

算术应用题图解

李 青 編 著

湖 北 人 民 出 版 社

內容提要

本書介紹算術應用題圖解的作用和方法；系統地選擇了整數四則、分數四則中的各種例題，分別利用圖解作出答案。通過圖解應用題的示例，可使讀者觸類旁通，找到分析和解答算術應用題的門徑。本書可供具有高小畢業程度的讀者自修時參考用。

算術應用題圖解

李青編著

湖北人民出版社出版（武漢解放大道332號）

武漢市書刊出版業營業許可證新出字第1號

新華書店武漢發行所發行

精華鑄字印刷廠印刷

787×1092耗 $\frac{1}{32}$ 開·2 $\frac{1}{8}$ 印張·49,000字

1957年4月第1版

1957年4月第1次印刷

印數：1—53,000

統一書號：T7106·86

定 价：(5)0.16元

編者的話

1. 本書系根据本人几年來在算術教学中的初步體驗編寫的。希望帮助讀者同志認識圖解的作用和掌握圖解的方法，以減少學習算術应用題中的困难。

2. 本書应用題圖解举例系参照中学数学教学大綱（草案）分类。对例題的選擇，是以現行初中算術教材的主要內容为範圍。

3. 本書所举例題，除圖示外，并采用解析、列式、和驗算等步驟，系統比較完整，說明比較詳細。希望帮助讀者同志学会运用圖解進行思考，提高分析能力。

4. 小数、百分数与分数的关系十分密切，关于这两方面的应用題的解法，和分数一節里同类型的应用題的解法完全一样，故略去其圖解举例，以免重复。

5. 本書承校內数学組同志的帮助，曾經几次修改，但由于本人業務水平有限，里面存在的缺点还会很多，甚至有錯誤。希望讀者同志多多提出意見，以便修正。

李 青 1956年5月10日于湖南新寧一中

目 錄

第一節 圖解的几个問題	1
(一) 圖解有什么好处	1
(二) 常用的圖解法有哪几种	3
(三) 怎样進行圖解	5
(四) 怎样从圖中找出解法	13
(五) 怎样使圖形鮮明完整	15
第二節 整数四則典型应用題圖解举例	18
(一) 求兩数的应用題	18
1. 已知兩数的和与差	18
2. 已知兩数的比与和	22
3. 已知兩数的比与差	24
(二) 按比例分配的应用題	26
(三) 可用代替法消去其中一个未知数來解的应用題	30
(四) 雜題	33
第三節 分数四則应用題圖解举例	38
I. 非典型应用題	38
(一) 求一个数为另一个数的几分之几的应用題	38
(二) 求一个数的几分之几的应用題	40
(三) 已知某数的几分之几, 求某数的应用題	43
II. 典型应用題	49
(一) 求兩数的应用題	49
1. 已知兩数的和与差	49
2. 已知兩数的比与和	52
3. 已知兩数的比与差	55
(二) 按比例分配的应用題	57
(三) 可用代替法消去其中一个未知数來解的应用題	60

第一節 圖解的幾個問題

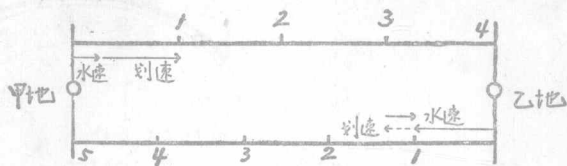
算術應用題內容複雜，學習比較困難。圖解是可以幫助減少這方面的困難的，因此來談談下面的關於算術應用題圖解的幾個問題。

