系与天津海洋测绘研究所联合编写。梁开龙教授、刘雁春副教授和管铮高级工程师、黄谟涛高级工程师分别承担了该书部分内容的编写任务，全书由梁开龙教授汇总定稿。承蒙管泽霖教授、孟德润教授对本书审稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心地感谢。

本书为国内首次出版的海洋重力与磁力测量专业教材，限于作者水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

作 者

1995 年 1 月

目 录

上篇 海洋重力测量

第一章 绪论	1
第二章 海洋重力测量的理论基础	5
§ 2-1 重力及重力位	5
§ 2-2 地球正常重力场	8
§ 2-3 扰动位	13
§ 2-4 斯托克斯公式和费宁-梅内斯公式	17
§ 2-5 莫洛坚斯基方法	19
§ 2-6 重力值归算	22
第三章 海洋重力测量仪器	32
§ 3-1 概述	32
§ 3-2 垂直加速度对海洋重力测量的影响及消除方法	33
§ 3-3 横摇与纵摇对海洋重力测量的影响及消除方法	38
§ 3-4 交叉耦合效应对海洋重力测量的影响及消除方法	45
§ 3-5 KSS-5 型海洋重力仪	49
§ 3-6 L&R 型海洋重力仪	52
§ 3-7 KSS-30 型海洋重力仪	55
§ 3-8 BGM-3 型海洋重力仪	57
§ 3-9 CHZ 型海洋重力仪	59
§ 3-10 振弦型海洋重力仪	62
§ 3-11 海洋重力仪的检定	64
第四章 海洋重力测量的设计与实施	70
§ 4-1 海洋重力测量技术设计	70
§ 4-2 海洋重力测量测线布设	73
§ 4-3 海洋重力测量的实施	76
第五章 海洋重力测量的数据处理	80
§ 5-1 海洋重力测量数据的预处理	80
§ 5-2 测线拟合及航向、航速计算	81
§ 5-3 厄特弗斯改正	85
§ 5-4 海洋重力异常计算	87

§ 5-5	海洋重力测量精度评定	90
§ 5-6	海洋重力测量半系统差调整与检验	92
§ 5-7	海洋重力测线网平差	101
§ 5-8	海洋重力异常推值	107
第六章	海洋重力测量的应用	114
§ 6-1	海洋重力测量在解算边值问题中的应用	114
§ 6-2	海洋重力测量在重力场研究中的应用	116
§ 6-3	利用模板法计算海上重力垂线偏差和大地水准面差距	119
§ 6-4	利用电算法计算海上大地水准面差距和重力垂线偏差	126

下篇 海洋磁力测量

第七章	海洋磁力测量的理论基础	135
§ 7-1	绪论	135
§ 7-2	磁偶极子的场及位	136
§ 7-3	磁化体的磁位	139
§ 7-4	地磁要素及其分布特征	142
§ 7-5	地磁场的解析表示	146
§ 7-6	地磁场的结构	152
§ 7-7	地磁场的变化	153
第八章	海洋磁力测量仪器	159
§ 8-1	磁力仪的分类	159
§ 8-2	海洋质子旋进式磁力仪	159
§ 8-3	地面质子旋进式磁力仪	164
§ 8-4	国外海洋磁力仪简介	165
第九章	海洋磁力测量的设计与实施	169
§ 9-1	磁力测量比例尺和测网布设	169
§ 9-2	磁力测量的精度及对导航定位的要求	169
§ 9-3	海洋磁力测量的实施	171
第十章	海洋磁力测量数据处理及其应用	176
§ 10-1	磁力异常的校正	176
§ 10-2	磁异常图的绘制	178
§ 10-3	磁力测量质量分析	179
§ 10-4	海洋磁异常的应用	180
§ 10-5	中国海域地磁偏角图的绘制	181
参考文献		183

上篇 海洋重力测量

第一章 绪论

自然界的一切现象几乎都与重力有着密切的联系，因此重力测量的应用范围很广。例如，在地球物理勘探中，由于岩石和矿石的密度不同所引起的重力场的变化，可用来寻找矿藏和了解地质构造；在地球物理学中，可以利用重力测量的数据去测定地球的弹性、密度及地壳的构造；在大地测量学中，要用重力数据去归算观测成果和研究地球形状；在导弹与航天技术中，重力测量资料可为空间飞行器的轨道计算和惯性导航服务，提高远程导弹的命中率。如此等等。

