研究生（非数学类）数学系列规划教材

应用数理统计

MATHEMATICAL STATISTICS

张忠占 徐兴忠 ◎ 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生(非数学类)数学系列规划教材

应用数理统计

张忠占　徐兴忠　编

机械工业出版社

本书是为非数学类硕士研究生数理统计课程编写的教材。在取材上，本书考虑到不同专业背景学生的特点，为了让他们更好地掌握统计学知识，保留了概率论基础部分。同时，加入了一些新的或者近年来在科学技术研究中焕发出新的生命力的内容。比如估计方程，稳健性的思想，局部多项式回归等。

全书共8章，包含概率统计的基础知识与基本概念，参数估计，假设检验，方差分析与试验设计，回归分析，多元统计分析，SPSS与统计数据分析等主要内容。

图书在版编目(CIP)数据

应用数理统计/张忠占，徐兴忠编. —北京：机械工业出版社，2008.9

(研究生(非数学类)数学系列规划教材)

ISBN 978-7-111-24393-9

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①张…②徐… Ⅲ. 数理统计—研究生—教材 Ⅳ. 0212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 092919 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：张祖凤 郑 丹 责任编辑：韩效杰

版式设计：张世琴 责任校对：李 婷

封面设计：王伟光 责任印制：洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2008年9月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 19.25印张 · 375千字

标准书号：ISBN 978-7-111-24393-9

定价：26.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379408

序

近年来，我国研究生教育有很大发展。随着国家经济建设的多方面需求和科学技术的飞速进步，高校研究生的数学课不仅规模上均有所扩大，而且在内容上需要不同程度的更新。在加强基础课教学的同时，为了适应不同专业的发展，也需要开设一些新课程。数学教师们经过多年的教学实践，为适应研究生教育发展的新形势，在教学改革方面做了许多努力和尝试，包括在教学基础上编写了不少研究生数学教材。这些教材的出版，对于进一步改进研究生数学教育，提高年轻教员的素质和加强各专业的数学知识和能力，无疑是十分有益的。

机械工业出版社多年来对高等学校的数学教育非常重视，在编译国内外数学教材等方面做了许多有益的工作。北京高教学会数学研究会也十分关注研究生的数学教育和培养，在组织北京地区教师编写教材方面花了很大力气。北京地区高校资源丰富，联系密切，在教学改革和相互交流促进方面有好的基础和条件。另一方面，北京地区研究生人数多，专业面广，改进研究生数学教学的任务也十分重要和迫切。这次机械工业出版社和北京高教学会数学研究会联手，组织一批非数学专业的研究生教材，对于加强和改进研究生数学教育是一件十分有益的事情。我希望今后能把这项工作持续做下去，使研究生得到更好的数学教育，使数学成为他们的一种重要的工具和思考方式，在今后各种不同工作领域中发挥威力，产生出高水平和创新性的数学研究与应用成果。

冯克勤

2007 年 9 月于清华园

前　言

本书是为非数学类硕士研究生数理统计课编写的教材。数理统计不仅在自然科学和工程技术中有着深入的应用，在人文社会科学乃至日常生活中的应用也越来越宽广，因而作为一门研究生课程，数理统计也在越来越多的专业开设。一方面，随着多层次本科生教育和大规模硕士研究生教育的发展，对于大多数学校而言，即便在各个专业内，硕士研究生在本科阶段所学课程的体系差异也有扩大之势。这给作为基础课或工具课的数理统计课程的教学带来了新的挑战，课程教学的改革是大势所趋。

另一方面，数理统计学本身最近几十年来有了迅速的进步，在与其他学科相互推动、交互发展的过程中，传统的数理统计的观念也在逐渐扩展和更新。如何在基础课教学中，结合现在学生的实际情况，面向学生应用统计技术的未来，融入现代数理统计学的新思想，是一个值得探索的课题。近几年来，出版的同类教材已不在少数，另辟蹊径实属不易，然机械工业出版社和本套丛书编委会不吝鼓励，作者亦喜作探讨，勉力为之，三年乃成。