(一) 圖解有什麼好處

圖解的主要作用是把問題的內容具體化，形象化，它可以幫助我們理解題意，明確數量間的關係，進而使我們很快的得出解法，現就這幾點分別舉例說明于下：

1. 圖解可以幫助我們理解題意

有些應用題所提供的條件，往往不是解答問題需要的直接條件；並且它們與未知數間的關係，常常是隱蔽的，不容易覺察出來。但通過圖解後，即可把我們所需要的直接條件體現出來，把條件間隱蔽的關係揭露出來，因而使我們對問題的意思能夠獲得透徹的理解。例如，“甲、乙兩地相距100里，一只船從甲地到乙地順流划行，4小時可到；從乙地到甲地逆流划行，5小時可到。求這只船的划行速度和水流速度？”此題所提供的三個已知數，從表面上不容易看出它們與划行速度及水流速度這兩個未知數的直接關係。但通過像下面的圖解，即可明顯地看出100里與4小時兩數之間，包含着划速與水速之和；100里與5小時兩數之間，包含着划速與水速之差。因而我們很清楚知道此題要用和差算法來解。



(圖 1)

$$\begin{aligned} \text{解法: } (100 \div 4 + 100 \div 5) \div 2 &= (25 + 20) \div 2 \\ &= 45 \div 2 = 22.5(\text{里}) \cdots \cdots \text{划速} \end{aligned}$$

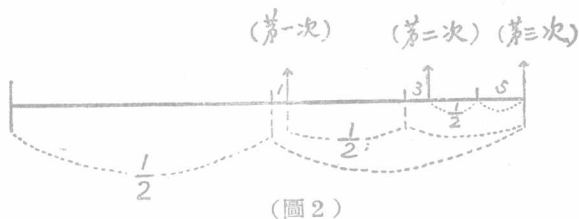
$$\begin{aligned} (100 \div 4 - 100 \div 5) \div 2 &= (25 - 20) \div 2 \\ &= 5 \div 2 = 2.5(\text{里}) \cdots \cdots \text{水速} \end{aligned}$$

2. 圖解可以幫助我們明確數量間的關係

有些應用題所提供的條件比較複雜，如果只憑着記憶力和想像力去分析它們之間的關係，非常吃力和費時；甚至有時想久了，往往頭昏腦脹，把彼此之間的關係搞亂弄錯，因而得不出問題的正確解法。這種現象必須加以克服。例如，“某合作商店有一段布，第一次賣出一半又 1 尺，第二次賣出剩下的一半又 3 尺，第三次賣出第二次賣出後所剩下的一半又 5 尺，這時恰好賣完。問這段布有多少尺？”此題所提供的條件，其中有三個相同的數字“一半”，但是它們所表示的數量却各不相同，因而此題表面上只有四個已知數，實際上是有六個已知數，就提供的條件來說，是相當複雜了。如果我們把這些條件記在腦子裡，憑着想像力去分析它們之間的關係，是很吃力的，也是很費時的。但是通過像下面的圖解，從圖形上進行分析，就容易知道：

- 1) 5 尺與第三次賣出的數之間存在着倍數關係；
- 2) 第三次賣出的數加上 3 尺，與二三兩次賣出的數的和之間存在着倍數關係；
- 3) 二三兩次賣出的數的和再加上 1 尺，與全段布之間存在着倍數關係。因而此題利用倍數關係依次進行逆運算，即可得出這

段布的長。



$$\begin{aligned} \text{解法: } & [(5 \times 2 + 3) \times 2 + 1] \times 2 = [13 \times 2 + 1] \times 2 \\ & = 27 \times 2 = 54 (\text{尺}) \end{aligned}$$

3. 圖解可以幫助我們很快地得出解法

從前面兩個例題，我們可以清楚地認識到不管任何四則應用題的已知條件如何複雜，或者它們與未知數間的關係如何隱蔽，只要通過圖解，就可把複雜的條件簡單化，把隱蔽的關係明朗化，因而使我們能夠很快地得出問題的正确解法。

(二) 常用的圖解法有哪幾種

圖解應用題的時候，由於各種問題的內容和性質不同，因而所採用的方法也有多種多樣，有些用綫條來圖解，有些用幾何圖形來圖解，也有些用繪畫物體的形狀來圖解，種類繁多。現在就幾種最常用的圖解法來談一談：

