优等生数学

教程

高中第一册

主编■熊　斌　徐斌艳

本册核心作者

朱永庆（七宝中学）

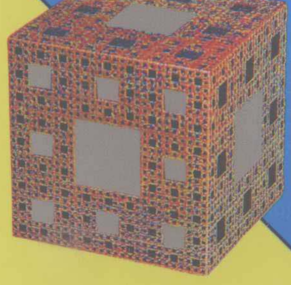
许　敏（控江中学）

况亦军（上海中学）

田万国（建平中学）

上海十大名牌高中联编

直击名牌大学



华东师范大学出版社

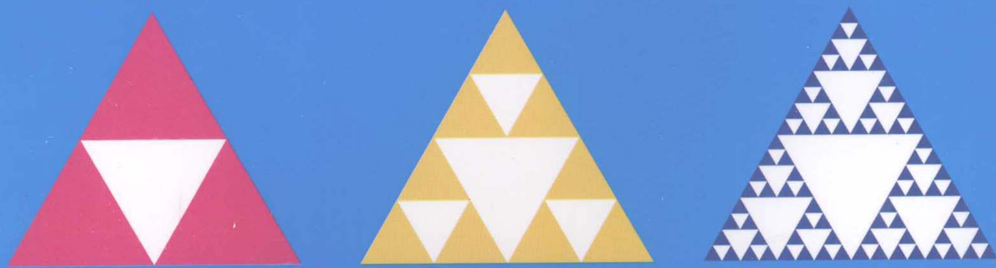
康托尔集（Cantor Set）

封面上的图形是三维的康托尔集，也称为“康托三分集”。

一维康托尔集的构造要点是：给定一个单位长线段，去掉其中三分之一线段；对于余下的两个线段，再去掉各自中间的三分之一线段；继续如此操作，直至无穷——剩下的点就构成了“康托尔集”。

该集由德国数学家康托尔（G. Cantor, 1845-1918）首先提出，其特点是，集合中包含了不可数多个点但其总长度为0；同时，它也是一个具有“任何局部都和整体相似”特点的分形结构。可以把构造康托尔集的方法推广到二维和三维空间。

下图是二维的康托尔集。



（王善平）

ISBN 978-7-5617-6251-6

定价：20.00 元

www.ecnupress.com.cn

优等生数学教程

高中第一册

主编■熊　斌　徐斌艳

本册核心作者

朱永庆（七宝中学）

许　敏（控江中学）

况亦军（上海中学）

田万国（建平中学）

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学教程. 高一. 上/熊斌,徐斌艳主编. —上海:华东师范大学出版社,2008
(优等生数学)
ISBN 978-7-5617-6251-6

Ⅰ. 优… Ⅱ. ①熊…②徐… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 109561 号

优等生数学教程

高中第一册

主　　编　熊　斌　徐斌艳
策　　划　倪　明(数学工作室)
组　　稿　倪　明　徐　金
审读编辑　徐惟简　孔令志
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　扬中市印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　11.75
字　　数　210 千字
版　　次　2008 年 9 月第一版
印　　次　2008 年 9 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-6251-6/G·3623
定　　价　20.00 元

出 版 人　朱杰人

我们的作者团队

主编

►►熊斌　魁梧而温和，有极好的合作精神。作为智优教育专家，在青年学生中的知名度是以时间为自变量单调递增的指数函数。日常喜欢做题，擅长解难题，又是高产者，成为多项数学竞赛命题委员会的不动点。多次带领中国学生参加IMO获得团体第一，为国争得荣誉。著作以百为单位，他的不少著作成为畅销书，并且是学生阅读的经典。

►►徐斌艳　貌似大学生，却是n名博士、m名硕士的导师了。这一反差成为单调递增函数的一个反例。现为课程系系主任的她，学术生涯从德国奥斯纳布吕克大学从事数学学习的认知结构差异的研究起步。如今承担了国际视野下学生数学素养研究等国家项目，成为我国数学教育研究的中坚力量。著作等身。兼任中国数学会理事，入选2007年度教育部“新世纪优秀人才支持计划”。