在取材上，本书注意到照顾不同专业背景学生的需要，方便学习和回顾概率统计的基础知识，保留了概率论基础部分作为第 1 章，第 2 章也与大学本科的概率统计课程中的有关内容相当。在讲授时，可根据学生的实际情况，采用详细或概略讲授乃至省略的方法。同时，试图加入一些新的或近年来在科学技术研究中焕发出新的生命力的内容，比如估计方程，稳健性的思想，局部多项式回归，Bayes 推断等，扩大学生分析数据的视野和对现代统计技术的了解。另外，为了便于学生利用统计技术处理实际科学和工程问题，在第 8 章介绍 SPSS 软件的使用方法。在讲授上，吸收了作者多年在不同学校教学的经验，注意结合具体的例子讲解统计概念和方法的直观思想，而力图把必要的理论推演作为论证这些思想的手段，并把论证的理论基础限定在高等数学和线性代数基本理论的范围内。书中尽可能选取有直接应用背景的例题，尽管这样可能稍微加长篇幅。在概念和统计思想讲解方面，作者注意到统计作为数据分析技术的需要，以避免限制学生的思想，方便学生将来接受新的统计技术。全面讲授本书约需 72 学时，如前两章略讲则 56 ~ 60 学时可完成讲授；建议在讲授第 8 章时结合计算机实习。书中第 2 至第 7 章后按章节设置了习题。

本书第 1 章、第 2 章、第 3 章第 1 ~ 6 节、第 4 章第 4 节、第 5 章、第 6 章

第3节和第8章由张忠占编写，第3章第7节、第4章第1~3节、第6章第1~2节和第7章由徐兴忠编写，最后由张忠占统一定稿。

书中采用和借鉴了许多作者的有益素材，有关著作列在参考文献中；书的写作得到北京工业大学和北京理工大学概率统计学科同行的支持；丛书编委会的专家和机械工业出版社的各位编辑付出了很大的耐心和辛勤的劳动，在此一并致谢。

由于作者水平所限，不当之处在所难免，欢迎读者不吝赐教。

作者谨识

2008年4月

目　录

第 1 章　概率论基础知识

本章简述概率论的基础知识，为以后各章做准备。内容基本与大学理工科“概率论与数理统计”中的概率论部分相一致，因而省略所有理论证明，学习过这门课程的读者，可以只浏览主要内容并熟悉有关的符号。

1.1　事件及其运算

客观世界是发展变化的，各种量的变化有确定性和不确定性之分。所谓确定性变化规律，即指一个量的状态可以由某些条件准确唯一地确定下来。例如，自由落体下落的距离是下落时间的二次函数；一段导体中的电流强度与加在导体两端的电压成正比等等。这类现象的共同特点是：可由给定的条件准确地预言其结果。对于确定性变化规律，一般只需要描述量的状态与条件的对应关系，常用的数学工具是函数或函数应满足的条件(微分方程、积分方程等)。

另一类是不确定性规律，指量的状态不能由一组条件所确定的情形。例如，一般无法精确地预言明年的降雨量。不确定性是纷繁复杂的，要描述不确定性规律，不仅要考虑量的状态本身，比如在什么范围内变化，而且要考虑如何表示状态的不确定性。例如通过对往年降雨量记录及其他气象资料的分析，发现某地区的年降雨量分布在 300 ~ 1200mm 范围内，并且 80% 不超过 800mm。概率论及数理统计就是研究用来描述不确定性变化规律的。概率论作为数学的一个分支，主要考虑如何用数学工具来描述量的状态变化及其不确定性。粗略地说，在概率论中，用概率分布来描述状态变化的不确定性，并进而用概率分布的变化规律来刻画“不确定性”本身的变化。而数理统计则主要考虑如何从试验或观测数据出发来推测量的概率分布及其变化规律。