1. 直綫圖解法

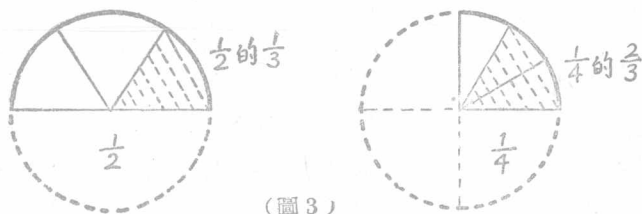
直綫圖解法，就是利用直綫來圖解問題的方法。這種圖解法有用一根主綫的，有用兩根主綫的，也有用兩根以上的主綫的。例如，一般求一個數的應用題（如求一個數的幾分之幾的應用題，和已知某數的幾分之幾，求某數的應用題），大都用一根主綫來進行圖解；求兩個數的應用題，大都用兩根主綫來進行圖解；按比例分配的應用題，大都用兩根以上的主綫來進

行圖解；總之，用主綫的多少，是根據問題的需要來決定，這種圖解法用起來很簡便，適用的範圍也比較廣，大家都喜歡用它，本書主要的是採用這種圖解法。

關於用直綫來表示數量的問題，我們要有個比較全面的認識。就是在圖解不同的問題上，等長的綫段，可用來表示幾種不同的數量；而同一種數量，又可用長短不等的綫段來表示；並不是一定的數量，必須要用定長的綫段來表示；也不是定長的綫段，只能表示一定的數量；這全看我們繪圖的大小來決定綫段的長短。其次，綫段既用來表示數量的多少，而數量有各種不同的單位名稱，那麼無論何種單位，不管是面積單位、體積單位、重量單位、容量單位、或時間單位，都可用綫段來表示；並不是只有長度單位才能用綫段來表示。同時，就是不名數也可用綫段來表示。

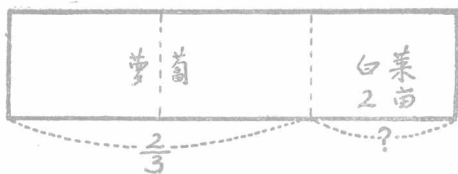
2. 圓形圖解法

圓形圖解法，就是利用圓形來圖解問題的方法。這種圖解法，在分數應用題方面運用得比較廣。例如，“小王從合作商店買回一只12兩重的月餅，把一半的 $\frac{1}{3}$ 分給弟弟，把 $\frac{1}{4}$ 的 $\frac{2}{3}$ 分給妹妹，求弟弟和妹妹各得幾兩？”此題若用圓形來圖解，（如下圖）即可鮮明地體現出弟弟得這只餅的 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，妹妹得這只餅的 $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ，兩人所分得的重量都是 $12 \times \frac{1}{6} = 2$ 兩。



3. 矩形圖解法

矩形圖解法，就是利用矩形來圖解問題的方法。這種圖解法，無論在整數里或分數里對求面積方面的應用題，運用得比較多。例如，“某農業生產合作社有一塊地的 $\frac{2}{3}$ 種蘿卜，剩下的2畝種白菜，求這塊地有多少畝？”此題若用矩形來圖解，（如下圖）即可鮮明地體現出種白菜的2畝，占這塊地的 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ，因而知道這塊地的 $\frac{1}{3}$ 是2畝，所以它的面積是 $2 \div \frac{1}{3} = 6$ 畝。



(圖 4)

(三) 怎樣進行圖解

當我們把應用題進行圖解的時候，首先就會碰到這樣一些問題：1) 選用哪一種圖解法，2) 要用多少根主綫，3) 按照什麼步驟畫出圖形。本來對這幾個問題，只要我們通過多次的嘗試，自然會在熟練中得到解決。但為了幫助初學的同志能夠很快的找到門徑，現把我的點滴體驗介紹于下：

