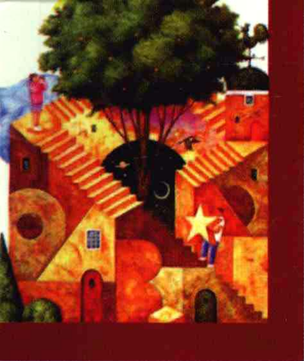

湖南省独立学院教学改革专用教材

主　编　周铁军　何小飞

副主编　贾　茗　刘月华

李小平　周玉元

高等数学

Education of Higher Mathematics for College Student

湖南省教学教改立项课题

湖南省独立学院联席会　组织编写

课程将数学基础知识、数学建模和数学实验有机融合，让学生全面了解知识的来龙去脉，并学会用数学，克服了传统数学教学只注重数学自身知识讲授的弊端。有效地解决了学生学习目的不明确，学习兴趣难以调动的状况。通过数学案例教学和数学实验等实践教学环节，加强数学与实际生活和专业的结合，将理解概念落实到用数学思想及数学概念消化、吸纳工程概念及原理上，强化应用落实到使学生能方便地用所学数学知识和方法建立并求解数学模型上，培养了学生的数学应用能力。

www.csupress.com.cn

中南大学出版社

高 等 数 学

主　编　周铁军　何小飞
副主编　贾　茗　刘月华
　　　　李小平　周玉元

中南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/周铁军主编．—长沙：中南大学出版社，2008．8

ISBN 978-7-81105-650-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．周…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 112408 号

高等数学

主编　周铁军　何小飞

□责任编辑　谢贵良
□责任印制　汤庶平
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　　邮编：410083
发行科电话：0731-8876770　　传真：0731-8710482
□印　　装　长沙瑞和印务有限公司

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 14.75　□字数 362 千字
□版　　次　2006 年 9 月第 1 版　□2008 年 9 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-81105-650-1
□定　　价　28.00 元

《湖南省独立学院教学改革专用教材》编审委员会

主任委员 李厚德 邹冬生

委　　员 (按姓氏笔画为序)

王海东 邓双喜 刘巨钦 刘国权 佘佐辰

周长安 张合平 李光中 陈勃生 陈 熙

侯国宏 柳克奇 荆光辉 钟定铭 郭迎福

《高等数学》编写委员会

主　编 周铁军 何小飞

副主编 贾 茗 刘月华 李小平 周玉元

编　委 (按姓氏笔画为序)

马 林 刘月华 刘春生 李小平 张 勤

周铁军 周玉元 范伟平 郑彭丹 贾 茗

曹玉芬 潘一格

总　序

作为中国高等教育制度创新产物的独立学院，自产生以来已走过了九年历程。在短短九年时间里，普通高校采用民办机制吸收社会力量参与办学的独立学院，快速崛起，成为我国高等教育重要的新的增长点，据2007年教育事业统计，全国共有独立学院318所，在校生186.6万人，占全国民办高等教育在校生总数的53.4%；其中，独立学院本科在校生165.7万人，占全国民办本科高等教育在校生总数的88.7%。独立学院对实现高等教育大众化、深化高等教育改革发挥了重要作用。

根据教育部关于独立学院培养适应地方、区域经济和社会发展需要的"本科应用型高级专门人才"的指示精神，相对而言，独立学院培养的学生既要有较系统的学科基础理论，具有一定的创新与技术革新的理论能力，又要有较强的动手能力、应用技术的能力。亚里士多德曾经将人类的知识分作三大类，纯粹理性、实践理性和技艺，作为中国高等教育制度创新产物，独立学院的人才培养目标正要求将这三者完美地融合在一起。

教材，是体现教学内容和教学要求的知识载体及进行教学的基本工具，是高等学校学科建设成果的凝结与体现，也是深化教育教学改革、保障和提高教学质量的重要基础。教材对高等学校的存在与发展具有举足轻重的作用。今天，绝大多数独立学院的教材还是选用"一本"和"二本"教材，也有部分学校或专业选用高职高专的教材。相对于独立学院来说，前者内容深、理论性强，既不适合学生学习，也导致任课教师在教学上陷入困境；后者则理论过简，脱离了"本科"培养层次的要求。这显然有悖于独立学院培养目标的要求及其生源特点。组织教学改革，开发独立学院特色教材，是提高独立学院竞争力，实现其人才培养目标的迫在眉睫的工作。