陆地上进行重力测量已有几百年历史，尽管尚有少数空白区，但各处重力分布基本清楚了，但是陆地毕竟只占地球总面积的 29%，剩下 71% 的海洋上的重力详细情况则了解不多。近年来，卫星重力测量取得了较大的进展。未来海洋重力场的精细结构，可以利用卫星测高、卫星重力梯度测量和海洋重力测量相结合的方法摸清楚。

海洋重力测量工作开展较晚的原因在于它不同于陆地重力测量，海洋重力测量必须在运动的状态下，即所谓的动基座上进行，因此，它又会受到外部条件的干扰。这种干扰可以概括为以下六个方面：（1）径向加速度影响。这是由于测量船的航迹为曲线所产生的径向加速度对重力观测的影响；（2）航行加速度影响。这是因为测量船航速不均匀产生加速度对重力观测的影响；（3）周期性水平加速度影响。这是由于波浪起伏及机器震动等因素引起的船在水平方向上的周期性振动对重力观测的影响；（4）周期性垂直加速度影响。这是上面所述外界因素使船在垂直方向上的周期性振动对重力观测的影响；（5）旋转影响。即由于波浪、风力和驾驶因素而引起的船绕三个正交轴转动而对重力观测的影响。这种影响有常量的和周期的两种；（6）厄特弗斯（Eötvös）效应。由于海洋重力测量仪器随测量船相对于地球在运行，这样改变了作用在仪器上的离心力而对重力观测值产生影响。

上述外界因素的影响，可归结为水平加速度和垂直加速度的影响，其量相当大，一般的重力仪是难以完成海洋上重力测量的。海洋重力测量的真正起步始于本世纪 20 年代，也就是说，由于海洋环境的复杂性以及受测量仪器等因素的限制，海洋重力测量至今只有 70 年左右的历史。在这段时间里，海洋重力仪的发展经历了三个主要阶段。

1923 年，荷兰科学家费宁-梅内斯（Vening·Meinesz）首次成功地在潜水艇上使用摆

仪进行了海洋重力观测。摆仪是海洋重力仪发展的第一阶段，初期仪器的测量精度较低。布朗（Brown）于1937年改进了海洋摆仪，消除了二阶水平加速度和垂直加速度的影响，使测量精度提高到5~15毫伽。由费宁-梅内斯设计的三摆仪到前苏联科学院地球物理研究所研制的六摆仪，都取得过许多宝贵的海洋重力测量资料。摆仪测量从20年代一直延续到50年代末期。由于摆仪操作复杂、测量时间长、效率低、费用高，后被船载走航式海洋重力仪所取代。在我国，没有开展过由摆仪进行的海洋重力测量工作。

在摆仪发展的同时，由海底重力仪进行的定点静态海底重力测量也在发展，这是为了适应浅海地区海洋重力测量的需要而发展起来的。为了能够在浅海地区获得较高精度的相对重力测量成果，人们曾经采取了许多措施利用陆地重力仪下海工作。起初是将陆地重力仪放在脚架上进行观测，其工作水深仅限于几米的范围内，且易受风浪的影响；后来采用潜水钟将陆地重力仪从海水上方移到水下进行重力观测，也只能在浅海进行，而且设备笨重安全性差。1940年左右，出现了海底重力仪的遥控观测设备，才把人从海底解放了出来。这种设备是将陆地重力仪及其平衡装置安放在一个密封外壳内，沉放到海底，通过电缆在船上启动重力仪，并将测量的数据再送回到船上。这种海底重力仪比使用潜水钟方便且迅速，在水深不超过50m时，只要0.5~1小时即可完成一次观测，而且有较高的观测精度。从60年代后期到80年代初，我国地矿和石油部门使用海底重力仪，在我国沿岸的浅海海区，进行了全面、有计划的海底重力测量工作，基本上覆盖了整个沿海海区。目前，我国沿海海区的海底重力测量工作已基本结束，今后海底重力仪的使用也不会很多，所以本书将不研究海底重力仪。

