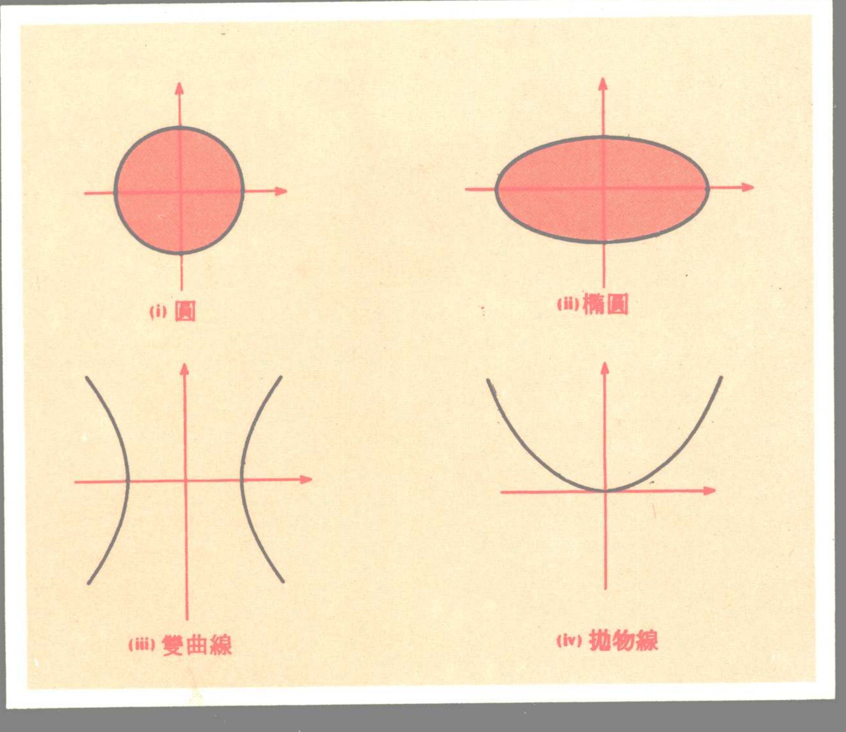
商管數學叢書之二

應用線性數學

Applied Linear Mathematics

原著者：F. S. Budnick
譯述者：王 文 盛



科技圖書股份有限公司

商管數學叢書之二

應用線性數學

Applied Linear Mathematics

原著者：F. S. Budnick
譯述者：王 文 盛

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書　　名：應用線性數學
原 著 者：F. S. Budnick
譯 述 者：王　文　威
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段49號四樓之一
電　話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號0015697-3

七十六年四月初版　　　特價新台幣150元

編輯者言

本書爲本公司出版的商管數學叢書第二種。依美國 Rhode 島大學教授 F. S. Budnick 所著的 Applied mathematics 中有關線性數學部分的六章改編而成，以介紹商經管理學院中應用數學教科書中最基本的線性數學部分爲主題。應用線性數學(Applied linear mathematics)是指求解具線性關係或可用線性近似關係的自然現象的數學方法，在商經管理課程上的應用極爲廣泛而益形重要。其中一部分是屬於最近發展的新方法與新知識。特將其彙集成書以資連貫而收實效。全書共收六章。舉凡有關應用線性數學的知識均已列入無遺。可使讀者在短期內學到新的法寶。希望讀書珍惜這份薄禮。

科技圖書公司編輯部

應用線性數學

目　　錄

第三章 線性函數與線性方程式組的應用

第四章 矩陣代數

第五章 線性規劃：概論

第六章 簡捷法

習題答案

第一章　線性方程式

本章主題

1.1　線性方程式組的特性
1.2　圖形特性
1.3　斜率－截矩式
1.4　決定直線的方程式
1.5　兩個變數以上的線性方程式組
1.6　外加應用
1.7　主要名詞與概念
1.8　重要公式
1.9　補充習題
1.10　章末測驗題

本章要旨

■對線性方程式組的代數及圖形特性提供徹底了解
■提供工具以決定代表線性關係的方程式
■說明線性方程式組的應用

在數學範疇中，可分成兩個主要類別；線性數學（linear mathematics）與非線性數學（nonlinear mathematics）。本書專將線性數學加以說明。本章首先討論線性方程式，並在以下五章接着討論。

