概率论与数理统计

邝英强 编

南理工大学出版社

概率论与数理统计

（修订版）

邝英强　编

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是为高等院校的工业企业管理专业大专及成人教育而编写的，介绍了概率与数理统计的基本知识。本书内容理论联系实际，深入浅出，书末附有习题答案和附表，便于自学。

〔粤〕新登字12号

概率论与数理统计

（修订版）

邝英强 编

责任编辑 张巧巧

*

华南理工大学出版社出版发行

（广州 五山）

广东省新华书店经销

华南理工大学印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张:7.125 字数:160千

1985年12月第1版 1991年12月第2版第2次印刷

印数：10 000——15 000

ISBN 7—5623—0313—4/O·29

定价：4.60元

前　言

概率论与数理统计这门学科，应用相当广泛，目前几乎遍及所有科学领域：工农业生产和国民经济的各个部门之中。因此，不仅在各高等院校中讲授，而且在新编的中学教学大纲中也增加了这门学科的初步知识，这也就说明它已得到各方面的重视了。

本书是为工业企业管理专科或成人教育的管理数学课程而编写的，希望读者通过学习获得一些基础知识。但由于远距离教育是一种新的学习方式，且时间较紧，又限于编者水平，可能有不少缺点和错误，请读者予以批评指正。

曾文中

编 辑 说 明

“管理工程系列教材”是本社为适应多层次、多种形式办学需要，针对高等学校工科管理工程专业教学要求而编辑出版的试用教材。这些书，均结合考虑大专要求和成人教育的特点，由具有较高学术水平和丰富教学经验的教授编写或审稿。其特点是，内容上理论联系实际，释疑解难，深入浅出，并附有思考题，习题或实验实习指导，便于自学。除适合普通高校教育外，还适用于成人高等教育的各种形式（干部专修班、函授、刊授、电大、夜大、业余大等）的教学需要。

“管理工程系列教材”的种类和出版的时间是：

1. 《概率论与数理统计》，邝英强编，1985年初版，1991年修订再版。

2. 《运筹学》，郭月心主编，1985年初版，1987年修订再版。

3. 《预测学》，李业编，1986年初版，1988年修订再版

4. 《工业经济学》，叶春生主编，1988初版，1990年修订重版。

5. 《经济法教程》，罗荣、黄南平主编，1987年初版，1991年第四版。

6. 《经济法教程参考文献》，罗荣、黄南平编，1988年初版，1991年第四版。

7. 《工业会计简明教程》，江兰标等编，1989年初版，1990年重版。

8. 《工业企业财务管理》，江兰标主编，1991 年 7 月初版。

9. 《技术经济学》，周裕新主编，1988 年初版，1991 年第 4 次修订重版。

10. 《经营管理学》，厉以京等编，1987年初版，1990 年第 4 次修订重版。

11. 《生产管理学》，许统邦主编，1988年初版，1991 年修订重版。

12. 《技术与质量管理》，宋光贵等编，1988年初版，1992年修订再版。

13. 《统计方法与质量管理》，〔日〕久米均主编，涂其栵译，1989年出版。

14. 《现代管理科学基础》，叶春生主编，1988 年初版，1991年修订重版。

15. 《工作研究—现代科学管理技术》，范忠志主编，1990年初版，1991年修订重版。

编辑出版这个学科的系列试用教材，对我们来说，是一个新的尝试，恳切地希望广大读者和师生能提出宝贵意见。

华南理工大学出版社

一九九一年十月

目　　录

第一章 随机事件与随机事件的概率

第一节 排列与组合

一、排列

什么叫排列？所谓排列是指从n个不同元素里任取m个元素出来按一定的顺序排成一列。对于所有不同的排列的种数，用记号P_n^m表示。

注：本书约定，无特别声明的抽取m个元素是指无放回抽取，即抽一个出来，不放回去再抽第二个，又不放回去，再抽第三个……也可以理解为一次取出m个。

为了找出P_n^m的计算公式，先介绍乘法原理：若a有m种不同取法，b有n种不同取法，则(a, b)有mn种不同取法。这可以从下面得到。

设a的不同取法为$a_1, a_2, \cdots, a_m$，b的不同取法为$b_1, b_2, \cdots, b_n$，则(a, b)有如下mn种不同取法：

