高中数学

GAOZHONG SHUXUE

基础型问题（下）

奚定华　陈嘉驹　主编

上海教育出版社

高中数学基础型问题(下)

奚定华　陈嘉驹　主编

上海教育出版社

高中数学基础型问题（下）

奚定华　陈嘉驹　主编

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路 123 号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　太仓市印刷厂有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 10.5

2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷

印数 1–2,500 本

ISBN 978-7-5444-2095-2/O·0078　定价：19.00 元

前 言

《高中数学基础型问题》是《高中数学解题基本方法》和《高中数学能力型问题》的姊妹篇，这三本书都是为了提高高中学生的数学解题能力而编写的. 提高数学解题能力有三个要素：一是牢固掌握数学基础知识和基本技能；二是熟练掌握数学解题的基本方法；三是提高数学探究和创新能力. 这三本书就是围绕着这三个要素而编写的.

《高中数学基础型问题》是三本书中的第一本，编写的目的是让读者通过学习本书，掌握数学基础型问题的解法，巩固和掌握数学基础知识和基本技能，为进一步掌握数学解题方法和提高数学思维能力、运算能力、空间想象能力、探究能力、应用能力和创新能力奠定基础.

《高中数学解题基本方法》是为了让读者掌握数学解题的基本方法. 但是这本书与其他数学解题方法的书不同，它不是笼统地介绍各种数学解题方法，而是将高中数学知识和数学方法密切联系起来，分别介绍复数、函数、数列、三角、立体几何和解析几何等各种数学知识中的解题基本方法，使读者能根据数学问题涉及的数学知识，有针对性地选择具体的解题方法，提高解题的水平和效率.

《高中数学能力型问题》对学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力等四种能力型问题的特点和解题策略进行了深入的阐述和剖析，使读者通过学习，不仅能很好地掌握这些新题型问题的解法，而且能提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力.

高中数学基础型问题内容丰富、面广量大，如何才能牢固、熟练地掌握它们呢？这是学习高中数学基础型问题时必须解决的问题. 为此，本书采取以下的做法：

1. 抓住基本类型

高中数学每一章都包含很多基础型问题，但是它们绝对不是杂乱无章的，而是有一定的结构和规律可循的. 实际上，每一章的数学基础知识和基本技能，都对应几种基本类型的基础型问题，这些基本类型的问题具体体现了这一章的数学基础知识和基本技能. 掌握了其中每一种基本类型问题的解法，就可以基本上掌握这一章的数学基础知识和基本技能. 本书通过对每一章的数学基础知识和基本技能的仔细分析和研究，提出了相应的基础问题型的基本类型.

2. 掌握解题规律

本书对于每一种类型的数学基础型问题都注意抓住其本质，并结合典型例题总结每一种类型问题的基本解题方法、解题规律、解题步骤和必须注意的事项. 力图让读者通过本书的阅读和练习，系统地掌握数学基础型问题的基本类型和基本解题规律，从而牢固地掌握数学基础知识和基本技能，进一步提高分析问题和解决问题的能力.

3. 进行适度训练

要掌握高中数学基础型问题的解法，除了掌握解题规律以外，进行适度的训练还

是非常必要的.因此,本书在每一章都配备了相应的基础训练题供练习之用,读者可以根据自己的实际情况选用其中的一部分或全部.同时每一章(除了第十、十一章外)还配备了数学高考中相应的基础型问题,也可供练习使用.

本书可以满足高中各年级学生学习数学的需要,既可供高中学生在上新课学习相应的章节时使用,也可供高三学生全面复习时使用(书中打 * 的例题涉及后面的知识,在学习新课时可暂不使用).

本书由奚定华、陈嘉驹主编,朱永庆、卜照泽、陈长恩、文卫星、李广学、谌开华、罗静、郭玫、郝莉莉、金红卫、宋林荣、唐仁兴、姚建新、王志和、徐辉、沈建国等参加编写,文卫星进行了初步的梳理,最后由奚定华修改和统稿.本书编写过程中得到了上海市七宝中学和上海市奉贤中学领导的大力支持,在此深表感谢.

由于编者水平有限,又加上时间比较仓促,书中可能会有一些错误和问题,请读者阅后批评指正,以便在再版时予以修正.

