

16293

1301227

工程問題中的偏微分方程

[美] K. S. 密勒著

上海科学技术出版社

工程問題中的偏微分方程

[美] K. S. 密勒著

張致中譯

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本書用实际的工程問題說明偏微分方程的求導和解法，書中所提各項邊值問題都是数学物理和工程上的基本問題，對這些問題的分析，只着眼於問題本身的实际意义，而不涉及一般抽象理論，可以幫助讀者更便于掌握应用。

本書以富里哀級數及富里哀變換為解決偏微分方程的主要工具，并闡明了幾種重要的特殊函數，如勒上特函數、貝塞爾函數等的意义、性質和用途。

本書可供高等學校理工科作教材，也可供一般工程技術人員、工程研究人員作參考

工程問題中的偏微分方程

Partial Differential Equations in
Engineering Problems

原 著 者 [美] K. S. MILLER

原 出 版 者 PRENTICE-HALL, Book
Co. INC., 1953 年版

譯 者 張 致 中

*

上海科学技术出版社出版

(上海南京西路 2004 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总經售

*

开本 850×1168 1/32 印張 7 18/32 字數 176,000

(原科技版印 2,000 册 1957 年 10 月第 1 版)

1959 年 3 月新 1 版 1959 年 10 月第 2 次印刷

印數 1,001—2,000

統一書号: 13119 · 101

定 价: (十七)1.50 元

作者序

在本書中，我們計劃在工程系同學能接受及能應用的水平上介紹偏微方程的問題。閱讀本書之先，只要求稍具常微方程的一些初步知識。本書整個內容以偏微方程的實際解法為主，至於存在性、唯一性及收斂性問題則僅偶或提及。我們覺得高年級或即將畢業的同學對這種問題的研究並不感到興趣，而且這些問題與其說它能增加解說的明確性，倒不如說它會掩蓋掉一些基本方法來得更確當。不僅如此，由於我們所解釋的全部問題都以物理體系為基礎，故可以用物理學上的現象直觀地證明解的存在，並可使我們在形式上所求得的函數，實際上就是真正的解這一事實得到信任。

在第一章里，我們以典型的工程形式導出了一些與振動、熱傳導、電學及彈性力學等現象有關的最普通的偏微方程。第二章說明富里哀級數的一些基本概念。這些概念當然有它們本身的用途，但從我們的觀點來看，它們的主要價值就在於可用以解偏微分方程。在第三章中，我們運用第二章中闡明的富里哀分析方法來研究第一章中所導出的方程，並以分離變量法解出了若干個方程。某些問題，例如具有非周期函數的問題，不能用富里哀級數的方法求解，因而在第四章中，我們將富里哀方法推廣到富里哀積分，它可以幫助我們解出更廣泛的問題。由富里哀積分又引出解偏微方程的“變換法”。在第五章中，我們聯系坐標系的變換，再討論分離變量法，從而引出了某些在實用上和理論上都很重要的常微方程，就是勒上特、貝塞爾、馬蒂安方程等。對於勒上特、貝塞爾、馬蒂安函數的各種基本性質的研究也必須加以考察。掌握了這些知識之後，我們就能夠用分離變量法來解產生這些特殊常微方程的偏微

方程了。在這種樣子的一本書中，研究一般理論的某些基本環節似乎是很適當的。第六章可使同學們在微分算符的一般結構方面得到一些認識。

偏微方程的其他解法，如拉普拉斯變換及數值方法等在本書中並未列入，以節篇幅，并使本書的面不致太廣，而這些特殊方法，已有很多成功的作品可供參閱。

本書中的一部分材料是最近十年來 M. G. Salvadori 及 R. J. Schwarz 教授在哥倫比亞大學工學院及作者在紐約大學工學院的基本教材。并承 Salvadori 及 Schwarz 教授校閱了本書的原稿，提供了很多寶貴的意見，我的父親，W. A. Miller，曾為本書繪制了許多精美的插圖，均在此表示衷心的感謝。