在实际问题中，上述的“确定性”和“不确定性”之分具有相对性。一方面，在很多情况下，确定性规律是对一种理想条件的描述，比如自由落体运动的公式是在真空状态下的运动规律，在实际应用时，一般忽略因与理想条件的偏离而带来的差异，这种差异往往带有不确定性。换言之，忽略次要的不确定性部分可以导致理想状态确定性规律的发现。反之，在认识确定性规律的过程中，也往往需要处理不确定性，甚至导入不确定性。比如，通过测量总结电流与电压的关系时，需要处理带有不确定性的测量误差；而在区别不同种类轮胎的耐磨性能时，需要用抓阄的方法指定各种轮胎的试验路段，以体现对于轮胎

的公平。正是由于“确定性”和“不确定性”之间的这种相对性，概率论与数理统计的应用十分广泛。

概率论与数理统计所涉及的不确定性现象一般具有如下特征：第一，量的不同状态之间有分明的界定，不确定性是指状态出现的不确定性而非状态之间的不分明；第二，所有可能的状态构成的集合已知，对于一个已经发生的状态能够判明是这些状态中的哪一个；第三，在这种现象可以无限次完全重复的前提下，状态出现的不确定性表现出可以观测的规律。把对满足这些条件的现象进行的观测叫**随机试验**。在随机试验中，每一个可能出现的结果(即量的一个状态)称为**基本事件**，通常用 ω 表示。全体基本事件组成的集合(即所有可能的状态)称为**样本空间**，记做 Ω。Ω 的子集称为**事件**，常用大写字母如 A、B、C 等表示。事件一般由若干基本事件组成。**事件 A 发生**是指随机试验的结果 $\omega \in A$。随机试验中事件的发生与否具有不确定性，这种不确定性又称为随机性，故而事件也称为**随机事件**。

例 1.1.1 检查每 100 米布匹中疵点的数量，得到的结果可以用非负整数来表示，即样本空间 $\Omega = \{0,1,2,3,\cdots\}$，每一个非负整数表示一个基本事件。事件“100 米中疵点数不超过 10”由 11 个基本事件 $0,1,2,\cdots,10$ 组成。若记该事件为 A，则 $A = \{0,1,2,\cdots,10\}$。类似地，事件“100 米中疵点数大于 5 小于 12”可用 $B = \{6,7,8,9,10,11\}$ 表示；事件“100 米中疵点数大于 10”可用 $C = \{11,12,\cdots\}$ 表示。

空集 $\varnothing$ 是 Ω 的子集，因此它也是事件，叫做**不可能事件**。Ω 本身也是事件，叫做**必然事件**。

对于一个随机试验中的事件，定义如下运算和相互关系。

定义 1.1.1 (1) A、B 是两个事件，事件“A、B 两事件至少有一个发生”称为 A 与 B 的和事件，记做 $A \cup B$。

(2) A、B 是两个事件，事件“A 发生而 B 不发生”称为 A 与 B 的差事件，记做 $A \setminus B$ 或 $A - B$。

(3) A、B 是两个事件，事件“A 与 B 同时发生”，称为 A 与 B 的交事件或积事件，记做 $A \cap B$ 或 AB。

A 与 B 的和事件是由 A 中的基本事件与 B 中的基本事件一起组成的事件。A 与 B 的差事件是由属于 A 但不属于 B 的基本事件组成的事件。A 与 B 的积事件是由那些既属于 A 又属于 B 的基本事件组成的事件。

定义 1.1.2 (1) 若事件 A 发生，事件 B 一定发生，则称事件 B 包含事件 A 或事件 A 含于事件 B，记做 $A \subset B$。

(2) 若两事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 互斥或互不相容。

(3) A 为事件，事件“A 不发生”称为 A 的对立事件，记做 $\overline{A}$。

事件 B 包含事件 A 就是指凡是属于事件 A 的基本事件必属于事件 B。若事件 A 与 B 互斥，则 $AB=\varnothing$，反之亦然。$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$。

事件间的运算和关系与集合间的运算和关系相对应，因而有相同的运算规律：

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$
2. 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$
   $A(B-C)=AB-AC$
3. 结合律：$A(BC)=(AB)C=ABC$
   $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$
4. 对偶公式：$\overline{(\cup_{i=1}^{n}A_i)}=\cap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$
   $\overline{(\cap_{i=1}^{n}A_i)}=\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