2007年9月30日，湖南省教育厅相关部门负责人、在湘15所独立学院院长和中南大学出版社负责人齐聚中南大学铁道校区举行了"湖南省独立学院教材研讨会"，拉开了合力打造"湖南省独立学院教学改革专用教材"的序幕。此后，历经梯次开发湖南省独立学院特色教材规划制定、主参编人员甄选、书稿评审等，湖南省教育厅高等教育处和民办教育处负责人、在湘独立学院母体学校领导和湖南15所独立学院负责人都对之予以了高度关注、认真督察和最大支持。

今天，由湖南省独立学院联席会组织编写、中南大学出版社出版的"湖南省独立学院教学改革专用教材"终于陆续正式出版并投入使用，这既是湖南省教育厅教学教改立项课题"独立学院人才培养与配套教材建设与研究"的标志性成果之一，又是推动广大独立学院师生教学相长、教学相得，提高独立学院毕业生就业核心竞争力的一项基础性工作，很有意义。

湖南省独立学院教学改革专用教材的建设符合在新机制、新模式下探索和创新高层次应

用型人才培养的要求。编写工作围绕“够用”“实用”“与全面素质教育相结合”三个原则进行，以独立学院的办学性质、专业设点、培养目标、教学要求为依据，深入浅出，着力引导广大独立学院师生实现社会需要和学校教育的准确对接。

遵循“够用”原则，教材编写打破传统理论体系，通过行业分析和任务分析方法确定课程内容。即将某一行业的总要求分解为若干工作任务，然后按实际需要确定每一任务的具体能力要求及相应的知识与技能要求，然后将任务所需知识和技能按难易程度、逻辑关系以及这些任务在今后实际工作中的重要性加以系统地组织编排，使之成为以形成某方面能力为目标的教学单元。采用这种完全根据实际需要确定教学内容的方法，使这套应用型本科教材要求的“够用”原则有了实实在在的根据。

秉持“实用”原则，强调新技术、新工艺，突出技能训练，注重可操作性。教材编写人员充分了解本课程在实际应用中的情况后，将用人单位的需求正确地反映到教学活动中和教材编写中，通过典型案例的综合应用，增加学生在实际工作中解决问题的能力，引导学生从“认识、实践，再认识、再实践”的过程中对知识进行系统理解。在教材的编排上，打破了研究性教材的编写套路，先易后难，确保基础知识的有效教学。

坚持“与全面素质教育相结合”原则，教材的编写服务于应用型、外向型、复合型人才的培养模式，适合应用型本科院校的办学特色，注重对独立学院学生人格魅力培养、社会生存能力培养和创新能力培养。根据完善知识结构、提高综合素质的要求，加强科学知识、科学精神、科学方法的培训，开展文学、艺术、历史等人文知识的学习，着力提高广大独立学院学生的科学素养和文化素养，以有效提升独立学院毕业生的就业核心竞争力。

“湖南省独立学院教学改革专用教材”贯彻了为培养“应用型高级专门人才”的教学和科研服务的基本原则。主参编人员选用有多年独立学院教学经验、治学严谨的优秀教师。在教学上各有所长、来自不同独立学院的教师以高度的社会责任感，协同配合，相互启发，相互砥砺，一起讨论写作提纲、体例和书稿，并在部分高校试用，根据教学效果修订书稿。民办教育将对我国整个教育体制改革产生深刻的影响，对于正在迅速发展中的独立学院来说，抓住教材建设这一重要环节，加强各科教材、特别是适应独立学院专业特点和教学要求的应用型教材的建设，是实现长期稳步发展的基本保障，也是体现独立学院办学特色的基本要求。我们要适应新形势新任务的要求，针对独立学发展的实际需要，统一规划，总结经验，加以完善，努力把教材的编写工作做得更好，将之打磨成在全国有一定影响的高质量的独立学院经典教材。

前　言

独立学院是我国近几年来迅速发展的一种新型高等教育办学模式，它的培养目标定位在培养“应用型人才”的层面，应该主要培养基础扎实、知识面宽、实践动手能力强、与人才市场需求“零距离”的应用型实用人才。