编　者

2008 年 9 月

目 录

下 册

第十二章　直线和线性规划

一、直线和线性规划中的基础型问题

（一）直线

1. 直线方程

典型例题

例 1　已知点 $A(1,-2)$，$B(4,-4)$，求过点 $P(0,-5)$ 且与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的直线 l 的点方向式方程.

解　由已知得 $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$.

因为直线 l 经过 $P(0,-5)$，所以直线 l 的点方向式方程为 $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{-2}$.

例 2　已知点 $M(a,3)$ 在经过点 $A(4,6)$ 和 $B(-3,-1)$ 的直线 l 上，求 a 的值.

解　因为直线 l 经过 A、B 两点，可知它的一个方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(-7,-7)$，所以直线 l 的点方向式方程为 $\frac{x-4}{-7}=\frac{y-6}{-7}$.

因为点 $M(a,3)$ 在直线 l 上，所以 $\frac{a-4}{-7}=\frac{3-6}{-7}$. 解得 $a=1$.

例 3　已知原点在直线 l 上的射影为点 $N(2,-3)$，求直线 l 的方程.

解　由已知，$\overrightarrow{ON}=(2,-3)$ 是直线 l 的法向量.

又 l 过点 N，所以直线 l 的方程为 $2(x-2)-3(y+3)=0$，即 $2x-3y-13=0$.

例 4　求过点 $(-1,2)$ 且以直线 $2x+3y-7=0$ 的法向量为其方向向量的直线方程的一般式.

解　$\vec{n}=(2,3)$ 是直线 $2x+3y-7=0$ 的一个法向量，过点 $(-1,2)$ 且以 $\vec{n}=(2,3)$ 为方向向量的直线方程为 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$，其一般式为 $3x-2y+7=0$.

例 5　求满足下列条件的直线 l 的方程：

(1) 倾斜角为 $\arccos 1$，与 y 轴的交点离原点的距离为 2；

(2) 过点 $P(-1,2)$，且倾斜角为直线 $x-2y-3=0$ 的倾斜角的两倍.

解　(1) 因为直线的倾斜角 $\alpha=\arccos 1$，且 $\alpha\in[0,\pi)$，所以 $\alpha=0$.

由已知得直线与 y 轴的交点为 $(0,2)$ 或 $(0,-2)$.

因此，直线 l 的方程为 $y=2$ 或 $y=-2$.

(2) 设直线 $x-2y-3=0$ 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$，且 $2\alpha\in(0,\pi)$，所以直线 l 的斜率 $k=\dfrac{4}{3}$.

因此，直线 l 的方程为 $y+1=\dfrac{4}{3}(x-2)$，即 $4x-3y-11=0$.

例 6 求与直线 $2x+3y+5=0$ 有相同法向量，且在 x 轴上的截距为 -3 的直线方程.

解 因为 $\vec{n}=(2,3)$ 是直线 $2x+3y+5=0$ 的一个法向量，所以可设所求直线方程为 $2x+3y+c=0$，它在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{c}{2}$.

由 $-\dfrac{c}{2}=-3$，得 $c=6$，

因此，所求直线方程为 $2x+3y+6=0$.

例 7 如图 12-1，已知点 $A(2,3)$，$B(6,6)$ 是正方形 $ABCD$ 的两个顶点，试求正方形四边所在的直线方程.

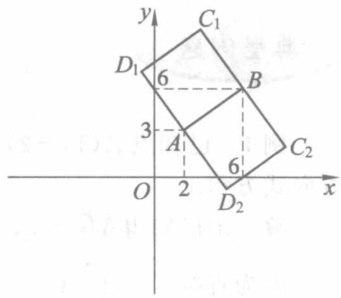

图 12-1

解 设点 $D(x_0,y_0)$，又 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，则 $(x_0-2,y_0-3)\cdot(4,3)=0$ 即

$$4(x_0-2)+3(y_0-3)=0, \qquad ①$$

$$|AB|=\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-3)^2}=5. \qquad ②$$

由①、②，解得 $\begin{cases}x_0=5,\\y_0=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-1,\\y_0=7.\end{cases}$

所以，点 D 的坐标为 $(5,-1)$ 或 $(-1,7)$.