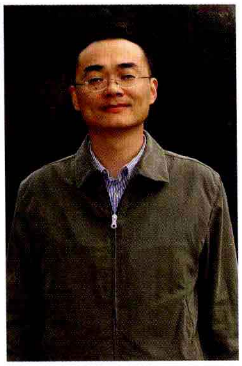
核心作者

（按姓氏音序排列）

曹建华（交大附中）
陈双双（华东师大二附中）
况亦军（上海中学）
刘寅（复兴高级中学）
刘云（复旦附中）
田万国（建平中学）
许敏（控江中学）
杨岚清（大同中学）
张雄（延安中学）
朱永庆（七宝中学）

本册核心作者

▶▶**朱永庆** 个子不高，但给人感觉到强壮，更显一种力量，是教书、育人、让学生敬佩的力量。二十多年的从教生涯积累了丰富的教学经验。“教书最大的快乐在于育人”，这是他的人生感言。作为华东师范大学的毕业生，有着扎实的数学功底。身为七宝中学教务处副主任的他，勤钻研，重技巧，做好工作中的每一件事，送走了一批又一批学生。培养的学生曾获得全国数学联赛一等奖。在他的荣誉库里有：上海市首届数学教师教学评比一等奖，区教学能手第一名，上海市园丁奖……



▶▶**许敏** 三十多岁的青年教师，态度和蔼，衣着朴素。他的笑容很有感染力，使人身心愉快。在他的教学工作中，一些教育学术语，诸如“因材施教”、“学有所得”、“学以致用”、“分层教学”、“发现真理”、“体验”、“学科本质”、“问题意识”、“共同探究”……用得恰到好处，犹如“三只手指捏田螺”，让人敬佩。除了控江中学的日常教学，他还负责数学尖子生的课余辅导，取得了丰硕的成果。所教学生中，累计有百余人次获得全国及市级竞赛奖项，五次获数学竞赛市团体前三名。“中国数学奥林匹克高级教练员”，“全国优秀教师”，“上海市特级教师”……这些名称是对他很好的刻画。

▶▶**况亦军** 平常言语不多，但往往一鸣惊人，这似乎是优秀的数学人的共同特征。上数学课时最喜欢问的问题是：“这是什么东西？”用这样的问题来引导学生思考从怎样的数学概念出发探究发现解决问题的方法。他觉得，“出乎意料之外，却在情理之中”的数学问题是对于学生最具有启迪思维价值的学习素材。这位有着20多年教龄的数学教师，现为上海中学数学教研组组长，曾教过数学班、物理班、化学班、文科班、全男（生）班，全女班……经历是那样的丰富多彩。10多年前，上海市园丁奖榜上有名，2005年被确定为上海市普教系统名师后备人选。他主编的《多功能题典·高中数学》是极有特色的畅销书。

▶▶**田万国** 一口标准的普通话，说话温文尔雅，表达简洁准确，是名校名师的典型代表。华东师范大学数学系学科教学论专业硕士研究生毕业后即到上海市建平中学任教，已有近20年的教龄。本着数学是“教会年轻人思考”的科学这样的理念，从一名普通的教师，到数学教研组长，现为课程处副主任，一步一个脚印，踏踏实实。数学竞赛是他研究生时期的研究方向，尖子生培养是他的擅长之处，因而兼任上海市中学生业余数学学校教练员，成为中国数学奥林匹克高级教练员，都显得水到渠成。2006年被确定为上海市普教系统名师培养杨浦基地学员。著述颇多。

前　言

亲爱的同学，如果你是一位优秀、好学、勤奋、热爱数学的学生，在学习现有教材的同时，你一定渴望有挑战自己智力又充满探究情趣的课程内容。满足你的需要是我们的义务和责任，为提高你的数学思维能力，发挥你学习数学的潜力，我们组织编写了《优等生数学教程》。希望这本书能帮助你尽快成为一名优等生。

在21世纪的钟声敲响之时，我国迎来了新一轮的数学课程改革，它首先体现在课程和教材的多样化和多元化。新一轮的课程改革鼓励我们为学有余力、学有特长的学生设计、开发专门的校本课程，让那些学生在打好扎实基础的同时，能寻找到适合他们智力水平发展的课程内容，学习到满足自己学习需求的数学内容和思想方法，作为数学教育工作者，我们应义不容辞地承担起这一任务。

