工程問題中的偏微分方程

〔美〕K. S. 密勒著

上海科学技术出版社

工程問題中的偏微分方程

〔美〕K. S. 密勒著

張　致　中　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本書用实际的工程問題說明偏微分方程的求導和解法，書中所提各項边值問題都是数学物理和工程上的基本問題，对这些問題的分析，只着眼于問題本身的实际意义，而不涉及一般抽象理論，可以帮助讀者更便于掌握应用.

本書以富里衰級数及富里衰变換为解决偏微分方程的主要工具，并闡明了几种重要的特殊函数，如勒上特函数，貝塞尔函数等的意义、性質和用途.

本書可供高等学校理工科作教材，也可供一般工程技術人員、工程研究人員作参考

工程問題中的偏微分方程

Partial Differential Equations in Engineering Problems

原著者 〔美〕K. S. MILLER

原出版者 PRENTICE-HALL, Book Co. INC., 1953 年版

譯 者 張 致 中

*

上海科学技术出版社出版

（上海南京西路 2004 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总經售

*

开本 850×1168 1/32 印張 7 18/32 字数 176,000

（原科技版印 2,000 册 1957 年10月第 1 版）

1959 年 3 月新 1 版 1959 年10月第 2 次印刷

印数 1,001—2,000

統一书号：13119 · 101

定 价：（十七）1.50元

作者序

在本書中，我們計划在工程系同学能接受及能应用的水平上介紹偏微方程的問題。閱讀本書之先，只要求稍具常微方程的一些初步知識。本書整个內容以偏微方程的实际解法为主，至于存在性、唯一性及收斂性問題則僅偶或提及。我們覚得高年級或即將畢業的同学对这种問題的研究并不感到兴趣，而且这些問題与其說它能增加解說的明确性，倒不如說它会掩蓋掉一些基本方法來得更确当。不僅如此，由于我們所解釋的全部問題都以物理体系为基礎，故可以用物理学上的現象直观地証明解的存在，并可使我們在形式上所求得的函数，实际上就是眞正的解这一事实得到信任。

在第一章里，我們以典型的工程形式導出了一些与振动、热傳導、电学及彈性力学等現象有关的最普通的偏微方程。第二章說明富里哀級数的一些基本概念。这些概念当然有它們本身的用途，但从我們的观点來看，它們的主要价值就在于可用以解偏微分方程。在第三章中，我們运用第二章中闡明的富里哀分析方法來研究第一章中所導出的方程，并以分离变量法解出了若干个方程。某些問題，例如具有非周期函数的問題，不能用富里哀級数的方法求解，因而在第四章中，我們將富里哀方法推廣到富里哀積分，它可以帮助我們解出更廣泛的問題。由富里哀積分又引出解偏微方程的"变換法"。在第五章中，我們联系坐标系的变換，再討論分离变量法，从而引出了某些在实用上和理論上都很重要的常微方程，就是勒上特、貝塞尔、馬蒂安方程等。对于勒上特、貝塞尔、馬蒂安函数的各种基本性質的研究也必須加以考察。掌握了这些知識之后，我們就能夠用分离变量法來解產生这些特殊常微方程的偏微

方程了. 在这种样子的一本書中，研究一般理論的某些基本环節似乎是很適当的. 第六章可使同学們在微分算符的一般結構方面得到一些認識.

偏微方程的其他解法，如拉普拉斯变換及数値方法等在本書中幷未列入，以節篇幅，幷使本書的面不致太廣，而这些特殊方法，已有很多成功的作品可供参閲.

本書中的一部分材料是最近十年來 M. G. Salvadori 及 R. J. Schwarz 教授在哥倫比亞大学工学院及作者在紐約大学工学院的基本教材. 幷承 Salvadori 及 Schwarz 教授校閲了本書的原稿，提供了很多宝貴的意見，我的父親，W. A. Miller，曾为本書繪制了許多精美的插圖，均在此表示衷心的感謝.