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \cdots, & (a_1, b_n) \\
(a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \cdots, & (a_2, b_n) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
(a_m, b_1), & (a_m, b_2), & \cdots, & (a_m, b_n)
\end{array}
$$

再介绍一个以后常用的加法原理：若a有m种不同取法，b有n种不同取法（n种取法与m种取法互不相同），则a或b有$m+n$种不同取法。

乘法原理与加法原理是人们对社会实践的总结，上面介绍的两种情形，可以推广到三种的情形，甚至K种的情形。它们的主要区别是乘法原理的方法有先后、步骤之分，完成这件工作要各步骤都做完；而加法原理的方法是并列的，用哪种方法都可以完成这件工作。

例如一幢楼从第一层到第二层有3道楼梯，从第二层到第三层有2道楼梯；另从第一层到第三层有一道电梯。一个人要从第一层到第三层，共有$3\times2+1=7$种不同走法。其中走楼梯有先后步骤之分，用乘法原理。坐电梯与走楼梯是并列的，用加法原理。

现在求P_n^m的计算公式。从n个不同元素里任取m个元素排成一列，则第一个位置有n种不同取法，第二个位置有$n-1$种不同取法（因第一个位置已有一个元素），同理第三个位置有$n-2$种不同取法，……依此类推，第m个位置有$n-m+1$种不同取法。按照乘法原理，所求的排列种数P_n^m是

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

位置号	1	2	3	……	$m-1$	m
取法数	n	$n-1$	$n-2$	……	……	$n-m+1$

如令$\gamma!$表示$\gamma\cdot(\gamma-1)\cdot(\gamma-2)\cdots\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$，则$P_n^m$又可表为：

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}{1}$$

$$\frac{(n-m)(n-m-1)}{(n-m)(n-m-1)}\cdot\frac{\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

若规定 $0!=1$，则上式当$m=n$时也能成立。

因此，当$0<m\leqslant n$时，从n个不同元素任取m个元素排成一列的所有种数为

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

例 1 从 8 个不同元素中任取 3 个 排成一列，试计算所有的排列种数。

解 所求的排列种数为

$$P_8^3=8\times 7\times 6=336$$

例 2 有颜色不同的六面旗帜，用一面或多面组成每一纵列表示一种信号。问可以表示多少种不同信号？

解 从六面旗帜取一面组成一纵列有 P_6^1 种，

从六面旗帜取二面组成一纵列有 P_6^2 种，

从六面旗帜取三面组成一纵列有 P_6^3 种，

从六面旗帜取四面组成一纵列有 P_6^4 种，

从六面旗帜取五面组成一纵列有 P_6^5 种，

从六面旗帜取六面组成一纵列有 P_6^6 种，

故总共可以表示信号种数为：

$$P_6^1+P_6^2+P_6^3+P_6^4+P_6^5+P_6^6=6+30+120+360+720+720=1956\text{（种）}.$$

要注意的是，以上的排列是元素不可重复的。如果元素是可以重复的，那么如何计算呢？即是从n个不同元素里有放回地（任取一个，然后放回去，再取一个，又放回去，……）取m次，得到的不同排列共有多少种？

显然，在这种情况下排列种数为

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots\cdots \cdot n}_{m\text{个}} = n^m$$

例 3 广州市的电话号码是由七个数字组成，问广州市的电话共能容纳多少个用户？（假定一个号码一个用户）

解 所求的用户总数是10^7（个）。

二、组合

什么叫组合？所谓组合是从n个不同元素里任取m个出来，不管怎样的顺序并成一组。所有不同的组合的个数叫组合数，并用符号C_n^m表示。

排列与组合的区别在于：从n个不同元素里任取m个出来，这m个元素是组合就不用考虑次序，而排列则要考虑次序。从上可以推出组合的计算公式：从n个不同元素里任取m个出来进行排列，它可以分为两步进行。第一步从n个不同元素里任取m个出来，第二步将m个不同元素排成一列。第一步种数为C_n^m，第二步种数为P_m^m，根据乘法原理，