K. S. M.

目 錄

作者序

1. 偏微分方程的導論.....	1	8. 偏微分方程.....	22
1. 引言.....	1	10. 熱傳導方程.....	25
2. 振動的類型.....	2	11. 連續性方程.....	27
3. 邊界條件.....	5	12. 在不可壓縮的流體中的	
4. 聯動的類型.....	7	潮汐波.....	29
5. 棒的縱向振動.....	11	13. 彈性波.....	32
6. 梁的橫向振動.....	14	14. 其他方程.....	34
7. 一維熱傳導方程.....	18	習題.....	37
8. 三維熱傳導方程.....	20		
2. 富里哀級數.....	41		
15. 引言.....	41	30. 在區間 $(-L, L)$ 內的富	
16. 幾個積分公式.....	42	里哀級數的例子.....	64
17. 系數的計算.....	43	31. 在區間 $(-L, L)$ 內的偶	
18. 摘要.....	45	函數與奇函數.....	65
19. 富里哀級數的例子.....	46	32. 區間 $(-L, L)$ 內的偶函	
20. 區間的變換.....	48	數與奇函數的例子.....	66
21. 變換區間的例子.....	50	33. 在區間 $(-L, L)$ 內函數	
22. 偶函數及奇函數.....	51	的開拓.....	67
23. 偶函數及奇函數展開式		34. 相角.....	69
的例子.....	54	35. 包含相角的富里哀級數	
24. 半富里哀區間.....	56	的例子.....	71
25. 偶函數或奇函數開拓法		36. 復項富里哀級數.....	71
的例子.....	57	37. 復項富里哀級數的例子.....	78
26. 間斷點.....	58	38. 二重三角級數.....	74
27. 三角近似式.....	59	39. 二重富里哀級數的例子.....	77
28. 三角恒等關係.....	62	40. 富里哀級數展開式中的	
29. 在區間 $(-L, L)$ 內的富		數學條件.....	78
里哀級數展開式.....	62	習題.....	79

3. 分离变量法.....	86		
41. 引言.....	86	布.....	108
42. 振动弦問題的解.....	86	51. 梁的橫向振动.....	108
43. 振动弦方程的解的另一形式.....	90	52. 振动的膜.....	111
44. 波动方程的一个例子.....	92	53. 非齐次方程.....	114
45. 平板上温度的分布.....	98	54. 具有放射衰變的熱傳導方程.....	116
46. 热傳導方程的例子.....	96	55. 一般情形.....	117
47. 輸電綫上的电压.....	97	56. 試探函数.....	118
48. 輸電綫方程的例子.....	99	57. 基于富里哀級數的試探函数法.....	119
49. 非齐次边界条件.....	99	習題.....	121
50. 半圓形平板中的溫度分			
4. 富里哀積分.....	129		
58. 热傳導問題.....	129	66. 富里哀變換的例子.....	141
59. 正弦和余弦交換.....	131	67. 富里哀變換的性質.....	145
60. 58節的解的繼續.....	134	68. 热傳導方程的變換.....	147
61. 对積分法的一个說明.....	135	69. 波动方程的變換.....	149
62. 58節的解的完成.....	137	70. 富里哀積分中的数学条件.....	151
63. 数值例子.....	137	習題.....	152
64. 無限長弦的振动.....	138		
65. 富里哀變換.....	140		
5. 勒上特函数、貝塞爾函数及馬蒂安函数.....	160		
71. 一些重要的偏微分方程.....	160	81. 貝塞爾方程的解.....	184
72. 勒上特方程.....	169	82. 貝塞爾函数的性質.....	185
73. 貝塞爾方程.....	163	83. 貝塞爾函数的正交性.....	188
74. 馬蒂安方程.....	164	84. 78節的解的完成.....	192
75. 正交函数.....	168	85. 馬蒂安方程的解.....	194
76. γ -函数.....	170	86. 馬蒂安函数的正交性.....	197
77. 勒上特方程的解.....	174	87. 74節的解的完成.....	198
78. 勒上特多項式的正交性.....	178	88. 統一原理.....	207
79. 勒上特多項式的母函数.....	180	習題.....	206
80. 72節解的完成.....	182		