摆杆型海洋重力仪是完成由水下到水面、由离散点测量到连续线测量这一历史性演变的仪器，也是海洋重力仪发展的第二阶段。该类仪器中最有代表性的要数德国格拉夫-阿斯卡尼亚公司（Graf-Askania）生产的GSS-2型（后改型为KSS-5型）重力仪和美国拉科斯特-隆贝格公司（Lacoste & Romberg）生产的L&R型重力仪；我国研制的ZYZY型（后改型为DZY-2型）重力仪也是属于此种类型的海洋重力仪。摆杆型海洋重力仪的发展也经历了由初步到完善的两个过程：50年代中期到60年代中期是初步定型过程，西德和美国的两家公司在1957年分别用增加仪器阻尼的办法改进了陆地重力仪，并安装在普通船的稳定平台或常平架上，形成走航式海洋重力仪。这种仪器受船只引起的加速度影响较大，只能在近海海况较好的条件下工作。到了60年代中期，德国的阿斯卡尼亚公司和美国的拉科斯特公司相继对上述重力仪的弹性系统在结构上进行了刚性强化，进一步增大阻尼，建立了反馈回路和滤波系统，从而将走航式摆杆型海洋重力仪进行了完善。这两种型号的海洋重力仪都安装在陀螺平台上工作，抗外界干扰能力大大加强，因此可以在中级海况下工作，测量精度提高到1毫伽，平静的海况下测量精度可达0.7毫伽。我国不少单位都进口了这种类型的海洋重力仪，并用它们完成了全国近海和部分太平洋海域的海洋重力测量任务。

对于摆杆型海洋重力仪来说，交叉耦合效应（水平干扰加速度和垂直干扰加速度的合并影响，又称CC效应）引起的误差可达5~40毫伽，因此在这类重力仪中，通常带有附加装置测量出作用在重力仪传感器上扰动加速度的垂直分量和水平分量，并由专用的计算机计算出CC改正值。即使如此，交叉耦合效应误差仍是其主要的误差源，因此，不受交叉耦

合效应影响的轴对称型海洋重力仪就应运而生了。

轴对称型海洋重力仪不受水平加速度的影响，从理论上讲消除了交叉耦合误差，在比较恶劣的海况下也能较好地工作，这是海洋重力仪的一大进步，此类仪器被视为第三代海洋重力仪。目前，它们正以明显的精度、分辨率和可靠性的优势，逐步取代摆杆型重力仪，成为进一步探索海洋重力场的重要工具。现在国际上比较有代表性的是德国生产的 KSS-30 型海洋重力仪和美国生产的 BGM-3 型海洋重力仪。如 KSS-30 型海洋重力仪 1981 年投入使用以来，在垂直加速度小于 15 伽的平静海况下的工作精度达到 0.2~0.5 毫伽；在垂直加速度介于 15 伽和 80 伽之间的恶劣海况下工作的精度为 0.4~1.0 毫伽；在垂直加速度介于 80 伽和 200 伽的非常恶劣海况下工作的精度为 0.8~2.0 毫伽。这种重力仪的另一个特点是所配的计算机可以直接进行厄特弗斯改正及正常重力、空间异常和布格异常计算，还带有转弯补偿电路，使得测量船在转向时重力仪仍可连续工作，这一点是摆杆型重力仪不能做到的。又如 BGM-3 型海洋重力仪也是 1981 年开始投入使用，其传感器静态分辨率可达 10 微伽，平静海况下工作的精度为 0.38 毫伽，在远海测量中工作的精度为 0.7 毫伽，可分辨出 1~2km 波长的重力异常信息。这种重力仪也可自动计算厄特弗斯改正值及正常重力、空间异常和布格异常的计算，有实时处理功能，处理后的数据可以打印输出，也可由磁带机输出。实时处理后的重力资料仍然允许使用精确的导航资料和实际的零点漂移速率作进一步后处理。该型重力仪在船只转向时也可连续观测，对于船只近 180°的转向，重力仪仅 4 分钟就可完全稳定。中国科学院测量与地球物理研究所于 80 年代中期研制的 CHZ 型海洋重力仪也是轴对称型，能在垂直加速度达 500 伽及水平加速度 200 伽的恶劣海况下工作。它采用了零长弹簧、力平衡反馈、硅油阻尼、数字滤波技术，与 KSS-30 型仪器对比的不符值均方差为 1.4 毫伽。

自 1979 年 GEOS-3 卫星使用雷达测高仪进行卫星测高工作以来，利用卫星手段获取海洋重力资料的精度和分辨率越来越高，它与摆杆型海洋重力仪实测的重力所达到的精度和分辨率之间的差距越来越小。图 1-1-1 表示卫星测高与第二代、第三代海洋重力仪的分辨