因为 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$，所以 AB 所在直线方程为 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{3}$，即 $3x-4y+6=0$.

又 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$ 是直线 AD 的法向量，故 AD 所在直线方程为

$$4(x-2)+3(y-3)=0\text{，即 }4x+3y-17=0.$$

同理，BC 所在直线方程为 $4(x-6)+3(y-6)=0$，即 $4x+3y-42=0$.

因为 DC 与 AB 所在直线有相同的方向向量，所以 DC 所在直线方程为

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y+1}{3}\text{ 或 }\frac{x+1}{4}=\frac{y-7}{3},$$

即

$$3x-4y-19=0\text{ 或 }3x-4y+31=0.$$

解题规律

1. 直线方程有下面几种常用形式：

(1) 点方向式方程 $\dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v}$.

其中 $\vec{d}=(u,v)$ 是直线的方向向量，且 $u\neq0$，$v\neq0$. 当 $u=0$ 时，直线方程为 $x-x_0=0$；当 $v=0$ 时，直线方程为 $y-y_0=0$.

(2) 点法向式方程 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

其中 $\vec{n}=(a,b)$ 为直线的法向量.

(3) 一般式方程 $Ax+By+C=0$.

其中 A、B 不全为零.

(4) 点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$.

当直线不垂直于 x 轴时,斜率为 k;当直线垂直于 x 轴时,直线方程为 $x=x_0$.

2. 求直线方程的方法:

(1) 直接法.

① 根据题目的条件选择直线方程的形式.

② 求出这种形式的直线方程的两个条件,将它们代入这个方程,即可得所求直线方程.

如例 3,直线的法向量$\overrightarrow{ON}$容易求出,就选择直线的法向式方程. 又已知直线过点 N,代入点 N 的坐标,即可求出结果.

(2) 待定系数法.

① 设方程:根据题意设出含有未知系数的直线方程.

② 求系数:由已知条件列出含有未知系数的方程(或方程组),解方程(或方程组),求出未知系数.

③ 代入:将求得的系数代入所设直线方程,即可求得所求的直线方程.

如例 6,直接求直线的法向式方程有困难,可采用待定系数法.

2. 直线的倾斜角和斜率

典型例题

例 1 已知$\triangle ABC$的三个顶点是 $A(-1,2)$, $B(5,4)$, $C(2,6)$,分别求这个三角形的三条中线所在的直线的斜率和倾斜角.

解 设 D 是 BC 边上的中点,则点 D 的坐标是 $\left(\frac{7}{2},5\right)$,于是直线 AD 的斜率 $k_1=\dfrac{5-2}{\frac{7}{2}-(-1)}=\dfrac{2}{3}$,倾斜角 $\alpha=\arctan\dfrac{2}{3}$.

设 E 是 CA 边上的中点,则点 E 的坐标是 $\left(\frac{1}{2},4\right)$,于是直线 BE 的斜率$k_2=\dfrac{4-4}{\frac{1}{2}-5}=0$,倾斜角 $\alpha=0$.

设 F 是 AB 边上的中点,则点 F 的坐标是$(2,3)$. 由于点 C 的横坐标也是 2,因此直线 CF 的斜率不存在,倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

例 2 已知 $\alpha\in(0,\pi)$,则直线 $y=x\cdot\cot\alpha+5$ 的倾斜角为________.

解 设直线 $y=x\cdot\cot\alpha+5$ 的倾斜角为 θ,则 $\tan\theta=\cot\alpha$.

因为 $\cot\alpha=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$,所以 $\tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

可得 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha, k\in\mathbf{Z}$. 又 $\alpha\in(0,\pi)$, $\theta\in(0,\pi)$,所以

当 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$；

当 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\theta=\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$；

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，$\theta=0$.

例 3 已知直线 l 与向量 $\vec{a}=(12,-10)$平行，求直线 l 的倾斜角和斜率.

解 因为向量 $\vec{a}=(12,-10)$是直线的方向向量，所以直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{10}{12}=-\dfrac{5}{6}$，倾斜角 $\alpha=\pi-\arctan\dfrac{5}{6}$.