6. 二階偏微方程的性質	213		
89. 引言	218	94. 双曲型齊次方程	221
90. 變量的變換	218	95. 拋物型方程	222
91. 典型形式	214	96. 橢圓型方程	223
92. 双典型方程	219	習題	224
93. 波動方程和柯西問題	219		
參考文獻	226		
索 引	228		

1. 偏微方程的求導

1. 引言

偏微方程出現在許多物理問題中，正像常微方程的情形一樣^[25]，同一个方程，只要其变量及常数加以适当的解釋，就可表示很多互不相關的物理現象。在建立某些物理現象的偏微方程時，我們只限于一些基本方程，應用少量的工程專門知識。不過，本書的讀者應具有力學，熱學，電學及流體力學的一定基礎。

本書中所導出的方程是無法包羅萬盡的，它們不過是些代表性的方程。本章的末尾列出了很多重要的方程，並列舉了導出這些方程的參考書。這一類的方程需要各工程部門的更專門的知識。本書中所研究的一些方程可稱為“數學物理的古典偏微方程”。這些方程都導成典型的工程形式，也就是說，物理和數量因素的要求基於數學的嚴格性。

在本章（對於只須了解解法而不須了解方法導來的讀者，本章可不讀）後面緊接着在第二章中我們介紹了一種有力的工具，就是富里哀級數，利用這種工具，可使我們解出第一章中的某些方程。在第三章中，富里哀級數的方法可用以求得範圍較廣的物理問題的顯解。以後的幾章對第二章所用工具的各种推廣作了介紹，這些方法是解一些比能夠用富里哀級數求解的方程更廣泛的類型的偏微方程時所必須的。

在這里有必要將微積分學中的一個公式提一下（見 [24]，5.9 節），因為它在本章的各种推導中將要多次應用到。這一公式很容易從函數 $f(x)$ 在點 $x=a$ 的近傍展開為台勞級數中導出。展開式為

● 方括號內的數字指本書末所列參考書籍的號碼

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a) \frac{(z-a)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(z-a)^3}{3!} + \dots$$

式中 $f'(a)$ 表示 $f(z)$ 对 z 的導数在点 $z=a$ 处的值, $f''(a)$ 是 $f(z)$ 对 z 的二階導数在点 $z=a$ 处的值, 等等。如果, 在上面的方程中置

$$z = a+h \text{ 与 } a=x,$$

則得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + f'''(x) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

在 h 的绝对值与 1 比較为很小的假設下, 級数所含 h 的高次幂的項可以略去不計, 因此可得第一次近似为

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h \quad (1)$$

这就是說 $f(x)$ 在点 $x+h$ (近于 x) 处的值等于函数在点 x 处的值加上其一階導数在 x 处的值乘以这二点間的距离 $[(x+h) - x = h]$ 。

下面是 (1) 式的应用的一个典型例子。設函数 $u(x, y)$ 对 x 的偏導数, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在点 x 处的值为已知。則 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在点 $x+dx$ 处的值由 (1) 式可給为:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x (x+dx - x) \quad (1')$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

下标 x 及 $x+dx$ 表示 $u(x, y)$ 对 x 的導数应分别在点 (x, y) 及 $(x+dx, y)$ 处計值。不过, 下标 x 一般总是省略不写的, 我們在上例中用到它不过是为了着重指出一下而已。

2. 振动的弦

我們導出一振动的弦的微小横向位移所滿足的方程作为偏微方程的第一个例子, 圖 1 所示的是一長为 L 的拉緊的弦, 兩端固

定,受一不變張力 T 的作用。我們的問題是要確定弦在不同初始條件下運動的方程,並求出一個函數 $u(x, t)$, 表示弦在任何一點 x 及任一時刻 t 的偏轉。