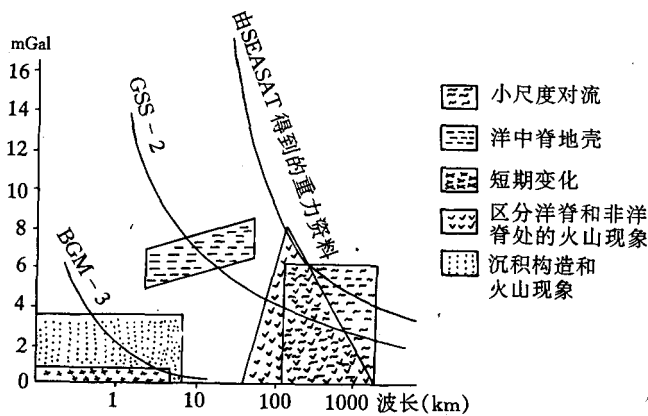


图 1-1-1

率、精度曲线和各种不同空间波长的地质问题对分辨率与精度要求之间的关系。

图中纵坐标表示重力观测精度，横坐标表示重力观测分辨率。由图可见，SEASAT 卫星求得的重力资料已有力地冲击着第二代海洋重力仪 (GSS-2)。第三代海洋重力仪 (BGM-3) 则在精度和分辨率方面仍有较大的优势，它能探测到包括泥火山及其它沉积构造等这些新一级的地质特征。随着 GPS 的出现，使用第三代海洋重力仪有可能探测出由于风暴作用形成的沉积物波和表层地壳中岩浆迁移而引起的重力随时间的变化，这就为地球物理和地质方面的研究开拓了更加广阔的前景。同时，海洋重力频谱信息中频带的扩展对国防和空间领域的应用也有积极的意义，而这些有用的频带目前靠空间技术还不能得到，必须依靠第三代海洋重力仪的实测资料获得。

除以上所述的摆杆型和轴对称型海洋重力仪外，还有一种是通过测量弦的谐振频率而得到重力变化的海洋重力仪，称为振弦型海洋重力仪。它的历史可以追溯到 1949 年，吉尔伯特 (Gilbert) 研制出第一台在潜艇上使用的振弦型重力仪。以后，日本、美国和前苏联都积极开始研制，最有代表性的是日本东京大学地球物理研究所研制的东京海面船载重力仪 (TSSG)、美国麻省理工学院研制的文氏振弦重力仪和前苏联研制的 Magistr 系统。我国北京地质仪器厂 1975 年也生产过 ZY-1 型振弦型海洋重力仪。该型仪器在我国应用很少。

总之，近几十年来，随着海洋开发事业的蓬勃发展，世界各主要海洋国家普遍加强了海洋重力测量工作，在发展仪器的同时，完成了大量海区的测量工作。前已述及，我国在海洋上开展重力测量工作仅有 20 余年的历史，多数情况是在研究近海海区的地质构造和含油情况。70 年代末由于配合空间技术的研究，才对海洋重力测量提出了新的要求。目前，在我国主要开展中、小比例尺的航海重力测量。小比例尺测量多用于大范围重力场调查任务，以剖面测量为主；中比例尺测量多用于浅海大陆架地区，主要用于以石油为主的矿产资源的调查，以面积测量为主。地球形状研究和空间科学等任务对海洋重力测量的要求，也多以面积测量为主，并要求在测区内测量点要大致均匀分布。

第二章 海洋重力测量的理论基础

§ 2-1 重力及重力位

我们从物理学中已经得知,地球上任一质点的重力,是地球整个质量对该点的引力 \vec{F} 和因地球按等角速度 ω 绕地轴自转而产生的离心力 \vec{P} 的合力。即

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{P}$$

重力 G 是质量 m 和重力加速度的乘积。它的单位在C. G. S制中为达因*, 使1克质量的物体得到1厘米/秒²加速度的力称为1达因(1dyn), 即 $1\text{dyn} = \text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2}$ 。如果被吸引质量 $m=1\text{g}$ 时, 则重力在数值上等于重力加速度, 因此通常将重力和重力加速度两个词通用。测定一点的重力实质是测定该点的重力加速度的数值。重力加速度的单位以“伽”(Gal)表示** (即 1cm/s^2); 千分之一伽称为“毫伽”(mGal); 千分之一毫伽称为“微伽”(μGal), 即

$$1\text{Gal} = 10^3\text{mGal} = 10^6\mu\text{Gal}$$

实际测量结果表明, 地球表面上的重力值约在978~983伽之间。从总的趋势看, 在赤道处的重力小, 而两极的重力大, 但局部的变化是相当复杂的。地球表面上的最大重力差约为6000毫伽, 我国从南到北重力值变化达3000多毫伽。