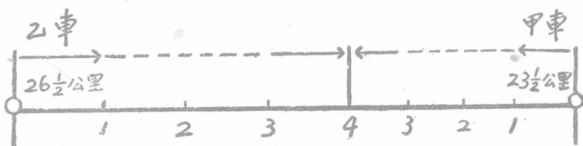
1. 根據問題的內容，選擇合適的圖解法

常用的圖解法有上述三種，每一種適用的範圍，也作了簡單的介紹。但上一節所說的那些範圍，只是一般性的、原則性的劃分，並不能機械地把它們肯定下來。因為，就這三種圖解法

來說，有些問題只能應用其中的一種，有些問題可以應用其中的兩種，還有些問題甚至三種都可以用。請看下面幾個例題，就可以說明這種情況了。

〔例 1〕甲、乙兩汽車從兩個車站同時相向開出，甲汽車每小時走 $23\frac{1}{2}$ 公里，乙汽車每小時走 $26\frac{1}{2}$ 公里，經過 4 小時後兩車相遇。求這兩個車站的距離？

此題只可用直線圖解，其圖如下：



(圖 5)

從圖上可以看出兩個車站的距離是：

$$(23\frac{1}{2} + 26\frac{1}{2}) \times 4 = 50 \times 4 = 200 \text{ (公里)}$$

〔例 2〕有一個直徑是 5 米的圓形花壇，周圍環繞着一條寬 0.5 米的小路，求這條小路的面積？

此題只能用圓形圖解，其圖如下：

從圖上可以看出大圓的面積

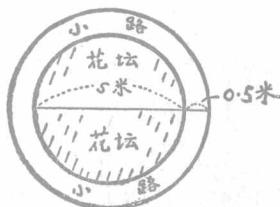
是：

$$[(\frac{5}{2} + 0.5)^2 \times 3.14] \text{ 平方米。}$$

花壇的面積是：

$$[(\frac{5}{2})^2 \times 3.14] \text{ 平方米。}$$

所以小路的面積是：



(圖 6)

$$\left(\frac{5}{2} + 0.5\right)^2 \times 3.14 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 3.14 = 28.26 - 19.625 \\ = 8.635 (\text{平方米})$$

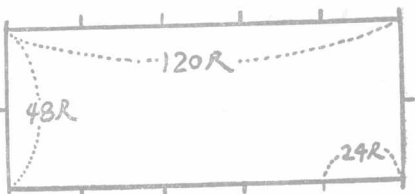
〔例3〕某農業社有一塊長方形的土地，長120尺，寬48尺，社員們打算在它的周圍種樹，每隔24尺種一棵，問一共要種多少棵？

此題可用矩形圖解，其圖如下：

從圖上可以看出在這塊土地的周圍要種樹：

$$(120 \times 2 + 48 \times 2) \div 24 \\ = 336 \div 24 = 14 (\text{棵})$$

〔例4〕某農林實驗場有一塊長方形的土地，分成三個苗圃，第一苗圃占這塊地的 $\frac{2}{5}$ ，第二苗圃占剩下的 $\frac{2}{5}$ ，第三苗圃是18畝。求這塊地有多少畝？



(圖7)

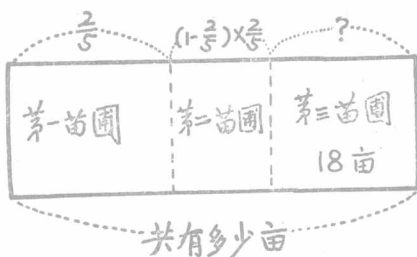
這塊地的 $\frac{2}{5}$ ，第二苗圃占剩下的 $\frac{2}{5}$ ，第三苗圃是18畝。求這塊地有多少畝？

