普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 应用经济数学

冯翠莲　赵益坤　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

# 应用经济数学

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 应用经济数学

冯翠莲　赵益坤　主编

高等教育出版社

**内容提要**

为了适应教育部对高职高专教育人才培养目标的要求，在近年高职高专教育改革研究成果的基础上，由教育部高教司和高等教育出版社召集全国部分高职院校的领导和相关人员，经反复讨论、精心策划编写了本书。本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、多元函数微分学、矩阵与线性方程组、概率的基本知识及其应用、数据处理等. 每节后配有习题，每章后配有总习题，书后附有习题参考答案与解法提示。

本书重能力培养、重知识应用、重素质教育，以培养应用型人才为目标，在许多方面都具有明显的高职特色，适于高职高专院校经济类、管理类学生使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

应用经济数学/冯翠莲，赵益坤主编. —北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978－7－04－024346－8

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①冯…②赵… Ⅲ. 经济数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 070357 号

策划编辑 邓雁城　责任编辑 李华英　封面设计 于文燕　责任绘图 尹 莉

版式设计 余 杨　责任校对 王效珍　责任印制 陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010－58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800－810－0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010－58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京市白帆印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×1092　1/16 | 版　　次 | 2008 年 6 月第 1 版 |
| 印　　张 | 17 | 印　　次 | 2008 年 6 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 380 000 | 定　　价 | 23.20 元 |



**物料号　24346－00**

**网络题库使用说明：**

1. 进入“中国组卷网”（http://www. zujuan. com. cn），输入本书封底提供的防伪码“明码”部分（需输入50本），获取积分，即可免费从网上下载题库至本地机。使用时间为一个学年。

2. 高等数学网络题库拥有约8 000道题目，内容涵盖微积分、线性代数、概率统计、线性规划、离散数学等高职高专数学类课程，包括选择、填空、判断、计算、分析、应用、证明等多种题目类型。题库系统设置了模板快速组卷、自定义组卷、个人大纲、个人题库、特色上传等功能。

电子邮箱：caokun@hep. com. cn

咨询电话：（010）58582365

# 前　言

根据高职高专数学教学的特点、需求及高职高专教育培养目标，我们本着重能力培养、重知识应用、重素质教育、求创新的总体思路，编写了这本数学教材，供高职高专院校经济类、管理类学生使用。本教材在许多方面都具有明显的高职特色，具体反映在：

1. 尊重学科，但不恪守学科。打破传统数学教材的结构，以“加强基础，强化应用，整体优化，注重效果”为原则，将微积分、线性代数及概率统计基本知识有机地结合在一起，根据学生的认知水平、数学的认知规律和教学规律，设计、组织和编排全书内容，力求实现基础性、实用性和发展性三方面需求的和谐与统一。真正体现以学生为主体，以教师为主导的辩证统一。

2. 以案例驱动的方式，用现实和经济方面的实例引出概念，并用通俗简洁而又富有哲理性的语言阐明概念的内涵和实质。着重讲解基本概念、基本理论和基本方法，对基本理论和结论一般不做论证，尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值。由此加深对基本理论和概念的理解，立足于实践与应用，使传授数学知识和培养学生的数学素养得到很好的结合。

3. 注重加强数学的实际应用。以培养学生能用定性与定量相结合的方法解决实际问题的能力为宗旨，配备案例、练习和习题。注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，强化应用数学知识解决实际问题的能力训练，培养学生举一反三、融会贯通的能力，创新能力和职业能力，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求。

4. 本教材精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学。

5. 本教材每章后有内容精要，每节后配有习题，每章后配有总习题。习题按循序渐进的原则配置，其中有一般能力检测的基本题和应用能力检测的综合题，书后附有习题参考答案与解法提示。

本教材的主编为冯翠莲教授、赵益坤教授。第一章至第五章由冯翠莲执笔，第六章由王莉莉执笔，第七章、第八章由赵益坤执笔，全书由冯翠莲统稿。参加编写工作的还有王磊、赵连盛。

本教材在编写过程中，得到高等教育出版社相关领导的指导和大力支持。同行专家提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

限于水平，加之数学教学改革中的一些问题还有待探索，不足之处恳请批评指正。

编者

2008 年 5 月

# 目　录

## 第七章 概率的基本知识及其应用 187



## 第八章 数据处理 222

# 第一章

# 函数与极限

【目标】理解函数概念，了解函数的几何特性，知道极限概念及连续概念，掌握将初等函数按基本初等函数的四则运算和复合形式分解，掌握极限的四则运算法则.