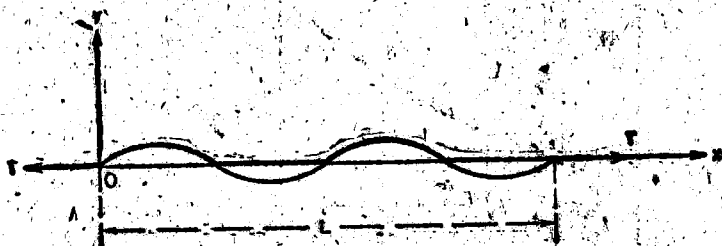


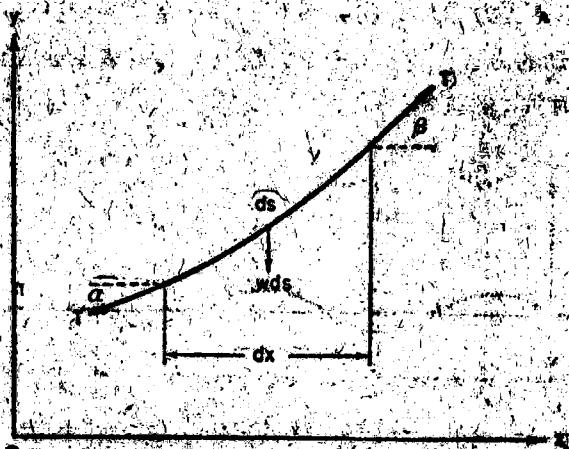
圖 1

為了能得出一個簡單的微分方程,我們將考察或多或少“理想化”的弦。任一物理的弦在適當假設下可使之趨近於“理想的弦”,因而由簡單方程中得出的函數 $u(x, t)$ 將可適當地表示出真實的位移。我們作下面的簡化假設:

1. 弦是完全柔順的,即它不能反抗彎曲力矩。
2. 弦的偏轉 u 與其長度 L 相較時很小。
3. 偏轉後弦在任一點上的斜率與 L 相較為數很小。
4. 任何時刻下及偏轉了的弦的任何一點上,張力 T 恒保持定值,並且比弦的重為大。
5. 弦上各質點的水平位移在與垂直位移比較下可以忽略不計,也就是說弦所作的是純粹的橫向振動。
6. 運動只發生在 xy 平面內。

如果我們檢驗一下上面的六個假設,可知它們都是合理的、相容的。這就意味着承認所有上面這些假設的真實性並不會引起矛盾(一組不相容的假設的例子是假定位移 u 較弦長為大,但水平位移却很小)。

考察弦的一很小的微分段 ds (圖 2), 設 w 為弦的每單位長度的重量。從初等力學中可知, $\Sigma F = ma$; 用語言來表達, 就是作用



于弦段上任一方向內的力的總和等於這段的质量乘以該方向內的加速度。特別是，在 y 方向內的力的總和為

$$\Sigma F_y = -T \sin \alpha + T \sin \beta - w ds.$$

由於偏轉很小，故我們可以 $\tan \alpha$ 及 $\tan \beta$ 分別代替 $\sin \alpha$ 及 $\sin \beta$ 。又，根據第三點假設， $dy \ll dx$ ，在一級近似中 $ds = dx$ 。因而 y 方向內的力的總和可以寫為

$$\Sigma F_y = -T \tan \alpha + T \tan \beta - w dx.$$

偏轉了的弦在任一點 x 上的斜率根據微積分學可知為

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

由方程(1)可知，在一級近似中 $\tan \beta$ 為

$$\tan \beta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

因而 ΣF_y 為

① $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx dx$ 當 $dy \ll dx$ —— 譯者注

② $\tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$ —— 譯者注

$$\Sigma F_y = -T \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - w dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - w dx, \quad (2)$$

在 y 方向力的这一总和应等于質量 m 及 y 方向的加速度 a_y 的相乘積。在 y 方向的加速度 a_y 是位移对时间的二階導数, 就是

$$a_y = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

因而

$$m a_y = \frac{w}{g} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中 g 为重力常数。根据牛頓运动第二定律, 从方程(2)及(3)可得

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - w dx = \frac{w}{g} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