線性數學爲很重要，因：

(1)　許多我們希望用數學表示的自然現象是線性的（linear），或具有可用線性關係來近似的。因此，線性數學的使用範圍廣泛。

(2)　某數學分析方法，例如求解，線性關係通常比非線性關係的分析容易。

(3)　非線性數學所用的方法，通常與線性數學方法類似。故了解線性數學，將有助於研究非線性數學。

1.1　線性方程式組的特性

[1]　一般形式

定義：

兩個變數的線性方程式：

具兩個變數 x 與 y 的線性方程式的標準式爲

$$ax + by = c \tag{1.1}$$

其中 a，b 與 c 均爲實數，a，b 不能同時爲零。

注意。在線性方程式中，每一變數的指數均爲 1。若指數爲非 1 的項出現（例如，x^2），則此式並非線性的。若有兩個變數的乘積項出現（例如，$2xy$），此式亦爲非線性的。

以下都是兩個變數的線性方程式例：

	式(1.1) 參數		
	a	b	c
$2x + 5y = -5$	2	5	-5
$-x + \frac{1}{2}y = 0$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$x/3 = 25$	$\frac{1}{3}$	0	25
(注意: $x/3 = \frac{1}{3}x$)			
$2s - 4t = -\frac{1}{2}$	2	-4	$-\frac{1}{2}$

（注意：變數的名稱可能與 x，y 不同）。

以下爲非線性方程式。你知道原因嗎？

$$2x + 3xy - 4y = 10$$
$$x + y^2 = 6$$
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$

爲求確知方程式的型式（是否線性），凡可寫成式(1.1)的型式，乃爲線性的。下列方程式

$$2x = \frac{5x - 2y}{4} + 10$$

也許使人一眼誤以爲非線性的。但將兩邊乘4再將所有變數移到左邊，可得 $3x + 2y = 40$，成爲式(1.1)的型式。

定義：

***n* 個變數的線性方程式：**

含 n 個變數 x_1，x_2，x_3，……x_n 的線性方程式的標準式爲

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdot\cdot\cdot + a_nx_n = b \tag{1.2}$$

其中 a_1，a_2，a_3，……a_n 與 b 爲實數，a_1，a_2，a_3……a_n 不全爲零。

我們將用較多時間討論兩個變數的方程式與數學函數。除了因爲較易演算，更重要的原因是，這些函數易畫成圖形以供參考。當超過兩個變數時，此式(1.2)可納入線性方程式的定義。

[2]　用線性方程式表示

已知一線性方程式型式爲 $ax + by = c$，式的解組（solution set），即指所有能滿足此式的 (x,y) 對。將解組 S 定義成

$$\boxed{S = \{(x, y)|ax + by = c\}} \tag{1.3}$$

此式說明解組 S 含有 (x,y) 對，能使 $ax+by=c$。對任何線性方程式，S 爲無限組（set），亦即有無限個 (x,y) 對值能滿足任何兩個變數的線性方程式。

決定任何能滿足線性方程式的對值時，對某一變數假設任何一值，代入式中，解得另一變數的對應值。

例題 1

已知方程式

$$2x + 4y = 16$$

(a) 求任何對值能滿足此方程式的。

(b) 求 $x=-2$，時能滿足方程式的解。

(c) 求 $y=0$ 時，能滿足方程式的解。

［解］

(a) 依說明步驟，可設 $x=0$，代入已知式，得

$$2(0) + 4y = 16$$

或

$$4y = 16$$

及

$$y = 4$$

故一組解爲 $x=0$，$y=4$，或 $(0,4)$。

(b) 將 $x=-2$ 代入式中，可得

$$2(-2) + 4y = 16$$
$$4y = 20$$

及

$$y = 5$$

當 $x=-2$，能滿足方程式的解爲 $x=-2$，$y=5$，或 $(-2,5)$。

(c) 將 $y=0$ 代入方程式

$$2x + 4(0) = 16$$
$$2x = 16$$

及

$$x = 8$$

當 $y=0$，一組解值爲 $(8,0)$。若 $S=\{(x,y)\mid 2x+4y=16\}$，可說

$$\{(0,4),(-2,5),(8,0)\}\subset S$$

例題 2

<u>生產混合</u>（product mix）：某公司生產兩種不同產品。在下週有 120 小時可生產此兩種產品。工時可任意分配。此外，因兩種產品獲利甚豐，所以希望將 120 小時全部用來生產。生產每一產品 A 需 3 小時，產品 B 需 2.5 小時。