函数、极限和连续是微积分学的基本概念. 本章讲述这三个基本概念及其相关问题.

## §1.1　函数

万事万物都在不停地变化. 例如，每天的气温都会随时间的变化而变化；产品的生产成本会随产量的增加而增加. 作为研究和描述客观世界的工具，微积分就是研究变量变化过程的数学，它的主要研究对象是相依变量之间的函数关系. 本节将讲述函数概念和初等函数.

### 一、函数的概念

在研究各种实际问题的过程时，常常会遇到两种不同类型的量：一种是变的，即在所研究问题的过程中可取不同的数值；另一种在所研究问题的过程中保持不变，只取一个固定值，前者为**变量**，后者为**常量**. 而参与实际问题的诸变量之间往往是相互联系、相互制约的. 这种相互关系通常表现为变量取值的对应关系.

#### 1. 函数的定义

**案例 1**　我们去银行存钱，假设一年定期整存整取的年利率为 4.14%，则存款金额 $x$ 与一年到期时的利息 $y$ 之间的对应关系如表 1.1.

表 1.1

| 存款金额 $x$/元 | 500 | 1 000 | 2 000 | 5 000 | 10 000 | 20 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 一年到期时利息 $y$/元 | 20.7 | 41.4 | 82.8 | 207 | 414 、 | 828 |

**案例 2**　在气象观测站,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1.1 所示的曲线.曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 $t_0$ 的气温是 $\theta_0$.观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间 $t$ 从 0:00 到 24:00 气温 $\theta$(单位:℃)的变化情形.时间 $t$ 和气温 $\theta$ 都是变量,这两个变量之间的对应关系是由一条曲线确定的.

**案例 3**　圆的面积 $A$ 由圆的半径 $r$ 决定.只要 $r$ 取定一个数值,面积 $A$ 就有一个确定的值与之对应,且 $A$ 与 $r$ 之间有如下关系式:

$$A=\pi r^2\quad (r>0).$$

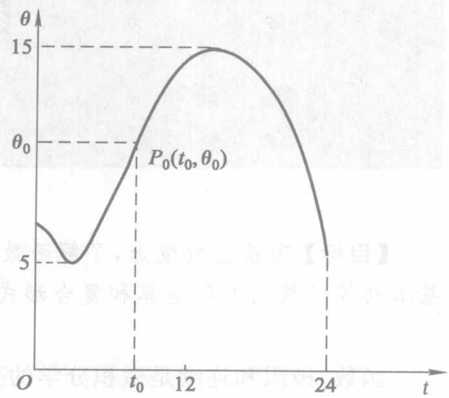


图 1.1

**案例 4**　北京市现行出租车收费标准为:乘车不超过 3 km,收费 10 元;超过 3 km 而不超过 15 km,超过的里程每千米(不足 1 km 按 1 km 计)加收 2 元;超过 15 km,超过的里程每千米(不足 1 km 按 1 km 计)加收 3 元.

**【案例 4 分析】**　由于乘车里程不超过 3 km、超过 3 km而不超过 15 km 及超过 15 km 的收费标准不同,乘客乘车的费用 $P$(元)与乘车的里程 $x$ (km)之间的数量关系应用三个数学式来表示,即

$$P=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 10+2(x-3), & 3<x\leqslant 15,\\ 10+2(15-3)+3(x-15), & x>15.\end{cases}$$

该案例中,乘车里程 $x$ 与乘车费用 $P$ 都是变量,$x$ 在其取值范围内每取定一个值,按上式,$P$ 就有唯一确定的一个值与之对应.

以上列举的案例,虽是来自不同的领域,而且具有不同的表示形式,有表格、图形、公式,但它们的共性是:都反映了在同一过程中有着两个相互依赖的变量,当其中一个量在某数集内取值时,按一定的规则,另一个量有唯一确定的值与之对应.变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

**定义 1.1(函数)**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量,$D$ 是一个给定的非空数集.若对于每一个数 $x\in D$,按照某一确定的对应法则 $f$,变量 $y$ 总有唯一确定的数值与之对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 $x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**,数集 $D$ 称为该函数的**定义域**.