此題可用兩種方法圖解，其圖如右：

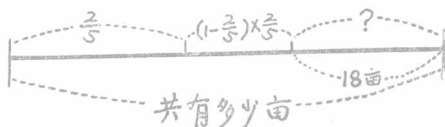
從右面兩個圖形，都可看出第三苗圃占這塊地的 $1 - \frac{2}{5} - (1 - \frac{2}{5})$

$\times \frac{2}{5} = \frac{9}{25}$ ，也就是這塊地的 $\frac{9}{25}$ 是18畝，所以它的面積是 $18 \div \frac{9}{25} = 18 \times$

$\frac{25}{9} = 50$ 畝。



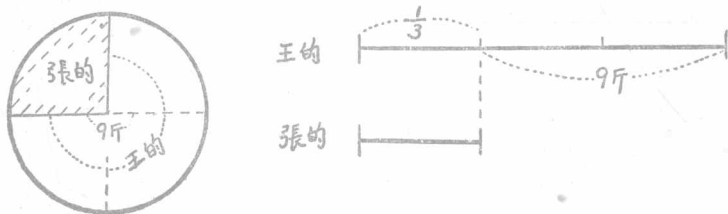
(第一苗圃) (第二苗圃) (第三苗圃)



(圖8)

〔例5〕張王兩同志一同從農場買回一只大南瓜，把它分割后，張所得的是王的 $\frac{1}{3}$ ，已知王比張多得9斤，求他們各買了几斤？

此題可用兩種方法圖解，其圖如下：



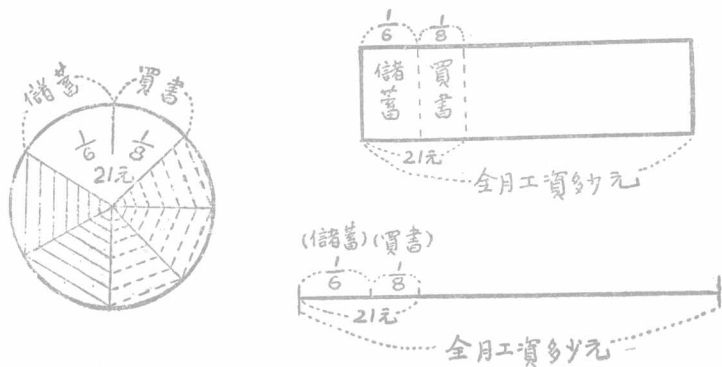
(圖9)

從上面兩個圖形都可看出王所買的 $(1 - \frac{1}{3})$ 是9斤，他所買的全部是 $9 \div (1 - \frac{1}{3}) = 9 \div \frac{2}{3} = 9 \times \frac{3}{2} = 13\frac{1}{2}$ 斤。張所買的是王的 $\frac{1}{3}$ ，所以他買了 $13\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}$ 斤。

以上〔例4〕〔例5〕兩個例題都可用兩種方法圖解。再看下面的例題，還可用三種方法來圖解，不過這種情況並不普遍。

〔例6〕劉同志為祖國工業化積累資金，把本月份工資的 $\frac{1}{6}$ 儲存人民銀行，又為了向文化科學進軍，付出工資的 $\frac{1}{8}$ 買圖書。已知兩次共用去人民幣21元，問劉同志本月份的工資是多少？又儲蓄和買書各付出多少？

此題可用三種方法圖解，其圖如下：



(圖10)

從上面三個圖形，都可看出劉同志的工資的 $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ 是 21元，他的全部工資是 $21 \div \frac{7}{24} = 21 \times \frac{24}{7} = 72$ 元，儲蓄付出 $72 \times \frac{1}{6} = 12$ 元，買書用去 $72 \times \frac{1}{8} = 9$ 元。