第一个对偶公式的两端表示事件“任何 A_i 都不发生”，第二个对偶公式的两端表示“$A_1,\cdots,A_n$ 不能同时发生”。

读者不难写出例 1.1.1 中的 $A\cup B$，$A-B$，AB 以及 $\overline{A}$ 等。

1.2　概率

1.2.1　概率的定义与基本性质

随机试验中各种事件发生的可能性有大有小。在实践中人们体会到，对于随机试验中事件发生的不确定性的描述，本质在于对事件发生的可能性的规律的认识。概率就是用来刻画事件发生的可能性大小的数学概念。

考虑掷一枚均匀硬币的随机试验。Z 表示事件“出现正面”，F 表示事件“出现反面”。重复掷币 n 次，n_Z 表示出现正面的次数，比值 $f_n(Z)=n_Z/n$ 叫做 n 次试验中 Z 发生的频率。它反映了事件 Z 发生的可能性大小。但是这个频率不是固定的。一般来说，这 n 次重复掷币中 Z 发生的频率与另 n 次掷币中 Z 发生的频率是不相同的；又当重复次数 n 发生变化时，频率也会有所变化。但随着 n 的增加，Z 发生的频率稳定在 1/2。1/2 就是 Z 发生的概率。历史上有人做过掷硬币的试验，其结果见表 1.1。

表 1.1　掷硬币试验结果

试　验　者	n	n_Z	$f_n(Z)$	试　验　者	n	n_Z	$f_n(Z)$
蒲丰(G. Buffon)	4040	2048	0.5070	皮尔逊(K. Pearson)	24000	12012	0.5005
皮尔逊(K. Pearson)	12000	6019	0.5016				

一般地，设事件 A 在 n 次独立重复试验中发生 n_A 次，比值 $f_n(A)=n_A/n$ 叫做事件 A 在这 n 次试验中出现的频率。当 n 增大时，$f_n(A)$ 稳定在某一数值，称这个值为 A 发生的概率。设随机试验 $\mathscr{E}$ 的样本空间为 Ω，A、B 是两个事件，则在 n 次重复试验中，频率有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。

(2) $f_n(\Omega)=1$。

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$。

由于概率是频率的稳定值，故应有类似结论。研究表明，性质(1)~(3)刻画了概率的本质。于是有下列定义。

定义 1.2.1 设 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为所有事件的全体。$P(\cdot)$ 为定义在 $\mathscr{F}$ 上的函数并满足如下性质 1~3，则对于任意 $A\in\mathscr{F}$，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率，P 称为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为概率空间。

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) $P(\Omega)=1$。

(3) 对两两互斥的事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i) \tag{1.2.1}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.2.2}$$

式(1.2.1)称为有限可加性，式(1.2.2)称为可列可加性。

概率有如下基本性质。

定理 1.2.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，A，$B\in\mathscr{F}$ 是两个事件，则

(1) $P(A)=1-P(\bar{A})$，$P(\varnothing)=0$。

(2)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.3}$$

1.2.2 条件概率与事件的独立性

一个事件的发生有时会改变其他事件发生的可能性。先看下面的例子。

例 1.2.1 有 k 张电影票，由抓阄决定 $n(n>k)$ 个人中谁得票。做 n 个阄，其中有 k 个上写“有”字，其余为空白。一个人接一个人地抓取。试问第 j 个人抓到“有”阄的概率。进一步，若已知第 1 个人抓到“有”，第 2 个人抓到“有”的概率是多少？

解： n 个人一个接一个地抓取，共有 $n!$ 种抓法。第 j 个人抓到某特定阄的抓法共有 $(n-1)!$ 种，而他抓到 k 个“有”阄中任何一个都是抓到“有”，故第 j 个人抓到“有”阄的抓法共有 $k(n-1)!$ 种。由于每种抓法出现的可能性一样

$$P\{\text{第 } j \text{ 个人抓到“有”阄}\}=\frac{k(n-1)!}{n!}=\frac{k}{n}$$

若已知第 1 个人抓到“有”阄，那么第 2 个人抓到“有”阄的概率是 $(k-1)/(n-1)$，不再是 k/n。这是因为有了附加的信息即条件“第一个人抓到有”，故称这个概率为条件概率，记做 $P(A_2|A_1)$，其中 A_i 表示“第 i 个人抓到有”，“$|A_1$”表示“在 A_1 发生的条件下”。显然，$P(A_2|A_1)\neq P(A_2)$。进一步易见，$P(A_1A_2)=k(k-1)/[n(n-1)]$，于是

$$P(A_2|A_1)=\frac{k-1}{n-1}=\frac{\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}}{\dfrac{k}{n}}=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \tag{1.2.4}$$