K. S. M.

目　錄

1. 偏微方程的求導

1. 引言

偏微方程出現在許多物理問題中，正像常微方程的情形一样[25]❶，同一个方程，只要其变量及常数加以适当的解釋，就可表示很多互不相关的物理現象．在建立某些物理現象的偏微方程时，我們只限于一些基本方程，应用少量的工程專門知識．不过，本書的讀者应具有力学，热学，电学及流体力学的一定基礎．

本書中所導出的方程是無法包罗殆尽的，它們不过是些代表性的方程．本章的末尾列出了很多重要的方程，并列举了導出这些方程的参考書．这一类的方程需要各工程部門的更專門的知識．本書中所研究的一些方程可称为"数学物理的古典偏微方程"．这些方程都導成典型的工程形式，也就是說，物理和数量因素的要求甚于数学的嚴格性．

在本章(对于只須了解解法而不須了解方程導來的讀者，本章可不讀)后面緊接着在第二章中我們介紹了一种有力的工具，就是富里哀級数，利用这种工具，可使我們解出第一章中的某些方程．在第三章中，富里哀級数的方法可用以求得范圍較廣的物理問題的顯解．以后的几章对第二章所用工具的各种推廣作了介紹，这些方法是解一些比能夠用富里哀級数求解的方程更廣泛的类型的偏微方程时所必須的．

在这里有必要將微積分学中的一个公式提一下(見[24]，5.9節)，因为它在本章的各种推導中將要多次应用到．这一公式很容易从函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 的近傍展开为台劳級数中導出．展开式为

❶ 方括号內的数字指本書末所列参考書籍的号碼．

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(z-a)^3}{3!}+\cdots,$$

式中 $f'(a)$ 表示 $f(z)$ 对 z 的導数在点 $z=a$ 处的值，$f''(a)$ 是 $f(z)$ 对 z 的二階導数在点 $z=a$ 处的值，等等．如果，在上面的方程中置

$$z=a+h \text{ 与 } a=x,$$

則得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots.$$

在 h 的絕对值与 1 比較为很小的假設下，級数所含 h 的高次冪的項可以略去不計，因此可得第一次近似为

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h. \tag{1}$$

这就是說 $f(x)$ 在点 $x+h$（近于 x）处的值等于函数在点 x 处的值加上其一階導数在 x 处的值乘以这二点間的距离 $[(x+h)-x=h]$.

下面是(1)式的应用的一个典型例子．設函数 $u(x,y)$ 对 x 的偏導数，即 $\frac{\partial u}{\partial x}$，在点 x 处的值为已知．則 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在点 $x+dx$ 处的值由(1)式可給为：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x(x+dx-x), \tag{1'}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

下标 x 及 $x+dx$ 表示 $u(x,y)$ 对 x 的導数应分別在点 (x,y) 及 $(x+dx,y)$ 处計值．不过，下标 x 一般总是省略不寫的，我們在上例中用到它不过是为了着重指出一下而已．

2. 振动的弦

我們導出一振动的弦的微小横向位移所滿足的方程作为偏微方程的第一个例子．圖 1 所示的是一長为 L 的拉緊的弦，两端固

定，受一不变張力 T 的作用．我們的問題是要确定弦在不同初始条件下运动的方程，并求出一个函数 $u(x, t)$，表示弦在任何一点 x 及任一时刻 t 的偏轉．

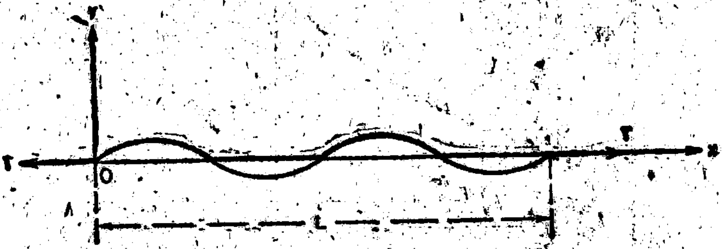

圖 1

为了能得出一个簡單的微分方程，我們將考察或多或少"理想化"的弦．任一物理的弦在适当假設下可使之極近似于"理想的弦"，因而由簡單方程中得出的函数 $u(x, t)$ 將可適当地表示出真实的位移．我們作下面的簡化假設：