进一步研究表明, 地球上任一点除了受到地球质量的吸引外, 还受到宇宙间其它天体的吸引, 而且地球的旋转轴、地球的形状及其内部质量分布也不是固定的。因此, 重力还有一种广义定义, 即宇宙间全部物质对地球上任一质点所产生的引力和该点随地球相对惯性中心运动而引起的离心力的合力。广义定义的重力, 其数值和方向都随时间而发生周期性或长期性变化。这种变化是由于天体相对于地球的位置的变化、地球旋转角速度的变化、地球旋转轴的摆动、地球内部质量的迁移等因素而造成的。这种变化影响约在 3×10^{-7} 量级。重力的主要部分是引力, 离心力最大也只有引力的1/300。

为了进一步利用重力研究地球形状等问题, 我们尚需利用与力有关的函数——位函数作为工具, 下面, 先介绍一下位函数的概念。

设有一个标量函数, 它对被吸引点各坐标轴的偏导数, 分别等于力在相应坐标轴上的分量, 这样的函数称为位函数, 简称力的位。例如, 我们已知空间两个质点 m 和 m' 之间的距离为 r 时, 则其间的引力为:

$$F = -f \frac{mm'}{r^2} \quad (2-1-1)$$

* “达因”为我国现行法定计量应废除的单位, 1达因(dyn) = 10^{-5}N (牛顿) = $1\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

** “伽”(Gal)为我国现行法定计量应废除, 国际上暂时还允许使用的单位。

参见图 2-1-1, M 为吸引点, P 为被吸引点, 引力方向朝向 M 点。式中右边的负号表示引力方向与 r 方向相反。 f 为引力常数, 在 C. G. S 制中, $f=6.670 \times 10^{-8}$ 。式中的 r 为:

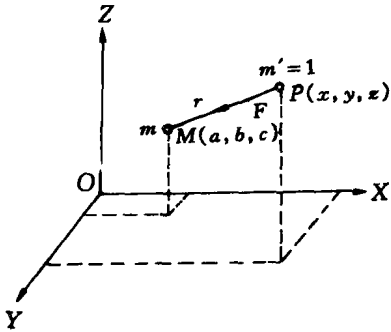


图 2-1-1

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \quad (2-1-2)$$

当 $m'=1$, 即 P 点为单位质点时, (2-1-1) 式可以写成:

$$F = -f \frac{m}{r^2} \quad (2-1-3)$$

对应于 (2-1-3) 式的引力, 则有引力位, 我们用 V 表示质点的引力位, 其函数形式为:

$$V = f \frac{m}{r} \quad (2-1-4)$$

按位函数的定义, 我们将上式对坐标 x, y, z 求偏导数有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= fm \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -f \frac{m}{r^3}(x - a) = F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= fm \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -f \frac{m}{r^3}(y - b) = F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= fm \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -f \frac{m}{r^3}(z - c) = F_z \end{aligned} \right\} \quad (2-1-5)$$

由此证明 (2-1-4) 式确实是质点的引力位。

假如吸引质点不止一个, 而是许多质点 m_1, m_2, \dots, m_n 都对某一单位质点 P 作用, 各质点与 P 的距离分别为 r_1, r_2, \dots, r_n , 则总的引力位应为各引力位之和。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 各质点又连续地组成一个整体, 例如地球, 此时设质体的质量元素为 dm , 则此质体 (地球) 对单位质点的引力位便可写成积分形式:

$$V = f \int_{\tau} \frac{dm}{r} \quad (2-1-6)$$

或写成

$$V = f \int_{\tau} \frac{\delta d\tau}{r} \quad (2-1-7)$$

式中, τ 为质体总体积, 体元 $d\tau = da db dc$, 体密度为 $\delta(a, b, c)$, 而质元 $dm = \delta(a, b, c) d\tau$ 。

以上我们讨论了引力位的概念, 同样, 对于离心力我们也能找到一个函数 Q :

$$Q = \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (2-1-8)$$

式中, ω 为地球的旋转角速度;

ρ 为单位质点 A 到坐标原点的距离;

θ 为极距;

$\rho \sin \theta$ 为单位质点到旋转轴的垂直距离。

参见图 2-1-2。

同样，将函数 Q 对三个坐标轴求偏导数，则有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \omega^2 x = P_x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \omega^2 y = P_y \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 = P_z \end{aligned} \right\} \quad (2-1-9)$$