在策划编写本书的过程中，我们特别邀请了熟悉数学课程改革目标、具有丰富教学经验、又拥有高深数学专业水平的优秀教师直接参与。我们与这些优秀的编写者汇聚在一起，认真解读数学课程标准的要求，结合数学教学内容的实际需求，尤其是系统分析优秀学生的学习特点，设计出了富有特色的教程结构，然后大家通力合作、沟通协商，充分发挥自己的智慧，编写出这套教程。

这套教程包括如下几个栏目：

知识要点：为你梳理本单元涉及的知识重点和难点，提供一个知识网络。

典型例题：为你提供有代表性的数学例题，并且利用“解题指要”点拨解决每个例题的关键步骤和所包含的数学思想方法。

寻根问底：为你解答知识要点的来龙去脉，介绍相关的知识背景。

举一反三：为你提供巩固型的例题，加深对问题的理解，提高解题技能。

融会贯通：为你创设问题情境，让你充分发挥对知识的理解。

参考答案：提供解题的线索或者答案，帮助你进行学习的自我评价。

本章回顾:再次帮助你梳理所经历的概念性知识和应用性知识。

根据目前的教学情况,我们将高中的《优等生数学教程》分成四册。同时,我们还配套设计了《优等生数学习题集》,这是一个精心筛选后形成的习题库,每道习题的解答一方面检验你对数学知识的掌握程度,另一方面检验你对习题背后所涉及的思想方法的理解程度。这也是一本很适合你静静阅读、深入思考以及充分练习的"习题集"。与教程结合使用,才能达到预期的效果。

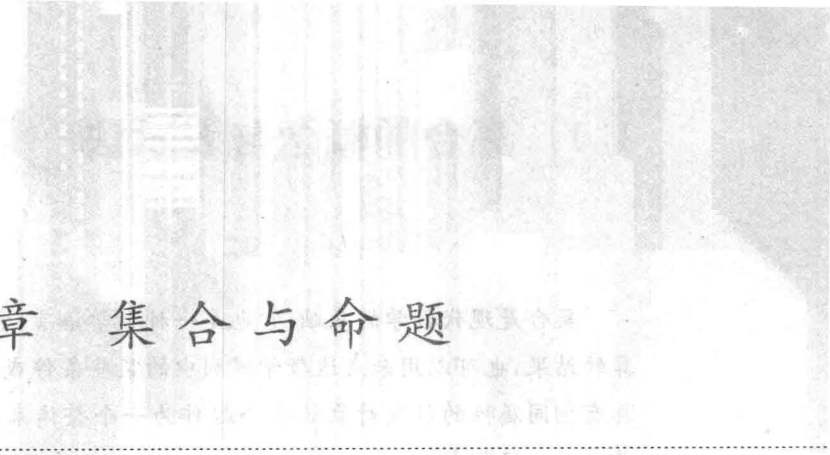
这是高中第一册,适合上海市高中一年级的学生使用,其内容包括集合与命题,不等式,函数的基本性质,幂函数、指数函数与对数函数等四章。第一章由七宝中学的陈长恩和朱永庆老师编写;第二章由控江中学的许敏老师编写;第三章由上海中学的况亦军老师编写;第四章由建平中学的田万国老师编写。

对我们而言,编写主要供优等生使用的教程是一次尝试,定有不足之处,欢迎提出批评和建议,以便日臻完善。

熊　斌　徐斌艳

2008.8

目录_Contents



第1章 集合与命题

集合论是数学的一个基本分支，也是现代数学的基础，在数学中占据着极其独特的地位，其基本概念已渗透到数学的所有领域．其创始人康托尔也以其集合论的成就被誉为对20世纪数学发展影响最深的学者之一．通俗地说，集合是一些元素组成的集体，是一些确定而又可分的“物”的集体．集合并不指具体的“物”，而是由“物”的集体所组成的新对象．20世纪以来的研究表明，不仅微积分的基础——实数理论建立在集合论的基础上，而且各种复杂的数学概念都可以用集合概念定义出来，另一方面各种数学理论又都可以“嵌入”集合论之内．因而集合论有力地促进了各个数学分支的发展．现代数学几乎所有的分支都会用到集合这个概念．