1. 弦是完全柔順的，即它不能反抗弯曲力矩．

2. 弦的偏轉 u 与其長度 L 相較时很小．

3. 偏轉后弦在任一点上的斜率与 1 相較为数很小．

4. 任何时刻下及偏轉了的弦的任何一点上，張力 T 恒保持定值，并且比弦的重为大．

5. 弦上各質点的水平位移在与垂直位移比較下可以忽略不計，也就是說弦所作的是純粹的横向振动．

6. 运动只發生在 xy 平面內．

如果我們檢驗一下上面的六个假設，可知它們都是合理的、相容的．这就意味着承認所有上面这些假設的真实性并不会引起矛盾(一組不相容的假設的例子是假定位移 u 較弦長为大，但水平位移却很小)．

考察弦的一很小的微分段 ds (圖 2)，設 w 为弦的每單位長度的重量．从初等力学中可知，$\Sigma F = ma$；用語言来表达，就是作用

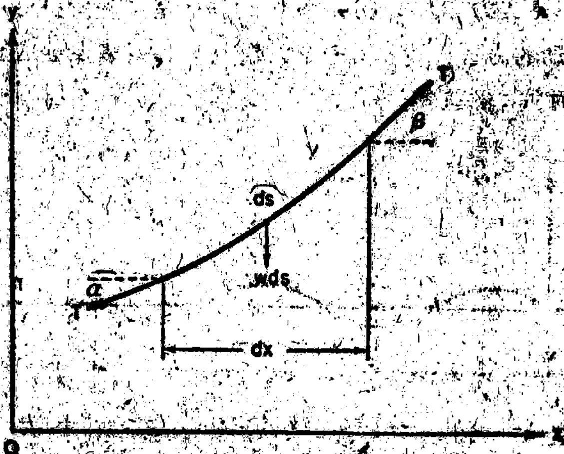

圖 2

于弦段上任一方向內的力的总和等于这段的質量乘以該方向內的加速度，特別是，在 y 方向內的力的总和为

$$\Sigma F_y=-T\sin\alpha+T\sin\beta-w\,ds.$$

由于偏轉很小，故我們可以 $\tan\alpha$ 及 $\tan\beta$ 分別代替 $\sin\alpha$ 及 $\sin\beta$. 又，根据第三点假設，$dy\ll dx$，在一級近似中 $ds=dx$①. 因而 y 方向內的力的总和可以寫为

$$\Sigma F_y=-T\tan\alpha+T\tan\beta-w\,dx.$$

偏轉了的弦在任一点 x 上的斜率根据微積分学可知为

$$\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},$$

由方程(1^*)可知，在一級近似中 $\tan\beta$ 为

$$\tan\beta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx②$$

因而 ΣF_y 为

① $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}\approx dx$ 当 $dy\ll dx$——譯者注

② $\tan\beta=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$——譯者注

$$\Sigma F_y = -T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - w\,dx = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx - w\,dx. \quad (2)$$

在 y 方向力的这一总和应等于質量 m 及 y 方向的加速度 a_y 的相乘積. 在 y 方向的加速度 a_y 是位移对时間的二階導数, 就是

$$a_y = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

因而

$$m a_y = \frac{w}{g}dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中 g 为重力常数. 根据牛頓运动第二定律, 从方程(2)及(3)可得

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx - w\,dx = \frac{w}{g}dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

或約去 dx 并乘以 g/w, 则得:

$$\frac{gT}{w}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4)$$

常数 gT/w 具有速度平方的因次, 通常寫作

$$\frac{gT}{w} = a^2,$$

其中 a 具有速度的因次. 又根据第四点假設, g 在与 $\partial^2 u/\partial t^2$ 比較时可以忽略不計, 方程(4)即得如下的标准形式

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

这就是振动弦的垂直运动 $u(x, t)$ 所满足的偏微方程. 也称为一維波动方程.