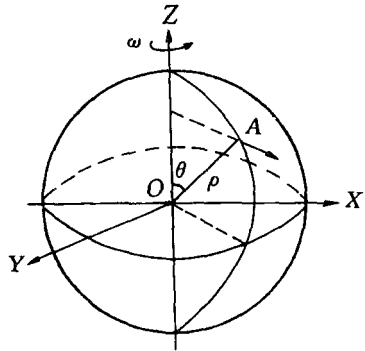


图 2-1-2

说明函数 Q 就是离心力位。

既然重力等于引力和离心力的合力，那么重力位 W 就是引力位 V 与离心力位 Q 之和：

$$W = V + Q \quad (2-1-10)$$

对地球来讲， W 可写成：

$$W = f \int_r \frac{\delta d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (2-1-11)$$

式中符号意义同前。

对 (2-1-10) 式求对三个坐标轴的一阶偏导数，可得重力在各坐标轴上的分力：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = g_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = g_y \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} = g_z \end{aligned} \right\} \quad (2-1-12)$$

使用于一般情况，可以认为，重力位对任意方向 n 的导数就等于重力在这个方向上的分力，即

$$\frac{dw}{dn} = g_n = g \cos(g, n) \quad (2-1-13)$$

上式中，当 n 的方向与重力方向相反，即 $\cos(g, n) = -1$ ，则

$$dn = -\frac{dw}{g} \quad (2-1-14)$$

(2-1-14) 式将在以后章节中被引用，它把高程与重力位联系起来，是研究水准测量高程系统的重要公式。

当 n 的方向与重力方向垂直，即 $\cos(g, n) = 0$ ，则 $dw = 0$ ，也就是说，如果被吸引点沿着重力的垂直方向移动，重力位不变。即

$$W = \text{常数} \quad (2-1-15)$$

当上式右边给以不同的常数，就可得到一簇重力等位面，即水准面。其中有一个是十分重要的水准面，即它与静止的海洋面重合，称为大地水准面，它是一个连续不断的封闭曲面。由大地水准面所包围的整个形体叫大地体。由于地球的地壳内部物质密度分布极不

均匀, 致使各点重力大小和方向会发生不规则的变化。前已述及, 大地水准面是处处与重力方向(铅垂线方向)垂直的, 所以大地水准面又是一个略有起伏的不规则的表面, 在这个表面上是无法进行数学计算的。但是, 从整体上看, 大地水准面所包围的大地体又相当接近于一个规则的、具有微小扁率的旋转椭球。因此, 从研究这个规则的旋转椭球入手, 进一步再研究地球重力场, 就成了我们的思路。

§ 2-2 地球正常重力场

地球正常重力场的确定, 主要包括地球正常重力位和正常重力公式的确定。

所谓确定地球正常重力位, 实际上是选择参考面的问题。根据上节所述, 我们选择参考面时应考虑与大地水准面非常接近, 其差距愈小愈好, 而且又可用简单的数学公式来表示。由于大地体近似于旋转椭球体, 所以我们选择旋转椭球面作为参考面是合适的。该椭球称为正常椭球, 由它产生的重力位称之为正常重力位。

确定正常重力位的方法很多, 这里主要介绍通常采用的两种方法: 一种方法叫拉普拉斯(Laplace)方法。它是将重力位函数 W 按球谐函数展成级数, 选取级数的头几项, 略去余项, 所得的近似重力位作为正常重力位。另一种方法叫斯托克斯(Stokes)方法。它是已知旋转椭球体的表面形状 S , 以及它的总质量 M 和旋转角速度 ω , 然后用数学方法求得该旋转椭球体的重力位, 并把它当成正常重力位。下面我们分别简述这两种方法。

一、拉普拉斯方法

为节省篇幅, 这里不加推导(读者可参考有关文献中的推证), 直接给出用球谐函数表示的地球重力位函数:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^n (A_n^k \cos k\lambda + B_n^k \sin k\lambda) P_n^k(\cos\theta) \right] + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \sin^2\theta \quad (2-2-1)$$

根据前面所述的方法, 可选取头几项作为正常重力位。项数选取多少, 需视实际观测资料的精度和对正常重力位要求的精度而定。为了便于说明问题, 我们这里取头三项, 即取 $n=0, 1, 2$ 来表示正常重力位, 即

$$U = \frac{A_0}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} [A_1 \cos\theta + (A_1^1 \cos\lambda + B_1^1 \sin\lambda) \sin\theta] + \frac{1}{\rho^3} \left[A_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. + (A_2^1 \cos\lambda + B_2^1 \sin\lambda) 3 \cos\theta \sin\theta + (A_2^2 \cos 2\lambda + B_2^2 \sin 2\lambda) 3 \sin^2\theta \right] + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \sin^2\theta \quad (2-2-2)$$