例 4 直线 $x\cdot\cos\alpha-y+1=0(\alpha\in\mathbf{R})$的倾斜角的取值范围是__________.

解 设直线 $y=x\cdot\cos\alpha+1(\alpha\in\mathbf{R})$的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=\cos\alpha$.

因为 $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$，所以 $-1\leqslant\tan\theta\leqslant1$.

即 $\tan\theta\in[0,1]\cup[-1,0)$，因此 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$.

例 5 已知直线 l 过点 $P(1,1)$，且与以点 $A(-2,-3)$，$B(3,0)$为端点的线段相交，求直线 l 的斜率的取值范围.

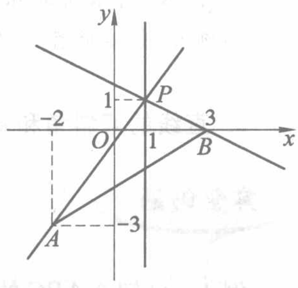

图 12-2

解 如图 12-2，直线 PA、PB 的斜率分别为

$$k_{PA}=\frac{1-(-3)}{1-(-2)}=\frac{4}{3},k_{PB}=\frac{1-0}{1-3}=-\frac{1}{2}.$$

直线 l 与线段 AB 有交点$\Leftrightarrow k\leqslant k_{PB}$或 $k\geqslant k_{PA}$，即

$$k\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right).$$

又直线 $x=1$ 过 $P(1,1)$且与线段 AB 有交点，但该直线的斜率不存在.

因此，直线 l 的斜率的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

例 6 过点 $P(2,1)$的直线 l 与 x 轴、y 轴正方向交于点 A、B，O 为坐标原点，分别根据以下条件求直线 l 的方程：

(1) 点 P 是 AB 的中点；

(2) $S_{\triangle AOB}=6$；

(3) $|OA|+|OB|$最小；

(4) $|PA|\cdot|PB|$最小.

解 (1) 显然过点 P 且斜率不存在的直线不满足条件.

设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，其中 $k<0$，从而得 $A\left(2-\dfrac{1}{k},0\right)$，$B(0,1-2k)$.

又因为点 P 是 AB 的中点，所以满足$\begin{cases}\dfrac{2-\dfrac{1}{k}+0}{2}=2,\\ \dfrac{0+1-2k}{2}=1.\end{cases}$ 解得 $k=-\dfrac{1}{2}$.

因此，所求直线方程为 $x+2y-4=0$.

(2) $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\left|2-\frac{1}{k}\right|\cdot|1-2k|$.

因为 $k<0$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot(1-2k)=6$. 解得 $k=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$.

因此,所求直线方程为

$$x+(4+2\sqrt{3})y-(6+2\sqrt{3})=0 \text{ 或 } x+(4-2\sqrt{3})y-(6-2\sqrt{3})=0.$$

(3) 因为 $|OA|+|OB|=\left|2-\frac{1}{k}\right|+|1-2k|$, $k<0$,所以

$|OA|+|OB|=\left(2-\frac{1}{k}\right)+(1-2k)=-2k-\frac{1}{k}+3\geqslant2\sqrt{2}+3$,

当且仅当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$|OA|+|OB|$ 最小.

因此,所求直线方程为 $x+\sqrt{2}y-2-\sqrt{2}=0$.

(4) 设 $\angle ABO=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $|PA|=\frac{1}{\sin\alpha}$, $|PB|=\frac{2}{\cos\alpha}$.

∴ $|PA|\cdot|PB|=\frac{2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{4}{\sin2\alpha}$. 由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,知 $0<2\alpha<\pi$.

因此,当 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时,$|PA|\cdot|PB|$ 最小,此时直线 l 的斜率为 -1,方程为 $x+y-3=0$.

解题规律

1. 求直线斜率的方法

(1) 如果已知直线的倾斜角 $\alpha(\alpha\in[0,\pi))$,那么当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时,斜率 $k=\tan\alpha$;当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,斜率 k 不存在.

(2) 如果已知直线经过两个定点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,那么当 $x_1\neq x_2$ 时,斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$;当 $x_1=x_2$ 时,斜率 k 不存在. 如例 1.