3. 边界条件

在用微分方程解物理問題的时候, 我們所重視的常是微分方程的解能夠满足一組給定的初始条件或边界条件. 在振动弦的情形下, 其边界条件不难确定为:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & u(0, t)=0, \\ 2. & u(L, t)=0, \\ 3. & \dfrac{\partial}{\partial t} u(x, 0)=g(x)^{①}, \\ 4. & u(x, 0)=f(x). \end{array}\right\} \tag{6}$$

第 1, 2 两个边界条件說明弦在整个考察时間 t 内，是固定于其两端点 $x=0$ 及 $x=L$ 的．第三个条件說明弦的横向初速度是 x 的一个已知函数，即 $g(x)$，而第四条件則表示振动弦的原来形狀(就是在 $t=0$ 时的形狀)是另一确定的函数 $f(x)$ [如 1, 2 两个边界条件被滿足，則 $f(0)=f(L)=0$].

与方程(6)联系的一个問題就是这些边界条件是否为必要的，也就是說，滿足微分方程和这四个边界条件的函数究竟有一个，或几个或許是一个函数都沒有．从物理学的論点来看，在我們的例題中至少应存在着唯一的一个解，这似乎是合理的，但在一般的情形下，边界条件究竟确定唯一的一个解，还是几个解，甚至一个解都沒有，这样的問題不能得出确切的答案．不过，在这一关系上有几点却值得注意．第一，我們不能从微分給定的边界条件来得出新的边界条件．例如，

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, 0)=f'(x) \text{ 或 } \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u(x, 0)=g'(x)$$

都不是另加的边界条件．第二，如弦上質点的初始位置 $f(x)$ 及其初速度 $g(x)$ 業已确定，則其加速度，即

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, 0)=\psi(x),$$

---

① $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)$ 表示 $u(x, t)$ 对 t 的偏導数在 $t=0$ 时的值．这一記法与普通導数(見第 1 篇)的記法是一致的，在普通導数記法中，$f'(a)$ 表示 $f(z)$ 对 z 的導数在 $z=a$ 时的值．其他多少是标准型的記法是

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\Big|_{t=0}, \quad u_t(x, t)\Big|_{t=0}, \quad u_t(x, 0)$$

及其对时間的較高階導数并不能确定. 因为$u(x, 0)$及$\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0)$一經确定,則其关于时間較高階的導数是由微分方程唯一确定的. 这种情况不难用初等常微分方程 $\ddot{x}+kx=0$ 的情形來說明. 在这个方程中,初始位置和速度一經确定, $x(0)=a$, $\dot{x}(0)=b$, 則从微分方程本身中可得: $\ddot{x}(0)=-ka$, $\dddot{x}(0)=-kb$, 等等. 如果我們單独地确定 $x(0)$, $\dot{x}(0)$ 及 $\ddot{x}(0)$, 則除了 $\ddot{x}(0)$ 碰巧选取 $-kx(0)$ 之外,方程將不能有解.

一个微分方程連同其边界条件組成了一个所謂微分系, 偏微方程的近代理論着重研究微分系,而不是孤立地研究微分方程. 在常微分方程的古典理論中,先求一个包含若干任意常数的通解,而后根据边界条件來确定这些常数, 这通常不是太难的工作. 但在偏微方程中,这样做是远較困难的,我們应該把每一个微分系作为一个新問題來处理,即使在不同的微分系中有完全相同的微分方程时也是如此. 研究微分系而不孤立地研究微分方程并不是一个太大的限制,因为倘使我們所求的解应具有物理意义,那末它就必須滿足某些边界条件.

总結上面所說,就是我們的問題將着重研究微分系,也就是着重研究边值問題, 我們將根据某种特定的边界条件來解特定的偏微分方程.

4. 振动的膜

作为第二个例子,我們來導出振动的膜的横向运动所滿足的方程. 这种二維的膜如圖 3 所示❶. 問題是建立一个放置在 xy 平面内的薄膜,其偏轉 $u(x, y, t)$ 所滿足的方程. 像在振动弦的情形中一样,应作出某些"理想化"的假設.

1. 每單位長度上的作用力 S 是常数且处处垂直于膜的边界.

❶ 圖上,作一个 × 号者表示 z-軸是由紙面向里的,而圖中有一点的(如在圖 4 中所画)表示 z-軸是由紙面向外的

2. 在膜的边界上的总力与膜的重量相比时很大.
3. 膜是很薄,因此它不能抵抗任何弯曲力矩.
4. 偏轉 w 与膜的横向尺度相比时很小.
5. 斜率要遠比 1 小.
6. 横向位移在与縱向位移相比时可略而不計.