这里有两个问题需要说明一下, 一是(2-2-1)式中的 $P_n(\cos\theta)$ 称为主球函数, 或称勒让德多项式, 它的一般形式为:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n(\cos^2\theta - 1)^n}{d(\cos\theta)^n}$$

而式中的 $P_n^k(\cos\theta)$ 称为勒让德缔合函数，它的一般形式为：

$$P_n^k(\cos\theta) = \sin^k\theta \frac{d^k P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^k}$$

当 $n=0, 1, 2$ 时，可分别得

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta$$

$$P_2^1(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

将它们代入 (2-2-1) 式，即有 (2-2-2) 式。要说明的第二个问题是，(2-2-2) 式中的几个系数 $A_0, A_1, A_2, A_1^1, B_1^1, A_2^2, B_2^2, A_2^2, B_2^2$ ，它们统称为斯托克斯常数。它们和地球质量、质心坐标、惯性矩、惯性积及主惯性轴等理论力学中的矩有关。 A_0 与地球质量 M 有关，也就是与零级矩有关的量，令 $A_0 = fM$ 。如地球质心的坐标用球面坐标表示，即

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{\tau} \delta\rho' \sin\theta' \cos\lambda' d\tau}{M} \\ b_0 &= \frac{\int_{\tau} \delta\rho' \sin\theta' \sin\lambda' d\tau}{M} \\ c_0 &= \frac{\int_{\tau} \delta\rho' \cos\theta' d\tau}{M} \end{aligned} \right\}$$

那么， A_1, A_1^1, B_1^1 这些与一级矩有关的量可写成

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= fMc_0 \\ A_1^1 &= fMa_0 \\ B_1^1 &= fMb_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2-3)$$

而 $A_2, A_2^2, B_2^2, A_2^2, B_2^2$ 都是与二级矩有关的量，它们是地球的惯性积 D, E, F 和地球相对坐标轴的转动惯量 A, B, C 的函数，即

$$\left. \begin{aligned} A_2^1 &= f \cdot F \\ B_2^1 &= f \cdot E \\ B_2^2 &= \frac{f}{2} \cdot D \\ A_2 &= f \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \\ A_2^2 &= \frac{1}{4} f(B-A) \end{aligned} \right\} \quad (2-2-4)$$

至此，问题已经基本交待清楚。下面我们选取正常重力位时，可将坐标原点设在地球质心

上, 即 $a_0=b_0=c_0=0$, 则根据 (2-2-3) 式知, $A_1=A_1^1=B_1^1=0$; 再令坐标轴为地球的主惯性轴, 则 $F=E=D=0$, 所以根据 (2-2-4) 式可有, $A_2^1=B_2^1=B_2^2=0$; 如果再考虑地球为旋转体, 即赤道是圆的话, 则 $A=B$, 这样 $A_2=f(A-C)$, $A_2^1=0$ 。由此可得正常重力位为:

$$U = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \frac{C-A}{2M\rho^2} (1 - 3\cos^2\theta) + \frac{\omega^2\rho^3}{2fM} \sin^2\theta \right] \quad (2-2-5)$$

仿 (2-1-15) 式, 当令 $U=\text{常数}$, 就可得到一族正常位水准面, 其中有一个是非常接近于大地水准面的。它通过 $\rho=a$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处, 因此这个水准面上的正常重力位值为:

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{C-A}{2a^2M} + \frac{\omega^2 a^3}{2fM} \right) \quad (2-2-6)$$

现在看括号内的第二项和第三项。我们知道, 卫星大地测量学常用符号 J_2 来表示二阶球谐函数的系数, J_2 与 A_2 的关系式为:

$$A_2 = -fMa^2J_2 \quad (2-2-7)$$

考虑到 (2-2-4) 式 $A=B$ 时, $A_2=f(A-C)$ 。故有:

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} \quad (2-2-8)$$

而地球形状参数 μ 可用下式表示:

$$\mu = \frac{3(C-A)}{2Ma^2} \quad (2-2-9)$$

由此知 J_2 与 μ 的关系式为:

$$J_2 = \frac{2}{3}\mu \quad (2-2-10)$$

所以 (2-2-6) 式括号内的第二项为 $\frac{1}{3}\mu$ 。再看第三项,

$$\frac{\omega^2 a^3}{fM} = \frac{\omega^2 a}{fM} = \frac{\omega^2 a}{g} = q \quad (2-2-11)$$