由以上六個例題，可以看出圖解應用題所選用的方法，是完全根據問題的具體內容來決定的。只要我們所運用的方法，能夠把問題的具體內容形象鮮明地體現出來，那麼，這個方法就是好的方法。其次從後面三個例題，還可以看出用圓形和矩形所圖解的問題，也可以用直綫來圖解，可見直綫圖解法在適用的範圍上比較廣泛些。我們應該注意多多練習運用這種圖解法。

2. 根據問題所求的未知數，確定用多少根主綫

就圓形和矩形圖解法來說，主綫問題比較簡單，容易處理。因為圓的主綫就是一根封閉曲綫，矩形的主綫就是四條邊。

这里所討論的，主要的是关于直綫圖解法的主綫問題。这种圖解法所用的主綫，有一根的，兩根的，还有兩根以上的；它們实用的範圍，前面已作了簡單的介紹，原則上我們可以这样指出：凡問題只含有一个未知数的，就只要用一根主綫；含有兩個未知数的，就要用兩根主綫；含有兩個以上未知数的，就要用兩根以上的主綫。例如，前一節的〔例1〕只含有一个未知数（求兩車站的距离），〔例4〕也只含有一个未知数（求長方形土地的畝数），〔例6〕虽然含有三个未知数，但主要的未知数只有一个（求刘同志本月份的工資），所以这些問題都只要用一根主綫進行圖解。又如〔例5〕含有兩個未知数，所以要用兩根主綫來圖解。此外，像下面这个問題含有三个未知数，就需要用三根主綫來圖解了。

“某農業生產合作社有三塊麥地，一共156畝，第一塊比第二塊多18畝，第二塊比第三塊多15畝，求这三塊麥地各有多少畝？”（此題圖解及解法，請參看后面第二節〔例11〕）

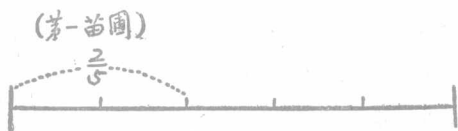
从上面几个例題，我們深深地体验到直綫圖解法应用多少根主綫，是根据問題中所含未知数的多少來决定。未知数少，則用的主綫少；未知数多，則用的主綫多；原則上每一个主要未知数，需要用一根主綫。

3. 按照已知条件叙述的先后，依次添上輔綫

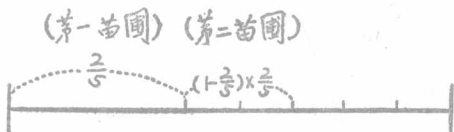
圖解确定了主綫之后，次一步工作就是添加輔綫，繪出圖形。只有適当地添上輔綫，才能把問題的主要內容具体地、完整地体现出來，因为輔綫的主要作用，是把已知数与已知数間的关系，和已知数与未知数間的关系，从綫段間的联系鮮明地表示出來。所添上的輔綫越合適，則圖形把数量間的关系体现得越清楚，从而使我們对問題的理解越明确。因此这一步工作在整個圖解工作中是重要的一环，我們必須特別重視。至于在主

綫上應該怎樣添上輔綫，我們可以按照已知条件叙述的先后，依次進行。現在把前面〔例4〕的圖形，按照它的形成过程，逐步分解于下：

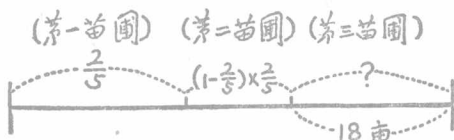
第一步，根据未知数只有一个，确定用一根主綫，并把此綫段分成五个等份，标出第一苗圃占其中的 $\frac{2}{5}$ 。



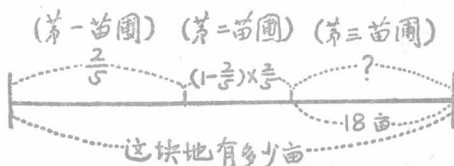
第二步，把剩下的綫段又分作五等份，标出第二苗圃占其中的 $\frac{2}{5}$ 。