(3) 如果已知直线的方向向量 $\vec{d}=(u,v)$,那么当 $u\neq0$ 时,斜率 $k=\frac{v}{u}$;当 $u=0$ 时,斜率 k 不存在.

(4) 如果已知直线的法向量 $\vec{n}=(a,b)$,那么当 $b\neq0$ 时,斜率 $k=-\frac{a}{b}$;当 $b=0$ 时,斜率 k 不存在. 如例 3.

2. 对于求直线斜率的取值范围问题,通常可以借助图形直观,先求出临界情况下的直线斜率,再根据斜率的变化规律给出答案.

例 5 就是应用数形结合法求解的. 这个例子的一般情况是:如果直线 l 经过点 $P(a,b)$,与线段 AB 有公共点,其中 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,求直线 l 的斜率的取值范围.

如果过 P 的直线 $x=a$ 和线段 AB 有公共点($a\neq x_1$ 且 $a\neq x_2$),那么

$k\in(-\infty,k_{PA}]\cup[k_{PB},+\infty)$（其中 $k_{PA}<k_{PB}$，下同）；如果过 P 的直线 $x=a$ 和线段 AB 无公共点，那么 $k\in[k_{PA},k_{PB}]$.

3. 求直线倾斜角的方法

如果直线斜率 k 的值已知或者可以求出来，那么倾斜角 α 就可以利用斜率和倾斜角的关系 $\tan\alpha=k$ 来求. 当 $k>0$ 时，$\alpha=\arctan k$ 是锐角；当 $k=0$ 时，$\alpha=0$；当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi+\arctan k$ 是钝角. 结论的一般形式为 $\alpha=\begin{cases}\arctan k & (k\geqslant 0),\\ \pi+\arctan k & (k<0).\end{cases}$ 如例 1、例 2、例 3.

如果直线垂直于 x 轴（斜率 k 不存在），那么倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 判断两直线相交、平行与重合

典型例题

例 1 根据下列条件，写出直线的一般式方程：

(1) 经过直线 $2y-4=0$ 与 $2x-5y+6=0$ 的交点，且经过原点；

(2) 经过直线 $x-2y+2=0$ 与 $2x-y-2=0$ 的交点，且与直线 $3x+y-1=0$ 平行.

解 (1) 解方程组 $\begin{cases}2y-4=0,\\ 2x-5y+6=0,\end{cases}$ 得两直线的交点(2,2).

又直线经过原点(0,0)，故直线的一个方向向量为(2,2)，所求直线方程为

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{2}\text{，即 } x-y=0.$$

(2) 解方程组 $\begin{cases}x-2y+2=0,\\ 2x-y-2=0,\end{cases}$ 得两直线的交点(2,2).

又直线与 $3x+y-1=0$ 平行，故所求直线方程为

$$y-2=-3(x-2)\text{，即 } 3x+y-8=0.$$

例 2 已知直线 $l_1:5x+5my+6=0$，$l_2:(m-2)x+15y+2m=0$，问当 m 为何值时 l_1 与 l_2：(1) 相交；(2) 平行；(3) 重合.

解 联立方程组 $\begin{cases}5x+5my+6=0,\\ (m-2)x+15y+2m=0.\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}5 & 5m\\ (m-2) & 15\end{vmatrix}=-5(m+3)(m-5),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-6 & 5m\\ -2m & 15\end{vmatrix}=10(m+3)(m-3),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}5 & -6\\ m-2 & -2m\end{vmatrix}=-4(m+3).$$

(1) 当 $m\neq-3$，$m\neq5$ 时，$D\neq0$，直线 l_1 与 l_2 相交；

(2) 当 $m=5$ 时，$D=0$，$D_x\neq0$，$D_y\neq0$，直线 l_1 与 l_2 平行；

(3) 当 $m=-3$ 时，$D=0$，$D_x=0$，$D_y=0$，直线 l_1 与 l_2 重合.

例 3 已知三条直线 $l_1:x-y-2=0$，$l_2:x-ky-3=0$，$l_3:kx-y-4=0$ 交于一

点，求 k 的值.