由于目前独立学院都是依托“教学研究型”的母体学校创办的。在教学研究型大学，《高等数学》不仅仅是一门学习其他专业课程的重要基础课程，而且它还肩负着以培养学生数学思维能力的重担。通过本课程的开设，传授给学生近现代数学的基本知识、基本技能，以提高实际工作能力。同时通过本课程的学习，学生能够掌握数学的思维方式，获取用数学量化观点解决实际问题的数学思想。这些教学指导思想，充分反映在目前“教学研究型”大学的高等数学教材的编写及教学过程中，与独立学院的“应用型”办学思想存在一定的差异。因此，湖南省独立学院联席会组织了湖南农业大学东方科技学院、中南林业科技大学涉外学院、吉首大学张家界学院、湖南工业大学科技学院等全省相关独立学院编写了《高等数学》教材，以适应独立学院应用型人才培养目标的要求，满足专业课程教学的需要。

根据独立学院的特点，在编写本教材时我们采取了以下的编写思路。

1. 按“理论注重基础，应用强化能力”的原则，强调对基础知识的介绍，淡化对理论的深入分析。

2. 按照“基础理论以应用为目的，以必需够用为度”的原则，将每章知识分为基础知识与应用知识两部分，对于基础知识，注重每个数学概念的引入及它的意义的介绍，要通过应用知识的介绍来培养学生解决实际问题的能力。

3. 介绍知识时，注重直观性，如在教材中多用图形进行说明、多用生活中常见的现象举例。

4. 把握好“基础理论以应用为目的，以必需够用为度”的原则，在注意“理论以应用为目的”的同时，还要注意数学理论的体系结构；在执行“以必需够用为度”的时候，以“够用”为主，精简内容，但同时要注意知识的前后关联性，体现知识的“必需”性。

5. 从概念引入、理论介绍、知识应用、举例等各方面注意把握好难度，应以“浅显易懂”为主要原则。

在以上思路的指导下，本教材具有以下特色。

1. 在组织理论体系时，以应用知识为目的，通过对知识的引入，意义、应用的介绍，达到培养学生应用数学解决实际问题的能力。

2. 教材很好地体现与恰到好处地把握了“基础理论以应用为目的，以必需够用为度”的原则。

3. 教材通过大量的图示来直观地反映数学概念与知识，浅显易懂，适合独立学院的教学。

参加本教材编写的人员有周铁军教授、李小平教授、周玉元副教授、刘月华副教授、贾茗老师、刘春生老师、曹玉芬老师、张勤老师、潘一格老师、郑彭丹老师、马林老师、范伟平老师等。

教材中难免存在不足之处，恳请使用本教材的各位教师和同学们提出宝贵意见。

编者

2008年5月

致同学们

我们这本《高等数学》教材，只含微积分部分，她是各类大学绝大部分专业的必修课，同学们在进入大学的第一学期里就要遇到她。那么，这是一门什么样的课程？它在我们所学的专业中有什么作用？如何学好她呢？

微积分是人们认识客观世界中关于变量的运动、变化和发展的有力工具。通过把客观世界的对象抽象为函数，进而用微积分作为工具研究它的性态，我们就可以理解甚至发现客观世界的运动变化规律，所以微积分的研究对象主要是函数。微积分中一对非常重要的基本概念是微分和积分。积分思想来源于求面积与体积。我国古代数学家刘徽的“割圆术”就体现了原始的积分思想。导致微分产生的核心问题是求曲线的切线问题，当然已知物体的位移，如何求运动物体在任意时刻的速度和加速度这类关于变化率的问题也离不开微分的思想。牛顿(L. Netween)和莱布尼兹(G. W. Leibnitz)两位伟大的数学家对微积分思想的建立作出了巨大的贡献。

微积分的基本方法是极限方法，它是贯穿全书诸多概念的一个重要方法。有了极限的方法，我们就可以研究函数的连续性、可微性、可积性，就可理解广义积分和级数的收敛性。

恩格斯指出：“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，而且也表明过程、运动。”一个学理工科的同学在它的后续专业课程的学习过程中不难体会恩格斯的这句话的深刻含义。实际上，高等数学在文科专业特别是经济学、管理学等学科中也有着广泛的应用，例如边际分析、弹性分析就是以微积分理论为基础的，在生产计划、市场分析、质量管理等方面也需要微积分这一重要工具。