公式(1.2.4)是有普遍意义的。

定义 1.2.2 设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.2.5}$$

称为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率。

设 Ω 为样本空间，附以条件“A 发生”，相当于将 Ω 压缩，以 A 作为样本空间。条件概率仍满足概率的三条公理(即定义 1.2.1 中的(1) ~ (3))。计算条件概率的方法有两种：

1. 将 A 视作样本空间，计算 B 发生的概率。
2. 在原样本空间 Ω 中，计算 $P(AB)$、$P(A)$，再由条件概率公式(1.2.5)计算 $P(B|A)$。

条件概率公式经常表示为

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1.2.6}$$

此式当 $P(A)=0$ 时仍然成立，并可推广到任意 n 个事件的情形：

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i|A_1,\cdots,A_{i-1}) \tag{1.2.7}$$

这只须反复运用公式(1.2.6)即可得到。

从公式(1.2.6)立即得到一个重要的概念。

定义 1.2.3 若事件 A、B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 和 B 相互独立。

由定义，若两个事件相互独立，则其中一个事件的发生不影响另一个事件发生的可能性。

定理 1.2.2 若事件 A 与 B 相互独立，则事件 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立。

易见，$\varnothing$、Ω 与任何事件独立。独立的概念可推广到任意 n 个事件上。

定义 1.2.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意的 $r(1<r\leqslant n)$ 及任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $r(r\leqslant n)$ 个事件也相互独立。下面给出一例子，说明两两独立不能推出相互独立。

例 1.2.2 有一均匀的正四面体，有三个面上分别写着 1、2、3，另一个面上写了三个数字 1，2，3。掷四面体一次，记 $A=\{$底面出现数字 1$\}$，$B=\{$底面出现数字 2$\}$，$C=\{$底面出现数字 3$\}$，则 A、B、C 三个事件中任何两个均相互独立，但 A、B、C 三事件不是相互独立的。

事实上，由于四面体是均匀的，

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

而 $P(ABC)=1/4\neq P(A)P(B)P(C)$。

有更一般的结果，即对于任意正整数 n，能构造 n 个事件，其中任 $n-1$ 个事件相互独立，但这 n 个事件不相互独立（[2]第 1 章）。

1.2.3 全概率公式与 Bayes 公式

在例 1.2.1 中 $P(A_2)$ 也可如下求得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_2A_1)+P(A_2\overline{A_1})\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})\\&=\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}\end{aligned}$$

此式是所谓全概率公式的特殊情形。

定义 1.2.5 设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是 n 个事件，若 $\Omega=\cup_{i=1}^{n}H_i$ 且两两互不相容，则称 $\{H_i:i=1,2,\cdots,n\}$ 为一个完备事件组。

定理 1.2.3 设 $\{H_i:i=1,2,\cdots,n\}$ 是一个完备事件组，并且 $P(H_i)>0$，$i=1,\cdots,n$，则对任意事件 A，都有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i) \tag{1.2.8}$$

式(1.2.8)称为全概率公式。

全概率公式在计算概率时非常有用。

例 1.2.3 某玩具厂从三个不同厂家购进滚珠轴承。从第一厂家进货 50%，第二厂家 30%，第三厂家 20%。根据以往的经验，第一厂家次品率为 2%，第二厂家为 3%，第三厂家为 4%。试问该玩具厂购进的滚珠轴承的次品率是多少？

解：以 A_i 记“从第 i 厂家购进的轴承”，B 记“购进的轴承为次品”。由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) \\
&= 0.02\times 0.5 + 0.03\times 0.3 + 0.04\times 0.2 \\
&= 0.027
\end{aligned}
$$