解 由 l_1 与 l_2 交于一点，可知方程组

$$\begin{cases}x-y-2=0,\\x-ky-3=0\end{cases}$$

有唯一解. 此时 $k\neq-1$，方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{2k-3}{k-1},\\y=-\dfrac{1}{k-1}.\end{cases}$$

即直线 l_1 与 l_2 交点的坐标为 $\left(\dfrac{2k-3}{k-1},-\dfrac{1}{k-1}\right)$.

$\because$ l_1,l_2,l_3 交于一点，

$\therefore$ l_1,l_2 的交点在 l_3 上.

$\therefore$ $k\cdot\dfrac{2k-3}{k-1}-\left(-\dfrac{1}{k-1}\right)-4=0,2k^2-7k+5=0.$

解得 $k=\dfrac{5}{2}$ 或 $k=1$（舍去）. 因此 $k=\dfrac{5}{2}$.

解题规律

1. 求两条直线交点的坐标可以转化为求两条直线的方程组成的方程组的解.

2. 已知两直线 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0,l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$，要判断两直线的位置关系，可以判断这两个方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

的系数构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix},D_x=\begin{vmatrix}-c_1&b_1\\-c_2&b_2\end{vmatrix},D_y=\begin{vmatrix}a_1&-c_1\\a_2&-c_2\end{vmatrix}$$

的值是否等于 0.

(1) 当 $D\neq0$ 时，直线 l_1 与 l_2 相交，交点坐标为 $\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)$.

(2) 当 $D=0,D_x\neq0$ 或 $D_y\neq0$ 时，直线 l_1 与 l_2 平行.

(3) 当 $D=D_x=D_y=0$ 时，直线 l_1 与 l_2 重合.

3. 有关三条直线共点的问题一般分以下两步进行：

(1) 求出其中两条直线交点的坐标；

(2) 将所得交点坐标代入第三条直线方程.

4. 两条直线的夹角

典型例题

例 1 求下列两条直线的夹角 α：

(1) $l_1: x-\sqrt{3}y+1=0, l_2: \sqrt{3}x+3y-5=0$;

(2) $l_1: x+2=0, l_2: 2x+4y+3=0$;

(3) $l_1: 2y+3=0, l_2: x-3y-2=0$.

解 (1) $\cos\alpha=\dfrac{|1\times\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times 3|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,即 l_1、l_2 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $\cos\alpha=\dfrac{|1\times 2+0\times 4|}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$l_1$、$l_2$ 的夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) $\cos\alpha=\dfrac{|0\times 1+2\times(-3)|}{\sqrt{0^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,$l_1$、$l_2$ 的夹角为 $\arccos\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

例 2 已知直线 $l_1: mx-2y+3=0$ 与 $l_2: 3x-my-5=0$ 的夹角是 45°,求实数 m 的值.

解 $\cos 45^\circ=\dfrac{|3m+2m|}{\sqrt{m^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-m)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=\pm 1$ 或 $m=\pm 6$.

例 3 如果直线 l_1 的方程是 $x+y\sqrt{1-\cos\theta}+b=0$,直线 l_2 的方程是 $x\cdot\sin\theta+y\sqrt{1+\cos\theta}-a=0$,$\theta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,那么直线 l_1 与 l_2 的位置关系是(　　).

(A) 平行　　(B) 垂直　　(C) 平行或垂直　　(D) 相交但不垂直

解 因为 $\theta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,且

$$1\cdot\sin\theta+\sqrt{1-\cos\theta}\cdot\sqrt{1+\cos\theta}=\sin\theta+|\sin\theta|=\sin\theta-\sin\theta=0,$$

所以 l_1 与 l_2 互相垂直.故选(B).

例 4 若 $A(2,1)$,$B(6,1)$,$C(5,5)$是$\triangle ABC$ 的三个顶点.

(1) 求$\triangle ABC$ 中$\angle A$ 的大小;

(2) 求$\angle A$ 的平分线所在直线的方程.