命题是可以判断真假的语句，在数学中占有重要的地位，数学学习中常涉及到命题的判断、命题的等价转化和不等价转化．解决问题的过程就是一个灵活转化的过程，将不太熟悉领域中的问题转化到较熟悉的领域中，用等价的另一个命题来代替原有的命题是常用的思想方法和解题手段，熟练灵活地进行转化是重要的基本功．命题有简单命题和复合命题之分．通常要达到正确判断的目的，必须严格把握命题的条件和结论，对每一个数学概念的内涵和外延有正确的认识和理解．

本章学习集合论的基础知识和简易逻辑的相关知识，为今后的学习打下基础．

1.1 集合的概念与表示法

集合是现代数学的基础,它也是一种数学语言,它既可以用来表达某些数学运算的结果,也可以用来表达数学规则中的某些条件或结论.在现实生活和数学中把具有相同属性的数或对象放在一起作为一个整体来进行研究,德国数学家康托尔首先提出了集合概念.

知识要点

(1) 在集合论中,"集合"是一个不定义的原始概念,就像平面几何中的"点"和"直线"的概念一样只能进行描述性的解释.

一般地,我们把具有某种特定性质对象的全体叫做一个**集合**,简称**集**.集合中的各个对象叫集合的**元素**,简称**元**.集合必须具备以下特征:

其一,集合中的元素是确定的(元素的确定性).即对于给定的集合和任意给出一个对象,能够明确判定该对象是否是这个集合中的元素(只有"是"或"不是",没有第三种选择).

其二,集合中没有两个(或以上)相同的元素(元素的互异性).即集合中的元素互不相同,都不重复出现.

其三,集合中的元素地位是相同的(元素的无序性).即集合中元素的出现与顺序无关.

集合通常用大写的拉丁字母表示,如:A、B、C、D、…等;集合中的元素通常用小写的拉丁字母表示,如:a、b、c、d、…等.

根据集合中所含元素的个数可以将集合分为**有限集**和**无限集**,有限集中含有有限个元素;无限集中含有无限多个元素.

不含有任何元素的集合叫**空集**,记作:$\varnothing$.如:方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合.

元素与集合的关系常用符号"$\in$和$\notin$"来表示,a 是集合 A 中的元素记为 $\boldsymbol{a \in A}$,读作"a 属于集合 A";a 不是集合 A 中的元素记为 $\boldsymbol{a \notin A}$,读作"a 不属于集合 A".

由数构成的集合简称**数集**,为了叙述上的方便,下列特殊的数集常用特殊的记号表示.如:

全体实数构成的集合叫**实数集**,简记为 $\mathbf{R}$,有时用 $\mathbf{R}^+$($\mathbf{R}^-$)表示正(负)实数集;

全体有理数构成的集合叫**有理数集**,简记为 $\mathbf{Q}$,有时用 $\mathbf{Q}^{+}$($\mathbf{Q}^{-}$)表示正(负)有理数集;

全体整数构成的集合叫**整数集**,简记为 $\mathbf{Z}$,正整数构成的集合记为 $\mathbf{N}^{*}$;

全体自然数构成的集合叫**自然数集**,简记为 $\mathbf{N}$;本书中 $0 \in \mathbf{N}$.

(2) 一般地,表示一个集合,常有以下两种方法:

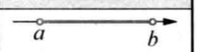
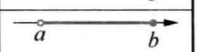
列举法. 将集合中的元素一一列举出来,并写在大括号"$\{\ \}$"内表示集合的方法,叫做列举法. 列举法常用来表示有限集或规律性比较强的无限集. 如:15 的所有约数构成的集合用列举法表示为 $\{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$;正偶数集可用列举法表示为 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$.

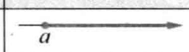
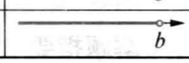
描述法. 将集合中的元素所具有的性质描述出来,并写在大括号"$\{\ \}$"内表示集合的方法,叫做描述法. 描述法常用来表示元素性质比较强的集合,其基本格式是 $\{x \mid P\}$,其中"x"是代表元素,它可以代表集合中的任何一个元素;"$\mid$"是分隔符,用来分隔代表元素和元素的特征性质,有点像语文中名词解释中的"——";分隔符"$\mid$"后面的"P"是代表元素所具有的特征性质. 如:不等式 $3x-2>0$ 的解集,记作 $\{x \mid 3x-2>0\}$,读作:"满足 $3x-2>0$ 的 x 的集合";奇数的集合,记作 $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$,读作:"被 2 除余 1 的整数 x 构成的集合";方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集,记作 $\{x \mid x^2-2x-3=0\}$,读作:"满足 $x^2-2x-3=0$ 的 x 的集合".