即玩具厂购进的轴承次品率为0.027。

应用全概率公式计算概率，关键是选取完备事件组，使得完备事件组中每个事件的概率及相应的条件概率容易计算。在实用中使用全概率公式时，往往可以将完备事件组中各事件视为“原因”，欲计算概率的事件视为后果。例如在诊断病症问题(或设备、仪器的故障)时，知某症状(后果)可由几种原因引起，由长期的实践经验知各种原因发生的概率及在各种原因下产生该症状的概率，就可计算出某种症状发生的概率。

另一方面，从诊病角度看，重要的是找出出现该症状的原因，或在诸原因中哪种原因引起该症状的概率最大。从数学角度看这是全概率公式的反问题，即计算在 A 发生的条件下，诸 H_i 的条件概率。对此有

定理 1.2.4　(Bayes 公式)设 $\{H_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 是完备事件组，$P(A)>0$，$P(H_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$
P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)} \tag{1.2.9}
$$

公式(1.2.9)称为 Bayes 公式。

例 1.2.4　考虑用自动血压计计量血压。以 C 表示被测成人患有高血压，B 表示血压计显示高血压。假定 $P(C)=0.15$，$P(B|C)=0.95$ 及 $P(B|\overline{C})=0.05$。那么若血压计显示高血压，被测成人患有高血压的概率有多大?

解：由 Bayes 公式

$$
\begin{aligned}
P(C|B) &= \frac{P(BC)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|C)P(C)}{[P(B|C)P(C)+P(B|\overline{C})P(\overline{C})]} \\
&= \frac{0.95\times 0.15}{[0.95\times 0.15+0.05\times 0.85]} \\
&= 0.77
\end{aligned}
$$

在医学检验中，$P(B|C)$称为检验方法的灵敏度，$P(\overline{B}|\overline{C})=1-P(B|\overline{C})$称为检验方法的特异度。它们是表征检验方法性能的两个量。读者不妨变动这两个条件概率的数值，观察它们对 $P(C|B)$的影响。

1.3 随机变量及其分布函数

1.3.1 一维随机变量及其分布

在科学研究中，观察一随机现象，其观察结果往往可用一个数量表示。由于结果具有随机性，称该量为随机变量。

定义 1.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，定义在Ω上的单值实函数$X(\omega)$称为随机变量。

例如，掷骰子的点数ζ；火炮的弹着点和目标之间的距离η等等都是随机变量。

随机变量把随机试验的结果映射为实数，便于我们利用数学工具进一步研究随机试验。为了刻画随机试验的性质，以后经常考虑形如$\{\omega: \omega\in\Omega, X(\omega)\in B\}$的随机事件，也经常简记为$X\in B$，这里$B$是一个实数集合。

1. 离散型随机变量

定义 1.3.2 若随机变量X只取有限个值或可列无穷个值，则称X为离散型随机变量。设X可能的取值为$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$。记$p_n=P\{\omega: X(\omega)=x_n\}=P(X=x_n)$，$n=1,2,\cdots$，则称$\{p_1,p_2,\cdots\}$为随机变量$X$的概率函数或概率分布。

显然概率函数满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$。

例 1.3.1 （单点分布）若随机变量X概率为1地取常数值c，即$P(X=c)=1$，则称其服从单点分布或退化分布。此时X可视为常数。

例 1.3.2 （两点分布）若随机变量只取两个值，称其分布为两点分布。分别以0，1表示两个取值，则分布可以表示为

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

例如一批产品，次品率为p。今随机地抽取一件产品，若为次品，记$X=1$，否则记$X=0$，则X服从上述的两点分布，记做$X\sim B(1,p)$。

例 1.3.3 （二项分布）考虑 Bernoulli（伯努利）概型。设在一次试验中事件A发生的概率为$p\in(0,1)$，X表示n次独立重复试验中事件A发生的次数，则有

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n$$

称X服从二项分布，记做$X\sim B(n,p)$。

例 1.3.4 （Poisson（泊松）分布）设离散型随机变量X可能的取值为所有非