解 (1) 由已知得$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\overrightarrow{AC}=(3,4)$,则

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{12}{4\times 5}=\frac{3}{5},\text{所以}\angle A=\arccos\frac{3}{5}.$$

(2) 与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$同方向的单位向量依次为$\vec{a}_1=(1,0)$,$\vec{a}_2=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$,

所以$\angle A$ 平分线上的单位向量 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

由直线的点方向式方程,得$\angle A$ 平分线所在直线的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{8}{5}}=\frac{y-1}{\frac{4}{5}},\text{即 } x-2y=0.$$

例 5 已知等腰三角形 ABC 的顶点 $A(2,-1)$,$\angle B=\arccos\dfrac{4}{5}$,底边 BC 所在直线的方程是 $2x-4y+5=0$,求两腰所在直线的方程.

解 设腰所在直线的方程为 $ax+by+c=0$,又已知点 $A(2,-1)$在该直线上,得

$2a-b+c=0$，腰与 BC 的夹角分别为$\angle B$、$\angle C$，$\angle B=\angle C=\arccos\dfrac{4}{5}$.

由两直线的夹角公式，得$\dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{20}}=\dfrac{4}{5}$，即$\sqrt{5}|a-2b|=4\sqrt{a^2+b^2}$.

由$\begin{cases}2a-b+c=0,\\ \sqrt{5}|a-2b|=4\sqrt{a^2+b^2},\end{cases}$解得 $a=-2b$ 或 $a=\dfrac{2}{11}b$.

由 a、b 不同时为零，可知 $b\neq0$.

当 $a=-2b$ 时，$c=5b$，腰所在直线的方程为$-2bx+by+5b=0$，即 $2x-y-5=0$；

当 $a=\dfrac{2}{11}b$ 时，$c=\dfrac{7}{11}b$，腰所在直线的方程为$\dfrac{2}{11}bx+by+\dfrac{7}{11}b=0$，即 $2x+11y+7=0$.

所以，两腰所在直线的方程分别为 $2x-y-5=0$ 与 $2x+11y+7=0$.

解题规律

1. 两条直线夹角的范围是 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，其中，$\alpha=0$ 时，两直线平行或者重合；$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，两直线斜交；$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，两直线互相垂直.

2. 设坐标平面上的两条直线

$$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$$

的夹角为 α，那么

$$\cos\alpha=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

特别地，当 $a_1a_2+b_1b_2=0$ 时，$l_1\perp l_2$.

设 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1、k_2，

当 $k_1k_2\neq-1$ 时，$\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$；当 $k_1k_2=-1$ 时，$l_1\perp l_2$.

3. 已知两条直线的方程，求它们的夹角，可以直接将它们的系数代入两条直线的夹角公式进行计算，如例 1. 如果已知两条直线的夹角和其中一条直线的方程，常常利用待定系数法求解，如例 5. 在用待定系数法设直线方程时，可根据题目的条件选用适当的直线方程. 如例 5，已知腰所在直线过点 $A(2,-1)$，可以设一般式方程，如上面的解法，也可以设点法向式方程 $a(x-2)+b(y+1)=0$，还也可以设点斜式方程$y+1=k(x-2)$，但在使用点斜式方程时，要考虑斜率是否存在.

5. 求点到直线的距离

典型例题

例 1 求点 $P(-1,2)$到下列直线的距离：

(1) $2x+y-10=0$； (2) $3x=2$.

解 (1) 根据点到直线的距离公式,得 $d=\frac{|2\times(-1)+1\times2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$.

(2) 因为直线 $3x=2$ 平行于 y 轴,所以 $d=\left|\frac{2}{3}-(-1)\right|=\frac{5}{3}$.

例 2 已知直线 l 经过两条直线 $3x+4y-5=0$ 和 $2x-3y+8=0$ 的交点,且与点 $A(2,3)$、$B(-4,5)$ 的距离相等,求直线 l 的方程.

解 解方程组 $\begin{cases}3x+4y-5=0,\\2x-3y+8=0,\end{cases}$ 得直线 $3x+4y-5=0$ 和 $2x-3y+8=0$ 的交点 $(-1,2)$.

设直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$ 或 $x=-1$.

当方程为 $x=-1$ 时,点 $A(2,3)$ 到直线 l 的距离为 $|2-(-1)|=3$,点 $B(-4,5)$ 到直线 l 的距离为 $|-4-(-1)|=3$,满足条件;

当方程为 $y-2=k(x+1)$,即 $kx-y+k+2=0$ 时,由 $\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$,解得 $k=-\frac{1}{3}$,此时直线 l 的方程为 $x+3y-5=0$.