定义域 $D$ 是自变量 $x$ 的取值范围,也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集.由此,若 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时,则称该函数在 $x_0$ **有定义**,与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数在点 $x_0$ 的**函数值**,记作

$$f(x_0)\quad 或\quad y\big|_{x=x_0}.$$

当 $x$ 遍取数集 $D$ 中的所有数值时,对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为该函数的**值域**. 若 $x_0 \notin D$,则称该函数在点 $x_0$ **没有定义**.

由函数的定义可知,决定一个函数有**三个因素**:定义域 $D$、对应法则 $f$ 和值域 $Z$. 注意到每一个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 $f$ 而唯一确定,于是给定 $D$ 和 $f$,$Z$ 就相应地被确定了,从而 $D$ 和 $f$ 就是决定一个函数的**两个要素**. 当两个函数用不同的解析式表示时,这两个函数相等的**充要条件是定义域相同且对应法则相等**.

**练习 1** 求函数 $y=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{4-x^2}}+\ln(x+1)$ 的定义域.

**解** 该函数由两项和构成,其定义域应是各项自变量取值范围的公共部分,须将每项分别讨论.

第一项是分式,其分子 $x$ 可取任意值;对分母 $\sqrt{4-x^2}$,因偶次根的根底式应非负,所以有 $4-x^2 \geqslant 0$,又注意到分母不能为零,所以有 $4-x^2>0$,即 $-2<x<2$,写成区间则是 $(-2,2)$.

第二项 $\ln(x+1)$,因对数符号下的式子应为正,所以有

$$x+1>0, \quad 即\ x>-1,$$

写成区间则是 $(-1,+\infty)$.

上述两个区间之交是区间 $(-1,2)$,这就是所求函数的定义域.

**练习 2** 设 $y=f(x)=x^2-3x+2$,求 $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(-x)$, $f(f(x))$.

**解** 这是已知函数的表达式,求函数在指定点的函数值. 易看出该函数对 $x$ 取任何数值都有意义.

$f(1)$ 是当自变量 $x$ 取 1 时函数 $f(x)$ 的函数值. 为求 $f(1)$,须将 $f(x)$ 的表示式中的 $x$ 换为数值 1,得

$$f(1)=1^2-3\times1+2=0,$$

或记作

$$y|_{x=1}=(x^2-3x+2)|_{x=1}=1^2-3\times1+2=0.$$

同理可得

$$f(0)=0^2-3\times0+2=2 \quad 或 \quad y|_{x=0}=0^2-3\times0+2=2,$$

$$f(-1)=(-1)^2-3\times(-1)+2=6 \quad 或 \quad y|_{x=-1}=(-1)^2-3\times(-1)+2=6.$$

为求 $f(a)$,须将 $f(x)$ 的表示式中的 $x$ 换为 $a$,得

$$f(a)=a^2-3a+2.$$

同理,将 $x$ 换为 $-x$,得

$$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2.$$

将 $f(x)$ 的表示式中的 $x$ 换为 $f(x)$ 的表示式,得

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= [f(x)]^2-3f(x)+2 \\ &= (x^2-3x+2)^2-3(x^2-3x+2)+2 \\ &= x^4-6x^3+10x^2-3x. \end{aligned}$$

案例 3 是用一个数学式子表示两个变量之间的函数关系，而案例 4 则是用三个数学式子表示两个变量之间的函数关系. 若两个变量之间的函数关系要用两个或两个以上数学式子来表达，即对一个函数，在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达，则称为**分段函数**.

对案例 4：(1) 试确定函数 $P = P(x)$ 的定义域；

(2) 试求乘客乘车 2 km、3 km、5 km 和 20 km 所付的费用.

**【解案例 4】** 由案例 4 所给乘车费用 $P$ 与乘车里程 $x$ 之间的关系式知，这是分段函数，$x = 3, x = 15$ 是该分段函数的分段点.

(1) 由于乘车里程 $x$ 可在区间 $(0,3]$ 内取值，可在区间 $(3,15]$ 内取值，也可在区间 $(15,+\infty)$ 内取值，故该函数的定义域是 $(0,3] \cup (3,15] \cup (15,+\infty) = (0,+\infty)$.

(2) 因 $2 \in (0,3]$，所以当乘客乘车 2 km 时，所付的费用 $P = 10$（元）.

同样，因 $3 \in (0,3]$，所以当乘客乘车 3 km 时，所付的费用 $P = 10$（元）.