全世界的各类大学课程可以说五花八门，但是有超过60%的学生都要学习同一门课程，这就是微积分。为什么有如此多的学生学习微积分？因为微积分是我们人类最伟大的发明，是我们人类智慧的体现，她不但培养我们的逻辑思维能力，而且她教会我们如何解决实际问题。可能有些同学在工作以后再也不会使用微积分告诉我们的概念、定理、计算方法，但是可以肯定通过微积分学习而形成

的逻辑思维的条理性、缜密性将有助于同学们未来的工作。

逻辑思维能力是我们在学习微积分这门课程的过程中通过对概念、定理、性质的分析、理解后不知不觉、潜移默化地形成的。所以我们在学习过程中不必太在意自己的思维能力是否有显著的提高。我们要把注意力放在微积分的应用上，这是我们学习这门课程的最主要目的。这种应用知识解决实际问题的能力来源于我们对每个概念的理解、对每种方法的掌握。微积分中的每个概念，如导数、积分等，都是人类为了解决某类实际问题而抽象出来的，我们在学习时，一定要重视每个概念的引例的分析，因为引例的学习可以帮助我们对概念的理解，可以提高我们将来解决实际问题的能力。

微积分的学习不同于其他课程，没有教师的指导是很难学好她的。老师一般都会用浅显易懂的方法讲解抽象的数学概念与方法，而这种清晰的讲解在教材上一般都没有，因此，学习微积分的首要方法是把握好老师的课堂教学。另外，不管是在课堂上听课，还是在课前预习或课后复习，我们都不要吝啬我们的纸和笔。很多同学反映听课时听得懂，但一到自己做时却不知如何处理，这说明我们没有掌握好老师的讲课内容，所以我们在课堂上要记一记老师讲的东西，方便我们课后查看。课前预习的时候，比如预习某某新的概念引入，我们可以试着想一想如何解决这样的问题，说不定自己真的能解决它，这时我们就会有莫大的成就感。即使没能解决它，我们也能带着问题继续预习下面的内容。课后复习的时候，我们不妨先不忙着看教材上例子的解答，而自己动手做一做它，然后再来看看解答。最后，除了做好作业，我们还要多做其他练习。练习可以帮助我们巩固知识，最重要的是它可以提高我们解决实际问题的能力。

没有我们学不会的知识，只有我们不愿学习的知识。全世界有这么多的同龄人跟你一起学习微积分，我们应该知道她的重要性，对自己重要的知识，无论如何我们都要去努力学习她。相信同学们有能力学好微积分。

周铁军于湖南农业大学

2008 年 4 月 29 日

目　录

第一章　函数与极限 …… (1)

第一节　函数 …… (1)
第二节　数列的极限 …… (9)
第三节　函数的极限 …… (13)
第四节　无穷小量与无穷大量 …… (17)
第五节　极限的运算法则 …… (19)
第六节　两个重要极限 …… (21)
第七节　无穷小量的比较 …… (23)
第八节　函数的连续性 …… (25)
第九节　闭区间上连续函数的性质 …… (28)

第二章　导数与微分 …… (31)

第一节　导数的概念 …… (31)
第二节　函数的求导法则 …… (36)
第三节　高阶导数 …… (41)
第四节　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数 …… (43)
第五节　函数的微分 …… (47)

第三章　微分中值定理与导数的应用 …… (53)

第一节　微分中值定理 …… (53)
第二节　洛必塔法则 …… (57)
第三节　函数单调性的判定法 …… (60)
第四节　函数的极值与最大值、最小值 …… (61)
第五节　曲线的凹凸性及拐点 …… (66)
*第六节　函数图形的描绘 …… (69)
第七节　导数在经济分析中的应用 …… (71)

第四章　不定积分 …… (76)

第一节　不定积分的概念与性质 …… (76)
第二节　换元积分法 …… (80)
第三节　分部积分法 …… (88)

第五章　定积分 ……………………………………………… (92)

第一节　定积分的概念与性质 ……………………………………… (92)
第二节　微积分基本公式 ……………………………………… (98)
第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 ……………………… (104)
第四节　广义积分 ……………………………………… (109)
第五节　定积分的应用 ……………………………………… (113)

第六章　微分方程 ……………………………………………… (126)

第一节　微分方程的基本概念 ……………………………………… (126)
第二节　一阶微分方程 ……………………………………… (128)
第三节　可降阶的高阶微分方程 ……………………………………… (133)
第四节　二阶线性微分方程 ……………………………………… (135)

第七章　空间解析几何与多元函数微分学 ………………………… (141)