这里, q 表示地球赤道上的离心力和重力的比值。将 (2-2-9) 和 (2-2-11) 代入 (2-2-6) 式, 得:

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{2}q \right) \quad (2-2-12)$$

如果我们将 (2-2-9) 和 (2-2-11) 也代入 (2-2-5) 式, 得

$$U = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \frac{1}{3}\mu(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{1}{2}q \cdot \sin^2\theta \right] \quad (2-2-13)$$

令 (2-2-13) 式等于 (2-2-12) 式, 即可求出与大地水准面最相近的那个正常位水准面的方程式:

$$\rho = a \frac{1 + \frac{\mu}{3}(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{q}{2}\sin^2\theta}{1 + \frac{\mu}{3} + \frac{q}{2}}$$

将上式分母展成级数, 并考虑到 μ, q 均为 $1/300$ 的微小量, 略去 μ, q 的平方以上各项, 得

$$\begin{aligned}
 \rho &= a \left(1 + \frac{1}{3}\mu - \mu \cos^2\theta + \frac{q}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}q \right) \\
 &= a \left[1 - \mu \cos^2\theta - \frac{q}{2}(1 - \sin^2\theta) \right] \\
 &= a \left[1 - \left(\mu + \frac{q}{2} \right) \cos^2\theta \right]
 \end{aligned} \tag{2-2-14}$$

另从解析几何可知, 准至 α 一级小的旋转椭圆面方程可以写为 $\rho = a(1 - \alpha \cos^2\theta)$, 将它与 (2-2-14) 式比较, 证明它是个旋转椭球面, 其扁率为:

$$\alpha = \mu + \frac{1}{2}q \tag{2-2-15}$$

其相应的旋转椭球体称为克莱罗 (Clairaut) 椭球。

下面再来求该椭球体上的重力值, 即正常重力 γ_0 。我们知道重力等于重力位对水准面法线求导数, 但在 (2-2-5) 式中 U 不是法线的函数而是向径 ρ 的函数。见图 2-2-1, 向径与法线的夹角就是大地纬度与地心纬度之差 $B - \varphi$, 当 $\varphi = 45^\circ$ 时, 最大差仅为 $11.6'$, 故可忽略不计, 而将 (2-2-5) 式对 ρ 取导数, 可得

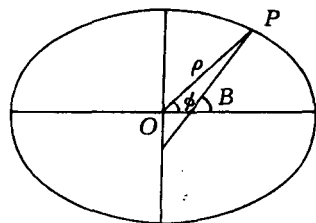


图 2-2-1

$$\gamma = - \frac{dU}{d\rho} = \frac{fM}{\rho^2} [1 + \mu(1 - 3\cos^2\theta) - q\sin^2\theta]$$

将 (2-2-14) 式代入上式, 即得克莱罗椭球上的正常重力:

$$\gamma_0 = \frac{fM}{a^2} \frac{[1 + \mu(1 - 3\cos^2\theta) - q\sin^2\theta]}{\left[1 - \left(\mu + \frac{1}{2}q \right) \cos^2\theta \right]^2}$$

同样, 将上式分母展成级数, 取至 α 量级得

$$\gamma_0 = \frac{fM}{a^2} [1 + \mu - q + (2q - \mu)\cos^2\theta]$$

再代入 (2-2-15) 式得:

$$\gamma_0 = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \alpha - \frac{3}{2}q + \left(\frac{5}{2}q - \alpha \right) \cos^2\theta \right] \tag{2-2-16}$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, 可得到赤道上的正常重力 γ_e :

$$\gamma_e = \frac{fM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3}{2}q \right) \tag{2-2-17}$$

当 $\theta = 0^\circ$ 时, 可得到极点上的正常重力 γ_p :

$$\gamma_p = \frac{fM}{a^2} (1 + q) \tag{2-2-18}$$

在忽略 α 二级小情况下, 考虑到 (2-2-17) 式, 则 (2-2-16) 式还可写成:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \frac{fM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3}{2}q \right) \left[1 + \left(\frac{5}{2}q - \alpha \right) \cos^2\theta \right] \\
 &= \gamma_e \left[1 + \left(\frac{5}{2}q - \alpha \right) \cos^2\theta \right]
 \end{aligned}$$