因 $5 \in (3,15]$，所以当乘客乘车 5 km 时，所付的费用应由式子 $P = 10 + 2(x-3)$ 计算，即

$$P = [10 + 2(x-3)]\big|_{x=5} = 14(\text{元}).$$

因 $20 \in (15,+\infty)$，所以当乘客乘车 20 km 时，所付的费用应由式子 $P = 10 + 2(15-3) + 3(x-15)$ 计算，即

$$P = [10 + 2(15-3) + 3(x-15)]\big|_{x=20} = 49(\text{元}).$$

## 2. 函数的几何特性

函数的几何特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性. 由于函数的几何特性在中学都已学习过，这里只作简要说明.

(1) 函数的奇偶性

由图 1.2 看到，曲线 $y = x^3$ 关于坐标原点对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的一对函数值也恰是相反数，这时称 $y = x^3$ 为**奇函数**. 图 1.3 表明，曲线 $y = x^2$ 关于 $y$ 轴对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的一对函数值却相等，这时，称 $y = x^2$ 为**偶函数**.

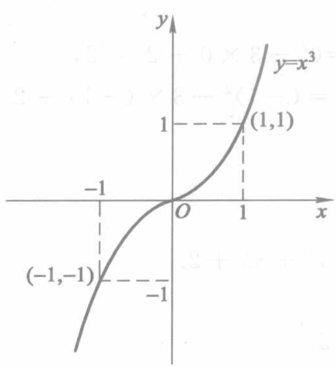

图 1.2

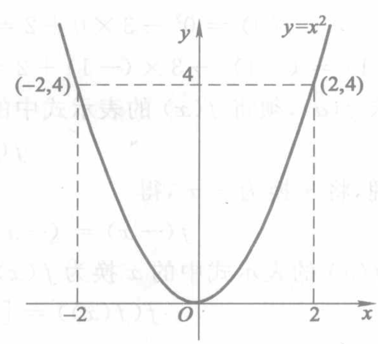

图 1.3

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

(i) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

(ii) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

**奇函数的图形关于坐标原点对称；偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.**

(2) 函数的单调性

观察函数 $y=x^3$ 的图形(如图 1.2)，从左向右看(沿着 $x$ 轴的正方向)，这是一条上升的曲线，即函数值随着自变量的值增大而增大，这样的函数称为在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是**单调增加**的. 在区间 $(-\infty,0)$ 内，观察函数 $y=x^2$ 的图形(如图 1.3)，我们会看到，情况完全相反，这是一条下降的曲线，即函数值随自变量的值增大而减少，这时，称函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是**单调减少**的.

一般地，设函数 $f(x)$ 在区间 $I$①上有定义，若对于 $I$ 中的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

(i) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上是**单调增加的**；

(ii) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上是**单调减少的**.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**. 若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内是单调函数，则称 $I$ 是该函数的**单调区间**.

沿着 $x$ 轴的正方向看，**单调增加函数的图形是一条上升的曲线；单调减少函数的图形是一条下降的曲线**. 由图 1.4 知，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=2^x$ 是单调增加的；而函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 则是单调减少的. 由图 1.5 知，在区间 $(0,+\infty)$ 内，函数 $y=\ln x$ 是单调增加的.

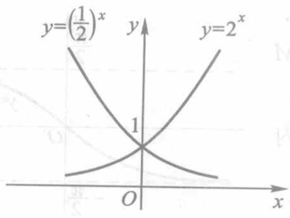


图 1.4

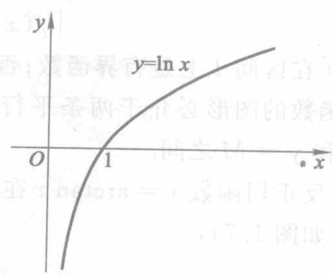


图 1.5

(3) 函数的周期性

我们已经知道，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，即有

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad n=\pm1,\pm2,\cdots,$$

即 $\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 $2\pi$ 是它的最小正周期，一般称 $2\pi$ 为正弦函数的**周期**(如图 1.6).

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，若存在一个非零常数 $T$，对于 $D$ 内所有 $x$，有 $x+T\in D$，且

① 区间分为有限区间和无限区间. 在以后的叙述中，当我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时，将用字母 $I$ 表示这样一个泛指的区间.

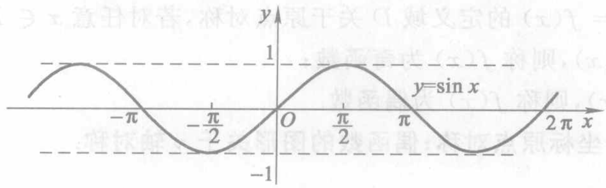


图 1.6

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，称 $T$ 是它的一个**周期**.