综上所述,直线 l 的方程为 $x=-1$ 或 $x+3y-5=0$.

例 3 已知直线 $3x+2y+m=0$ 与 $6x+m^2y+4=0$ 平行,求两直线之间的距离.

解 由两直线平行,得 $\frac{3}{6}=\frac{2}{m^2}\neq\frac{m}{4}$. 解得 $m=-2$.

所以,两直线方程分别为 $3x+2y-2=0$ 与 $3x+2y+2=0$.

因此,两直线之间的距离 $d=\frac{|-2-2|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

例 4 两平行直线 l_1 与 l_2 分别过点 $P_1(1,0)$ 和 $P_2(0,5)$,若 l_1 与 l_2 的距离是 5,求这两直线的方程.

解 当两平行直线 l_1、l_2 的斜率不存在时,l_1 与 l_2 的方程分别为 $x=1$,$x=0$,l_1 与 l_2 的距离是 1,不满足题意.

当两平行直线 l_1、l_2 的斜率 k 存在时,l_1 与 l_2 的方程分别为

$$y=k(x-1),\ y=kx+5, \text{即 } kx-y-k=0,\ kx-y+5=0.$$

两平行直线间的距离 $d=\frac{|-k-5|}{\sqrt{k^2+1^2}}=5$.

解得 $k=0$ 或 $k=\frac{5}{12}$.

因此,两直线的方程为 $y=0$,$y=5$ 或 $5x-12y-5=0$,$5x-12y+60=0$.

例 5 已知点 $P(-1,-5)$、$Q(2,3)$,若直线 $l:x+ay+a=0$ 与线段 PQ 的延长线相交,求 a 的取值范围.

解 由题意,点 P、Q 在直线 l 的同侧,所以 $\delta_P\cdot\delta_Q=\frac{-1-5a+a}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{2+3a+a}{\sqrt{1+a^2}}>0$.

化简,得 $(2a+1)(4a+1)<0$. 解得 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{4}$.

所以,a 的取值范围是 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{4}$.

例 6　直线 l 过点 $P(1,0)$，且被直线 $3x+y-6=0$ 和 $3x+y+3=0$ 所截得的线段长为 9，求直线 l 的方程.

解　直线 $3x+y-6=0$ 和 $3x+y+3=0$ 之间的距离为 $\frac{|-6-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{10}}$.

设直线 l 与两平行线的夹角为 α. 因为直线 l 被两平行线所截得的线段长为 9，所以，$\sin\alpha=\frac{\frac{9}{\sqrt{10}}}{9}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，可得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$.

假设直线 l 的斜率存在，且设为 k，则 $\left|\frac{k-(-3)}{1+(-3k)}\right|=\frac{1}{3}$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，直线 l 的方程为 $4x+3y-4=0$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$. 此时，直线 l 与直线 $3x+y-6=0$ 和 $3x+y+3=0$ 的交点分别为 $A(1,3)$，$B(1,-6)$，所截得线段 AB 长为 9，满足条件.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $4x+3y-4=0$.

解题规律

1. 设两条平行直线的方程分别为

$$l_1: ax+by+c_1=0,$$
$$l_2: ax+by+c_2=0,$$

则它们之间的距离 $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，如例 3、例 4 和例 6.

2. 如果点 A、B 到直线 l 的距离相等，那么直线 l 有两种情况：一种是直线 l 与直线 AB 平行；另一种是直线 l 经过线段 AB 的中点. 例 2 也可以用这种方法来解.

3. 设点 P 和 Q 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，直线 l 的方程为 $ax+by+c=0$.

如果点 P 和 Q 在直线 l 的同侧，那么

$$\delta_P\cdot\delta_Q=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ax_2+by_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}>0;$$

如果点 P 和 Q 在直线 l 的异侧，那么

$$\delta_P\cdot\delta_Q=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ax_2+by_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}<0.$$

（二）线性规划

1. 画不等式组的解为坐标的点所表示的平面区域

典型例题

例 1　画出下列不等式组的解为坐标的点所表示的平面区域：