或約去 dx 并乘以 g/w , 則得:

$$\frac{gT}{w} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4)$$

常数 gT/w 具有速度平方的因次, 通常寫作

$$\frac{gT}{w} = a^2,$$

其中 a 具有速度的因次。又根据第四点假設, g 在与 $\partial^2 u / \partial t^2$ 比較时可以忽略不計, 方程(4)即得如下的标准形式

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

这就是振动弦的垂直运动 $u(x, t)$ 所满足的偏微方程。也称为一維波动方程。

3. 边界条件

在用微分方程解物理問題的时候, 我們所重視的常是微分方程的解能夠滿足一組給定的初始条件或边界条件。在振动弦的情形下, 其边界条件不难确定为:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad u(0, t) &= 0, \\ 2. \quad u(L, t) &= 0, \\ 3. \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= g(x) \textcircled{1}, \\ 4. \quad u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

第 1, 2 两个边界条件說明弦在整个考察時間 t 內, 是固定于其兩端点 $x=0$ 及 $x=L$ 的. 第三个条件說明弦的橫向初速度是 x 的一个已知函数, 即 $g(x)$, 而第四个条件則表示振動弦的原来形狀 (就是在 $t=0$ 时的形狀) 是另一确定的函数 $f(x)$ [如 1, 2 两个边界条件被滿足, 則 $f(0) = f(L) = 0$].

与方程 (6) 联系的一个問題就是这些边界条件是否为必要的, 也就是說, 滿足微分方程和这四个边界条件的函数究竟有一个, 或几个或許是一个函数都沒有. 从物理学的論点來着, 在我們的例題中至少应存在着唯一的一个解, 这似乎是合理的, 但在一般的情形下, 边界条件究竟确定唯一的一个解, 还是几个解, 甚至一个解都沒有, 这样的問題不能得出确切的答案. 不过, 在这一关系上有几点却值得注意, 第一, 我們不能从微分給定的边界条件求得出新的边界条件. 例如,

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, 0) = f'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u(x, 0) = g'(x)$$

都不是另加的边界条件. 第二, 如弦上質点的初始位置 $f(x)$ 及其初速度 $g(x)$ 業已确定, 則其加速度, 即

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, 0) = \psi(x),$$

① $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)$ 表示 $u(x, t)$ 对 t 的偏導数在 $t=0$ 时的值. 这一記法与普通導数 (見第 1 章) 的記法是一致的. 在普通導数記法中, $f'(a)$ 表示 $f(x)$ 对 x 的導数在 $x=a$ 时的值. 其他多少是标准型的記法是

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{t=0}, \quad u_x(x, t) \Big|_{t=0}, \quad u_t(x, 0)$$

及其對時間的較高階導數並不能確定。因為 $u(x, 0)$ 及 $\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0)$ 一經確定，則其關於時間較高階的導數是由微分方程唯一確定的，這種情況不難用初等常微分方程 $\ddot{x} + kx = 0$ 的情形來說明。在這個方程中，初始位置和速度一經確定， $x(0) = a$ ， $\dot{x}(0) = b$ ，則從微分方程本身中可得： $\ddot{x}(0) = -ka$ ， $\ddot{x}(0) = -kb$ ，等等。如果我們單獨地確定 $x(0)$ ， $\dot{x}(0)$ 及 $\ddot{x}(0)$ ，則除了 $\ddot{x}(0)$ 碰巧選取 $-kx(0)$ 之外，方程將不能求解。

一個微分方程連同其邊界條件組成了一個所謂微分系，偏微方程的近代理論着重研究微分系，而不是孤立地研究微分方程。在常微分方程的古典理論中，先求一個包含若干任意常數的通解，而後根據邊界條件來確定這些常數，這通常不是太難的工作。但在偏微方程中，這樣做是遠較困難的，我們應該把每一個微分系作為一個新問題來處理，即使在不同的微分系中有完全相同的微分方程時也是如此。研究微分系而不孤立地研究微分方程並不是一個太大的限制，因為倘使我們所求的解應具有物理意義，那末它就必須滿足某些邊界條件。