若 $T$ 是函数的一个周期，则 $\pm 2T, \pm 3T, \cdots$ 也都是它的周期. 对周期函数 $f(x)$，若它在所有的周期中存在一个最小的正数，通常，我们称周期中的**最小正周期**为周期函数的周期.

周期为 $T$ 的周期函数，在长度为 $T$ 的各个区间上，其函数的图形有相同的形状. 对正弦函数 $y=\sin x$，在长度为 $2\pi$ 的各个区间上，其图形的形状显然是相同的.

(4) 函数的有界性

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图形(如图 1.6) 介于两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是**有界函数**. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^3$ 的图形(如图 1.2) 向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 $x$ 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 内是**无界函数**.

一般地，设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义，若存在正数 $M$，使得对任意的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M \text{（可以没有等号）},$$

则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**有界函数**；否则称 $f(x)$ 是**无界函数**.

有界函数的图形必介于两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=-M$ $(M>0)$ 和 $y=M$ 之间.

例如，反正切函数 $y=\arctan x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$ 内是有界的(如图 1.7)，

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}.$$

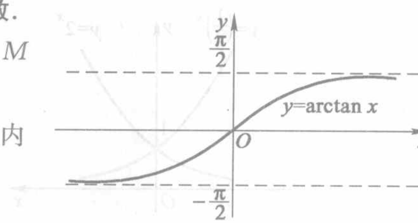


图 1.7

## 二、初等函数

### 1. 基本初等函数

基本初等函数通常是指以下六类函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 常量函数

$$y=C\ (C\text{ 为常数}),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

其图形如图 1.8.

(2) 幂函数

$$y = x^{\alpha} \ (\alpha \text{ 为实数}).$$

该函数的定义域随 $\alpha$ 而异，但不论 $\alpha$ 取何值，它在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义，且其图形均过点 $(1,1)$. 例如

当 $\alpha = 1$ 时，$y = x, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$，如图 1.9.

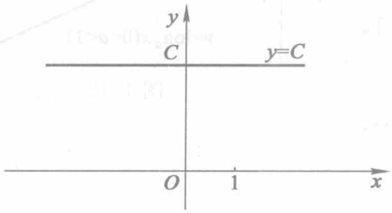


图 1.8

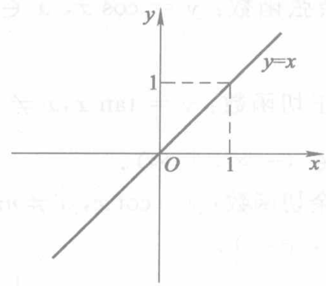


图 1.9

当 $\alpha = 2$ 时，$y = x^2, x \in (-\infty, +\infty), y \in [0, +\infty)$，如图 1.3.

当 $\alpha = 3$ 时，$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$，如图 1.2.

当 $\alpha = -1$ 时，$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，如图 1.10.

(3) 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty).$$

该函数当 $a > 1$ 时是单调增加的；当 $a < 1$ 时是单调减少的. 因 $a^0 = 1$，且总有 $y > 0$，所以，指数函数的图形均过 $y$ 轴上的点 $(0,1)$ 且位于 $x$ 轴的上方（如图 1.11）.

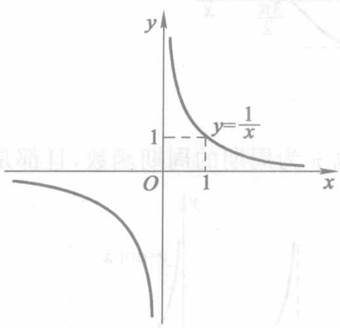


图 1.10

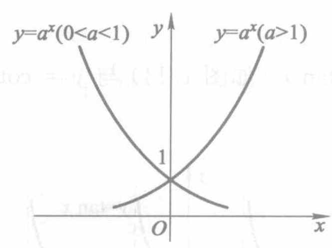


图 1.11

本书常用以 e 为底的指数函数 $y = e^x$. e 是一个无理数，$e = 2.718\,281\,828\,459\cdots$.

(4) 对数函数

$$y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (0, +\infty), y \in (-\infty, +\infty).$$

对数函数与指数函数互为反函数. 该函数当 $a > 1$ 时是单调增加的；当 $a < 1$ 时是单调减少的，因