第一节　空间解析几何简介 ……………………………………… (141)
第二节　多元函数的基本概念 ……………………………………… (147)
第三节　二元函数的偏导数 ……………………………………… (154)
第四节　全微分 ……………………………………… (158)
第五节　复合函数及隐函数的微分法 ……………………………… (161)
第六节　二元函数的极值与最值 ……………………………………… (166)

第八章　二重积分 ……………………………………………… (171)

第一节　二重积分的概念与性质 ……………………………………… (171)
第二节　二重积分的计算 ……………………………………… (177)
第三节　广义二重积分 ……………………………………… (186)

第九章　无穷级数 ……………………………………………… (189)

第一节　常数项级数的概念和性质 ……………………………………… (189)
第二节　常数项级数的收敛性 ……………………………………… (195)
第三节　幂级数 ……………………………………… (201)
第四节　泰勒公式与泰勒级数 ……………………………………… (207)

附录 I　常用初等数学公式 ……………………………………… (213)

附录 II　常用积分公式 ……………………………………… (215)

第一章　函数与极限

教学目标

(1)理解函数，函数的图象、奇偶性、单调性、周期性和有界性等概念与性质；

(2)理解复合函数、反函数、初等函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图象；

(3)理解数列极限的概念与函数极限、左极限与右极限的概念；

(4)了解函数极限的性质，掌握利用函数极限的四则运算法则及两个重要极限求有关的极限；

(5)理解无穷小和无穷大的概念，掌握无穷小的比较，会用等价无穷小求极限；

(6)理解函数连续与间断的概念，会判别函数间断点的类型；

(7)了解闭区间上连续函数的性质，掌握这些性质的简单应用.

函数是数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章主要讲述变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的性质.

第一节　函数

一、集合

1. 集合的概念

集合是现代数学中一个很重要的概念，所谓集合，就是指具有某种特定性质的事物的全体，组成集合的每一个事物称为该集合的元素. 习惯上，我们常用大写字母 A, B, C, …表示集合，用小写字母 a, b, c, …表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A. 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$. 常用的子集有：

$\mathbf{N}$ 表示自然数集；$\mathbf{Z}$ 表示整数集；$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

2. 区间与邻域

区间是高等数学中很重要的实数集，我们常用一个区间表示一个变量的变化范围，区间分为有限区间和无限区间两种.

(1)有限区间. 设 a, b 是两个实数，且 $a<b$，则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$，类似地，$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$；$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 分别称为闭区间及半开半闭区间.

(2)无限区间. 引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示

无限区间:

$(-\infty, a)=\{x|x<a\}$; $(-\infty, a]=\{x|x\leqslant a\}$; $(a, +\infty)=\{x|x>a\}$; $[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,

特别地，实数集 $\mathbf{R}$ 也可以表示成无限区间 $(-\infty, +\infty)$.

3. 邻域

设 a, $\delta\in\mathbf{R}$, 且 $\delta>0$. 我们把以 $a-\delta$, $a+\delta$ 为端点的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 领域，记作 $U(a, \delta)$, a 和 δ 分别称为这邻域的中心和半径. 由于 $x\in(a-\delta, a+\delta)$ 当且仅当 $a-\delta<x<a+\delta$, 亦即 $|x-a|<\delta$, 因此有

$$U(a, \delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

如果把邻域 $U(a, \delta)$ 的中心 a 去掉，就称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

在不需要特别指明邻域半径 δ 的情况下，这时我们往往把点 a 的邻域和点 a 的去心邻域分别简记为 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$.

二、函数概念

在某一自然现象或实际问题的过程中，往往同时有几个变量在变化，这几个变量并不是独立变化的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 下面先看几个例子:

例 1 在初速度为零的自由落体运动中，路程 s 和时间 t 是两个变量，当时间 t 变化时，所经历的路程也跟着变化，由物理学知道 s(米)与 t(秒)之间有下列关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度(通常取 $g=9.8$ 米/秒^2). 如果物体从开始下落到着地所需的时间为 T, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取一个数值时，由上式就可以确定下落路程 s 的相应数值.

例 2 图 1－1 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的对应关系.

当时间 t 在闭区间 $[0, 24]$ 内任取一值时，从图 1－1 中的曲线可找出气温 T 的对应值.