(a) 寫出一方程式用來表示生產 x 個產品 A 與 y 個產品 B 的總工時爲 120。

(b) 若生產 30 個產品 B，可生產多少產品 A？

(c) 若只生產一種產品，產品 A 的最大生產量爲何？產品 B 呢？

［解］

(a) 可將變數分別定義如下：

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \text{產品}A\text{的生產數} \\ y &= \text{產品}B\text{的生產數} \end{aligned}}$$

所求方程式的結構如下：

$$\boxed{\text{生產產品}A\text{與}B\text{的總時數}=120} \tag{1.4}$$

所需要的是等號左邊的式。

［注意］ 是否記得心算模式（mental model）？對左邊也許已有心算模式。只要知其型式，並予表示。若每種產品只生產 1 個需多少小時？2 個呢？10 個產品 A 與 20 個產品 B 呢？看

x 與 y 的定義，並回答這些問題的模式。

在式 (1.4) 左邊的結構中，最後將式展開成：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{生產產品}A\\\text{的總時數}\end{array} + \begin{array}{c}\text{生產產品}B\\\text{的總時數}\end{array} = 120} \tag{1.5}$$

因生產任一種產品的總時數等於生產每一個的時間乘上產量。式 (1.5) 等於

$$\boxed{3x + 2.5y = 120} \tag{1.6}$$

是否與你答案一樣？

(b) 若生產 30 個產品 B，則 $y = 30$。因此得

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(30) &= 120 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \text{ 個} \end{aligned}$$

式 (1.6) 的一組解爲 (15，30)，亦即充分利用 120 小時，可生產 15 個 A 與 30 個 B。

(c) 若只生產 A 不生產 B，則 $y = 0$。若 $y = 0$，則

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(0) &= 120 \\ 3x &= 120 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

故使用 120 小時，產品 A 的最大生產量爲 40。

若只生產 B，則 $x = 0$，得

$$3(0) + 2.5y = 120$$

或

$$y = 48 \text{ 個}$$

例題 3

我們曾說，能滿足任何線性方程式的 (x, y) 值有無限多對。在例題 2 中，是否有任何解值是無意義的？

[解]

在例題 2 中，x 與 y 代表兩種產品的產量。因負數產量是不可能的，故 x 與 y 的負值均無意義。有能滿足式 (1.5) 的負值。例如，若 $y = 60$，則

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(60) &= 120 \\ 3x &= -30 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

除負值外，x 與 y 值也可能爲小數或分數。例如若 $y = 40$

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(40) &= 120 \\ 3x &= 20 \\ x &= 6\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

能滿足式 (1.6) 爲 x，y 的非負值 (nonnegative)，非整數值 (tegral) 對生產量是無意義的。

思考討論要點：

找出生產型問題，並且只有整數值才有意義的例，或找出一個例，非整數值也是合理的。

[3]　歸納 n 個變數的線性方程式

已知一線性方程式有 n 個變數，如式 (1.2)。解組 S 可敍述爲

$$\boxed{S = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b\}} \tag{1.7}$$

同樣，解組中有無限個元素（ element ）。S 中的一個元素可用（ x_1 ，x_2 ，x_3 ，……，x_n ）表示。得知 S 個元素的方法之一是，假定變數的 $n-1$ 個值，代入式解得其餘的變數值。

例題 4

已知方程式

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 16$$

(a)　求能滿足方程式的一組解。

(b)　當 $x_1 = 2$ ，$x_2 = -1$ ，$x_3 = 0$ 時，能滿足方程式的值為何？

(c)　當 4 個變數中三個為零時，求所有解組。

[解]