得
$$P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m$$

即

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

因此，从n个不同元素里任取m个的组合数计算公式是

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

例 4 分配 5 个人的工种，要 3 个人开车床，2 个人当钳工，问有几种分配方案？

解 因为不是开车床，就是当钳工，故定下当钳工的人，方案就定了，所以分配方案种数是

$$C_5^2=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}=10\text{（种）}$$

例5 从10件产品（假定它们互不相同）中任抽3件检验，问

（1）一共有多少种不同的抽法？

（2）如果10件产品中有2件次品，抽取3件中恰好有1件次品的抽法有多少种？

（3）如果10件产品中有2件次品，抽取3件中至少有1件次品的抽法有多少种？

解 （1）所求的不同抽法种数为

$$C_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!\,3!}=120$$

（2）从2件次品中抽1件有C_2^1种抽法，从8件正品中抽2件有C_8^2种抽法，根据乘法原理，得

$$C_2^1C_8^2=2\times 28=56$$

（3）至少有一件次品，即有一件次品或有两件次品，根据（2）问的解法，故共有抽法

$$C_2^1C_8^2+C_2^2C_8^1=2\times 28+1\times 8=64$$

第二节 随机试验与随机事件

在科学管理中，我们经常作一些试验，下面是一些具体例子：

例1 从次品率为p的一批产品中，一件接一件地接连

抽取 n 件（抽得一件产品后，立即放回去，再抽下一件），多次做这样的试验，各次取得的 n 件产品中次品的件数不一定相同。每次取得的次品的件数是 0、1、2、……n 中的一个数。

例2 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。每次测试结果是（0，∞）中的一个数。

例3 站在某地向上抛掷一枚硬币，多次做这样的试验。每次结果不一定相同，是"正面朝上"与"反面朝上"之一。

上面举出的例子有着共同的特点，就是：

（1）试验可以在相同条件下重复地进行。

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先知道试验的所有可能结果。

（3）每次试验之前不能确定哪个结果会出现。

今后，我们称具有上述三个特点的试验为随机试验，简称为试验。

随机试验的结果称为随机事件。其中，随机试验中必然发生的事情又称必然事件，不可能发生的事情称为不可能事件。当然，必然事件与不可能事件按理来说不是随机事件，但为方便起见，我们也称它们为随机事件。如例 1 中每次取得的次品件数为n件是一随机事件，每次取得的次品件数小于或等于n件是一必然事件，每次取得的次品件数大于 n 是一不可能事件，但我们都称它们为随机事件。今后，用A、B、C 等表示随机事件，用 U 表示必然事件，用 ϕ 表示不可能事件。

在随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件。它们是这个试验的最简单的随机事件，我们称这些

简单的随机事件为基本事件。基本事件的全体我们称为基本空间，记为U。如例1中，若用i表示每次取得的次品件数，并当成一个基本事件，则例1的基本空间$U=\{0,1,\cdots\cdots n\}$。其中每个基本事件一般地不等可能出现。

例4 有5个签(e_1，e_2，e_3，e_4，e_5)，从中任取一个，求基本空间U。

解 把从5个签中任取一个当成一个基本事件，则全体事件是$U=\{e_1，e_2，e_3，e_4，e_5\}$。

例5 有3件产品(e_1，e_2，e_3)，从中任抽2件检验，求基本空间U。

解1 设想抽2件出来排成一列当成一个基本事件，则全体基本事件是$U=\{(e_1,e_2)，(e_1，e_3)，(e_2，e_3)，(e_2，e_1)，(e_3，e_1)，(e_3，e_2)\}$。