对于连续实数的集合,我们还可以用"**区间**"来表示. 定义如下:设实数 $a<b$,集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 简记为 (a, b),(a, b) 叫**开区间**;集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 简记为 $[a, b]$,$[a, b]$ 叫**闭区间**;集合 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 分别简记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$,$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 叫**半开半闭区间**(分别叫左闭右开区间和左开右闭区间). 这里实数 a、b 叫相应区间的端点.

实数集 $\mathbf{R}$ 也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$,"∞"读作"无穷大","$+\infty$"读作"正无穷大","$-\infty$"读作"负无穷大". 下列集合和区间也是常用的:$\{x \mid x \geqslant a\}=[a, +\infty)$;$\{x \mid x>a\}=(a, +\infty)$;$\{x \mid x \leqslant b\}=(-\infty, b]$;$\{x \mid x<b\}=(-\infty, b)$.

以上区间与对应的数轴上的图示如下表所示:

集 合	区间	数轴表示
$\{x \mid a<x<b\}$	(a, b)	
$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid a \leqslant x<b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid a<x \leqslant b\}$	$(a, b]$	

集 合	区间	数轴表示
$\{x \mid x \geqslant a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x>a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x \leqslant b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid x<b\}$	$(-\infty, b)$	

为了研究问题方便,我们还常用封闭的曲线围成的区域表示集合,叫做集合的

图示法，这种图叫维恩图(或文氏图). 如:

元素 $a \notin A$ 用图示可表示为:

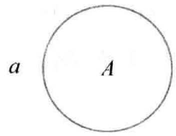


图 1－1

集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 可表示为:

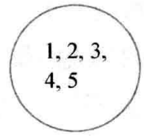


图 1－2

注:在用描述法表示的集合时，要注意不同的代表元素可能表示着截然不同的意义. 如: $\{x \mid y = f(x)\}$, $\{y \mid y = f(x)\}$ 和 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ 分别表示函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域和函数图象上的点的集合.

典型例题

例 1 用列举法表示集合: $A = \left\{x \mid x = \dfrac{a}{|a|} + \dfrac{|b|}{b} + \dfrac{|c|}{c} + \dfrac{abc}{|abc|}, a, b, c \in \mathbf{R}, abc \neq 0\right\}$ 是________.

解 因为 $a, b, c \in \mathbf{R}$，且 $abc \neq 0$，所以 a、b、c 的取值情况有:全负、一正二负、二正一负和全正.

当 a、b、c 全为负数时，$\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{|b|}{b} + \dfrac{|c|}{c} + \dfrac{abc}{|abc|} = -4$;

当 a、b、c 一正二负时，不妨设 $a > 0, b < 0, c < 0$，则

$$\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{abc}{|abc|} = 0;$$

当 a、b、c 二正一负时，不妨设 $a > 0, b > 0, c < 0$，则

$$\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{abc}{|abc|} = 0;$$

当 a、b、c 全为正数时，$\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{|b|}{b} + \dfrac{|c|}{c} + \dfrac{abc}{|abc|} = 4$.

所以 $A = \{-4, 0, 4\}$.

解题指要 用列举法表示集合时注意既不能重复也不要遗漏，读懂集合也是重要的基本功.

例 2 若 $x \in \{-1, 1, 2, x^2-2x\}$, 则实数 x 的集合是________.

解 因为 $x \in \{-1, 1, 2, x^2-2x\}$,所以 $x=-1$ 或 $x=1$ 或 $x=2$ 或 $x=x^2-2x$.

当 $x=x^2-2x$ 时, $x=0$ 或 $x=3$,但当 $x=1$ 时,$x^2-2x=-1$, 与集合中元素的互异性矛盾,所以实数 x 的集合是$\{-1, 2, 0, 3\}$.

解题指要 集合中元素具有互异性,解题时要注意验证.

例 3 已知 $M=\{x \mid x=a^2-b^2, a, b \in \mathbf{Z}\}$,若 $p, q \in M$, 则 $p \cdot q$ 是否属于 M,为什么?