第三步，标出第三苗圃占18畝，它占全地的几分之几，用“？”表示。



第四步，标出所求的数“这块地有多少畝”。至此圖解工作即告完成。



(圖11)

再举一个例子：“为了庆祝国庆节，甲乙两班学生一起作纸花。甲班作了200朵，乙班作了120朵，从甲乙两班各取出相等的朵数布置礼堂后，剩下的朵数，甲班恰是乙班的5倍。问从两班各取出多少朵？取出后各剩下多少朵？”

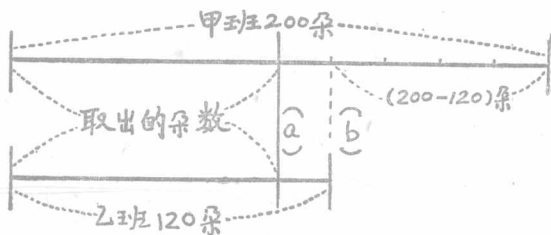
此题是这样进行图解的：

1. 题中包括两个主体（甲班与乙班），每一个主体含有两个未知数（取出多少朵、剩下多少朵）所以要用两根主綫。先画一根代表甲班的200朵，再画一根代表乙班的120朵，并且乙班的綫段比甲班的綫段要短些，它只有甲班綫段的 $\frac{3}{5}(\frac{120}{200})$ 。（如下圖12）

2. 添上輔綫 a，从两根主綫上截取相等的兩綫段，代表兩班取出相等的朵数。a 綫的位置是根据甲班所剩下的朵数是乙班所剩下的朵数的5倍來决定的，向左边或右边移一点都不合適，因为向左移一点，則兩班所剩下的朵数，甲班不够乙班的5倍，若向右边移一点，則又超过5倍了。

3. 把甲班所剩下的綫段分作5个等份，并且添上虛綫 b。

4. 在甲班綫段下标出甲班比乙班多出的朵数(200-120)，这差数也就是甲班剩下的比乙班剩下的所多出的朵数。



(圖12)

从上面两个例题，可以明顯地看出在主綫上所添的輔綫，是完全按照題中已知条件叙述的先后，依次進行的。

(四) 怎样从圖中找出解法

我們在解簡單的加法、減法、乘法、和除法應用題時，很少發生困難，這是因為這些應用題中提供的條件不複雜，並且已知數與未知數間的關係很直接、很明顯，容易判別用什麼方法來解。例如，它們之間如果存在着和或差的關係，我們就會知道用加法或減法來解。如果存在着倍數關係，我們就會知道不是用乘法來解，便是用除法來解。事實上在所有四則應用題中，已知數與未知數間的關係，是不會離開加、減、乘、除這四個基本情況的。不過有些四則應用題，它們提供的條件比較複雜，並且已知數與未知數間的關係，不一定都是直接的，因而在解法上不可能單純地用一種加或減、乘或除的方法來解，有時用兩種或三種方法混合來解，有時甚至用四種方法混合來解。這樣自然會使我們感覺麻煩和困難了。對這樣的應用題，麻煩是有的，但應該說困難並不存在；因為不管已知條件如何複雜，總可根據彼此間的關係使它們簡單化；不管它們對未知數間的關係如何隱蔽，總可追尋綫索把它們的直接關係揭露出來。總之，凡是複雜的、非直接的條件，我們一定要想辦法使它們變成簡單的、直接的條件。把複雜的應用題進行圖解，就是為這項工作鋪平道路。經驗告訴我們，任何應用題通過圖解之後，一切複雜的條件都可以簡單化，一切隱蔽的關係都可以表面化。因此我們怎樣從圖形上找出解法，可靠的方法，就是根據如何簡化複雜條件及揭露它們的隱蔽關係這兩個主要方向去進行分析歸納。現在就前節最後兩個圖形為例子，說明這種找尋解法的方法于下：

〔例 1〕(內容及圖形均見前一節〔例 4〕)，它的解法是這樣得出來的：