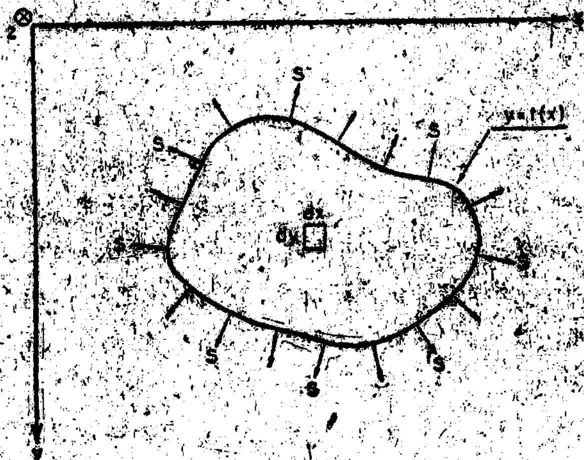

圖 3

讓我們來考察圖 3 所示的膜的一个面積为 $dx\,dy$ 的微分面元素,如果在一固定的时間 t 内,有一平行于 xz 平面的平面通过这一面元素,則面元素 $dx\,dy$ 的截面將成圖 4 所示的形狀. 同样如一平行于 yz 平面的平面通过时將產生圖 5 所示的截面. 假設 w 为膜每單位面積的重量而 S 为每單位長度的不变法向力,則在 z 方向内的力的总和 (ΣF_z) 为

$$\Sigma F_z = -S\,dy\tan\alpha + S\,dy\tan\beta - S\,dx\tan\gamma + S\,dx\tan\delta + w\,dx\,dy, \tag{7}$$

因为根据上面第 5 个假設,斜率远小于 1,因此 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$ 分別近似地等于 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$, $\tan\delta$[1].

---

[1] $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha$ 当 $\tan\alpha$ 很小——譯者註

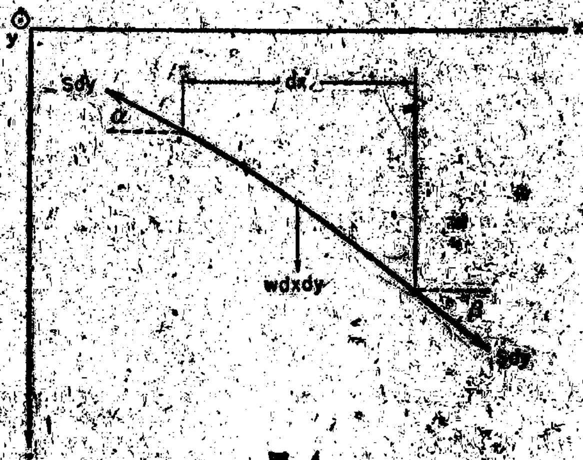

图 4

从微积分学可知

$$\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}\text{ 与 }\tan\gamma=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

又从方程(1*)可知

$$\tan\beta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,$$

$$\tan\delta=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy.$$

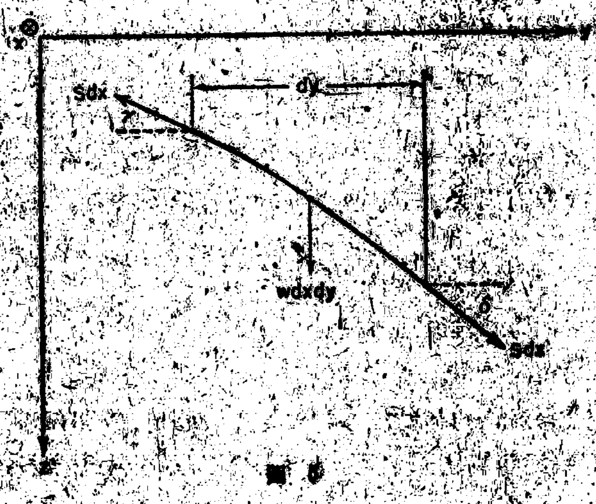

图 5