解 因为 $p, q \in M$,所以存在 $a, b, m, n \in \mathbf{Z}$,使得 $p=a^2-b^2$, $q=m^2-n^2$, 所以

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (a^2-b^2)(m^2-n^2) \\ &= (am)^2+(bn)^2-(an)^2-(bm)^2 \\ &= (am+bn)^2-(an+bm)^2. \end{aligned}$$

由 $a, b, m, n \in \mathbf{Z}$ 得 $am+bn, an+bm \in \mathbf{Z}$,所以 $p \cdot q \in M$.

解题指要 本例是集合对某种运算是否"封闭"的问题,通常应是将运算后得到的结果化为集合中运算的特征形式加以判断.

例 4 设 A 为实数集合,且满足条件:若 $a \in A$,则$\dfrac{1}{1-a} \in A$, $1 \notin A$. 问:

A 能否是单元素集合?若能,则求出 A;若不能,请说明理由.

解 依题意 $\dfrac{1}{1-a}=a$,得$a^2-a+1=0$, 此方程无实数解,故 A 不可能是单元素集合.

例 5 已知集合 $M=\{x \mid x^2-2x+m=0, x \in \mathbf{R}\}$ 非空,则集合 M 中所有元素的和为________.

解 当 $m=1$ 时,集合 M 中只有唯一的元素 1;

当 $m \neq 1$ 时,集合 M 中有两个不同的元素 x_1、x_2,而 $x_1+x_2=2$. 所以,该集合中所有元素的和为 1 或 2.

解题指要 一般地,对于非空集合 $\{x \mid ax^2+bx+c=0, x \in \mathbf{R}\}$, 其中 $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则集合 A 中的元素之和有两种情形:(1) $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,和为 $-\dfrac{b}{2a}$;(2) $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,和为$-\dfrac{b}{a}$. 如果去掉 $a \neq 0$ 这个条件,还有一种情况

A 中元素之和为 $-\frac{c}{b}$. 注意分类讨论,思维要严密.

寻根问底

集合论的发展

早期数学的主要研究对象是“数”,因而被称为是“数学”. 人们一开始通过“数数”发现了自然数,接着通过实物分配等活动发现了分数,通过几何图形的测量和计算发现了无理数,又通过解方程得到了负数和复数. “数”的概念在不断地扩大,它离人们的经验和直觉也越来越远, 而且在扩大的数系中进行运算有时会得到看似荒谬和矛盾的结果. 因此直到 19 世纪,仍然有许多人(其中包括一些著名的数学家)否认负数、无理数和虚数的存在. 德国数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918)创立集合论的目的之一,就是要为实数(包括所有的有理数和无理数)理论提供一个可靠的逻辑基础. 康托尔说:“任意一个把明确的、彼此可区别的对象(感觉或思想)放在一起而形成的整体,就叫做集合”. 通过集合运算,可以导出完整的实数和复数理论, 还可以通过集合来定义许多抽象的复杂的数学结构. 因此在现代数学中,“集合”已成为主要的研究对象.

举一反三

1. 设集合 $A=\{x, y, x+y\}$, $B=\{0, x^2, xy\}$,且 $A=B$, 求实数 x、y 的值.

2. 设 P、Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in P, b\in Q\}$. 若 $P=\{0, 2, 5\}$, $Q=\{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是________.

3. 用列举法表示集合 $\left\{x \mid \frac{12}{6-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{N}\right\}$ 是________.

4 若 $m \in \mathbf{R}$, 则集合 $\{m, m^2+3m\}$ 中 m 的取值范围是________.

5 若集合 $A=\{x \mid ax^2+3x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$ 中最多只有一个元素,则实数 a 的取值范围是________.

融会贯通

6 下列四个集合中,表示空集的是(　　).

(A) $\{x \mid x+3=3\}$　　(B) $\{(x, y) \mid y^2=-x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$

(C) $\{x \mid x^2 \leqslant 0\}$　　(D) $\{x \mid x^2-x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$

7 若 $x \in \mathbf{Z}$, 则集合 $\{2, x, |x-2|\}$ 必须满足什么条件?

8 设 $f(x)=x^2+bx+c$, 集合 $A=\{x \mid f(x)=x\}$, $B=\{x \mid f(x-1)=x+1\}$, 若 $A=\{2\}$, 求集合 B.