(a)　假設 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ，並代入方程式，求 x_4 值

$$2(1) + 3(1) - (1) + x_4 = 16$$

或
$$x_4 = 12$$

故一組解值為 $x_1 = 1$ ，$x_2 = 1$ ，$x_3 = 1$ ，與 $x_4 = 12$ 或（ 1，1，1，12 ）。

(b)　將已知各值代入方程式中

$$2(2) + 3(-1) - (0) + x_4 = 16$$

或
$$x_4 = 15$$

相對應解組的元素為（ 2，−1，0，15 ）。

(c)　若 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ，則

$$2(0) + 3(0) - (0) + x_4 = 16$$

或
$$x_4 = 16$$

若 $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$$2(0) + 3(0) - x_3 + 0 = 16$$

或
$$x_3 = -16$$

若 $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ ，則

$$2(0) + 3x_2 - 0 + 0 = 16$$

或

$$3x_2 = 16$$

及

$$x_2 = \tfrac{16}{3}$$

若 $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$$2x_1 + 3(0) - 0 + 0 = 16$$

或

$$2x_1 = 16$$

及

$$x_1 = 8$$

因此，解組的所有元素爲（0，0，0，16），（0，0，−16，0），（0，$\frac{16}{3}$，0，0），（8，0，0，0）。

---

[4]　1.1節習題

決定那些是線性方程式

1 $4y - 11x = 0$

2 $3y = 4x^2 - x/2$

3 $3y = 1$

4 $\sqrt{2}x + y/2 = 10$

5 $3y^2 = x + 10$

6 $25 + x = \sqrt{5}$

7 $x = 2$

8 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$

9 $(x + y)/3 - y/2 = 5x - y$

10 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)/2 = x_6$

11　用集合記號敍述方程式 $3x + 7y = 21$ 的解組 S 的元素。

12　用集合記號敍述方程式 $4a + 5b = -10$ 的解組 P 的元素。

13　已知方程式 $3x + 4y = 20$，(a)求一對解能滿足該式，(b)當 $y = -4$ 時，其一對解爲何？當 $x = 0$ 呢？當 $y = 0$ 呢？

14　考慮方程式 $5x = 75$ 爲兩變數式，具式（1.1）的型式。

(a)求 a，b 與 c。

(b)當 $y = 12$ 時一對解爲何？

(c)當 $x = 20$ 時一對解爲何？

(d)能否歸納一條敍述，說明屬於方程式解組的 x 與 y 值的性質？

15　重做例題2。若生產每個產品 A 需4小時，產品 B 需2小時。

16 已知方程式 $5x_1-2x_2+6x_3=0$，

(a)當 $x_1=2$，$x_3=1$ 時，何值能滿足方程式？

(b)當兩個變數爲零時，求解組的元素。

17 已知方程式 $2x_1-2x_2-6x_3-4x_4=32$

(a)求能滿足方程式的一組 x_1，x_2，x_3，x_4 值。

(b)當 $x_1=0$，$x_3=1$，$x_4=-2$ 時，能滿足的解組爲何？

(c)當三個變數爲零時，求解組的所有元素。

18 式 $x_4=20$ 是有關 4 個變數 x_1，x_2，x_3，x_4 的相關方程式組的一個。

(a)決定能滿足方程式的一組（x_1，x_2，x_3，x_4）值。

(b)當 $x_1=4$，$x_2=2$，$x_3=10$ 時，能滿足方程式的值爲何？

(c)當 $x_4=10$ 時，能滿足方程式的值爲何？

(d)當 3 個變數等於零時，求解組的所有元素。

19 某公司生產兩種產品，A 與 B，生產每一個產品 A 需 4 小時，產品 B 需 5 小時。每天工作量是 120 小時。

(a)若使用所有的工作時數，每天可生產 x 個產品 A 與 y 個產品 B。求表示此關係的適當線性方程式。

(b)若每天生產 8 個產品 B，問每天可生產多少個產品 A？

(c)若每天生產 16 個產品 B，每週可生產多少產品 A？（假設一週工作 5 天）。

1.2 圖形特性

[1] 畫兩個變數方程式的圖

兩個變數的線性方程式，在二維（two dimensions）圖形爲直線。因此，只要(1)決定線上任何兩點的座標，(2)用直線連接此兩點，(3)將此直線向兩端延長到所需即得。找出解組中任何兩