總結上面所說，就是我們的問題將着重研究微分系，也就是着重研究邊值問題，我們將根據某種特定的邊界條件來解特定的偏微分方程。

4. 振動的膜

作為第二個例子，我們來導出振動的膜的橫向運動所滿足的方程。這種二維的膜如圖 8 所示^①。問題是建立一個放置在 xy 平面內的薄膜，其偏轉 $u(x, y, t)$ 所滿足的方程。像在振動弦的情形中一樣，應作出某些“理想化”的假設。

1. 每單位長度上的作用力 S 是常數且處處垂直於膜的邊界。

^① 圖上，作一個 \times 號者表示 z -軸是由紙面向里的，而圖中有一點的（如在圖 4 中所圖）表示 z -軸是由紙面向外的。

2. 在膜的边界上的总力与膜的重量相比时很大。
3. 膜是很薄, 因此它不能抵抗任何弯曲力矩。
4. 偏轉 α 与膜的横向尺度相比时很小。
5. 斜率要远比 1 小。
6. 横向位移在与纵向位移相比时可略而不計。

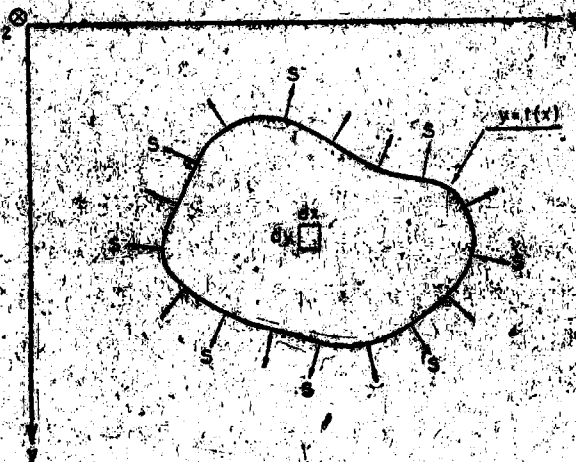


圖 3

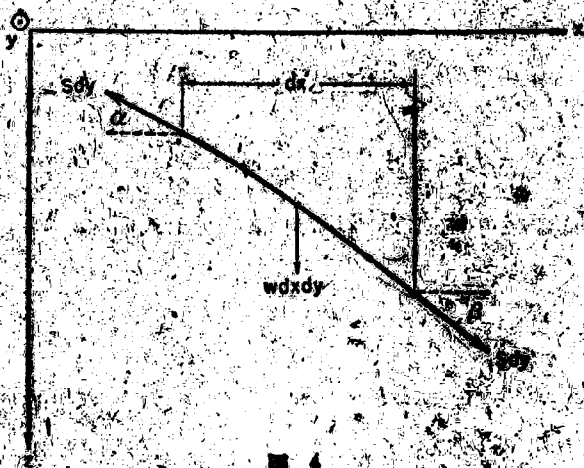
讓我們來考察圖 3 所示的膜的一個面積為 $dx dy$ 的微分面元素, 如果在一固定的時間 t 內, 有一平行於 xz 平面的平面通過這一面元素, 則面元素 $dx dy$ 的截面將成圖 4 所示的形狀。同樣如有一平行於 yz 平面的平面通過時將產生圖 5 所示的截面。假設 w 為膜每單位面積的重量而 S 為每單位長度的不變法向力, 則在 z 方向內的力矩總和 (ΣF_z) 為

$$\Sigma F_z = -S dy \tan \alpha + S dy \tan \beta - S dx \tan \gamma + S dx \tan \delta + w dx dy, \quad (2)$$

因為根據上面第 5 個假設, 斜率遠小於 1, 因此 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma, \sin \delta$ 分別近似地等於 $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma, \tan \delta$ 。

① $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha$ 當 $\tan \alpha$ 很小——讀者詳

1. 微分方程的求法



从微分方程可知

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ 与 } \tan \beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

又从方程(1*)可知

$$\tan \beta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

$$\tan \delta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