解2 设想抽2件出来放在一堆(也即无先后之分)当成一个基本事件，则全体基本事件是$U=\{(e_1，e_2)，(e_1，e_3)，(e_2，e_3)\}$。

从例5的解法可知，基本事件的定义不同，则会得出不同的基本空间。从建立基本空间这点来说它们都对，但从建立基本空间来解决某些问题时，就有的基本空间简单，有的复杂；有的可行，有的不可行。故此，我们可从简单并为解决某一问题可行出发来定义基本事件，建立基本空间。

第三节 随机事件的关系及运算

随机事件今后简称为事件。在实际中，有些事件比较简单，我们可以用一个字母来表示它；但有些事件是比较复杂的，这就要求我们用一些简单的事件来表示它。因此，研究

事件之间的关系及运算是必要的。

例如从一批产品中一件接一件地抽取产品检验。“第一次抽到次品”是一个事件，这个事件可以用A表示。“第二次抽到正品”是一个事件，这个事件可以用B表示。“第二次才抽到正品”是一个事件，这个事件可以用C表示。我们仔细分析一下事件C，它表示“第二次才抽到正品”，也即表示“第一次抽到次品，第二次抽到正品”。这说明事件C与事件A、事件B是有一定的关系的。这个关系如何表示？一般地事件之间的关系及运算有下列几种：

一、子事件

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A是事件B的子事件。记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作事件A包含于事件B或事件B包含事件A，也可读作事件A是事件B的子事件。

例如：验收某一圆柱形产品时，要求长度合格及直径合格才算一个产品合格。那么不论“直径不合格”或“长度不合格”都导致“产品不合格”，所以“直径不合格”或“长度不合格”都是“产品不合格”的子事件。

若以A表示“直径不合格”这件事，B表示“产品不合格”这件事，则以上事实可记为$A\subset B$。

为方便起见，我们规定：对于任一事件A，有$\phi\subset A$，即不可能事件是任一事件的子事件。另对任一事件A，有$A\subset U$，即任一事件是必然事件的子事件。事件的包含关系见图 1-1。

今后，我们称两事件相等是指它们相互包含的。这是很自然的事实。两事件中第一个事件包含第二个事件，而第二个事件又包含第一个事件，这两个事件当然相等。记事件A

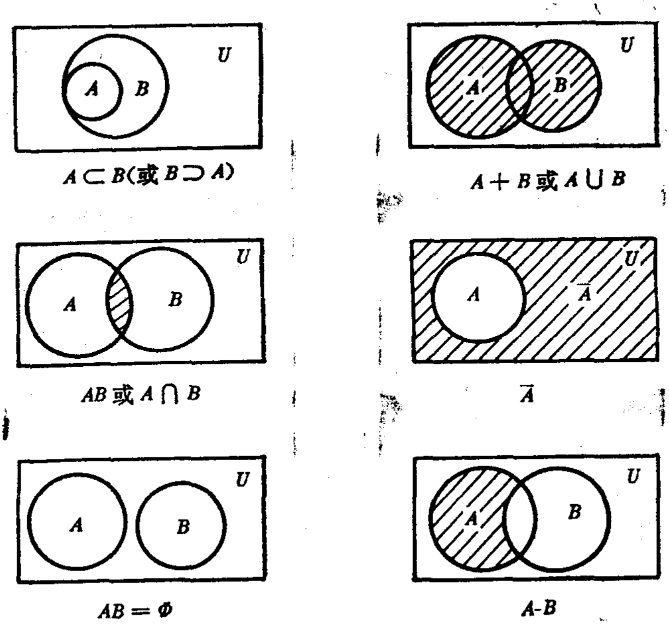

图1-1

注：有阴影部分为它们运算后的结果。

与事件B相等为$A=B$。

二、和事件

如果事件C的发生就是事件A发生或事件B发生，我们就称事件C为事件A与事件B的和事件。记作$C=A+B$或$C=A\cup B$。读作事件C等于事件A与事件B的和。

例如：“直径不合格”与“长度不合格”这两件事的和便是事件“产品不合格”。

若以A表示“直径不合格”这件事，B表示“长度不合格”这件事，C表示“产品不合格”这件事，则以上事实可