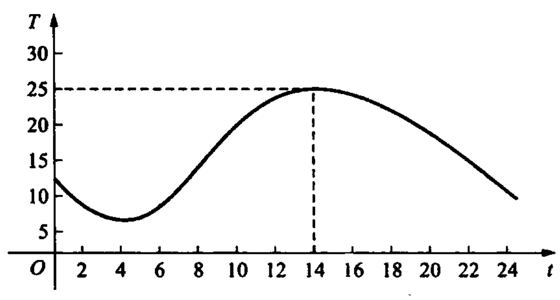

图 1－1

例 3 某汽车制造厂 2005 年汽车月生产量如下表所示:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量(百台)	2.2	2.6	3.1	3.2	2.9	2.6	2.8	3.0	2.1	2.4	2.2	3.1

从上表可以看出2005年汽车制造厂月产量 x（百台）与月份 t 之间有着确定的对应关系. 当月份 t 在1至12之间每取一整数值时，从表中便得出月产量 x 的唯一确定的对应值.

以上的例子所考虑的量的实际意义各不相同，但却有共同的特征：它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这个法则，当一个变量在它的变化范围内任意取定一个值时，另一个变量有一个确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个非空数集，f 是一个对应法则. 如果对于 D 中的每一个 x，变量 y 按照对应法则 f，都有确定的实数和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每个数值时，全体函数值组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域.

关于函数概念，我们作以下几点说明：

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可用其他字母来表示，例如"φ"，"F"等等，这时函数就可以记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$.

由函数的定义可以看出，确定一个函数必须知道它的定义域 D、对应法则 f 和值域 W. 但当 D 与 f 确定之后，W 也就随之确定. 因此定义域 D 和对应法则 f 是决定函数的两个要素. 为了突出表现函数的这两个要素，我们习惯于用

$$y=f(x),\ x\in D$$

来表示一个函数. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表示的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量 x 所能取的使算式有意义的一切实数构成的集合，例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$.

由函数的定义可知，对于自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则，对应的函数值有几个，甚至无穷多个，这种函数叫做多值函数. 例如，函数 $y=2x+1$ 是一个单值函数，而函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 则是多值函数. 以后凡未作特别说明时，所讨论的函数都是指单值函数.

三、函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法. 常用的方法有解析法、表格法、图象法，在例1中，函数的对应法则是用一个解析式来表示，这种表示法称为解析法. 在例3中，函数的对应法则用一张表格来表示，这种表示法称为表格法. 例2中函数的对应法则是通过坐标平面上的一段曲线来表示，这种表示法称为图象法.

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一个点 (x,y)，则点集 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\},$$

就描出这个函数的图形（或图象）.

以上表示函数的三种方法各有其特点：表格法可以直接查用；图象法来得直观；而解析法形式简明，便于作理论研究和数学计算. 因此解析式理所当然成为我们今后表示函数的主要形式.

下面介绍几个例子.

例4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图1-2所示.

例5 取整函数 $y=[x]$，这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如，$[-3.4]=-4$，$[3.4]=3$，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\mathbf{Z}$，图形如图1-3所示：

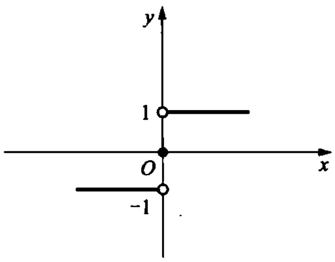

图1-2

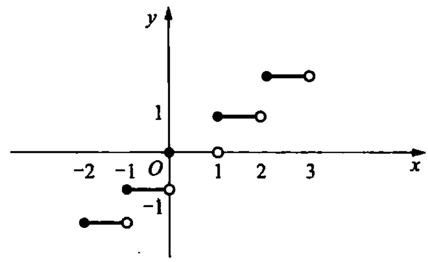

图1-3

四、函数的简单性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义，若存在常数 K_1(或 K_2)，满足

$$f(x)\leqslant K_1\ (\text{或} f(x)\geqslant K_2),\ x\in D$$

则称函数 $y=f(x)$在 D 上有上界(或有下界). 若存在正数 M，满足

$$|f(x)|\leqslant M,\ x\in D,$$

则称$f(x)$在 D 上有界. 否则称$f(x)$在 D 上无界，即对任意给定正数 M(无论多大)，总存在 $x_1\in D$，使$|f(x_1)|>M$. 例如函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[2, +\infty)$上有界，因为存在 $M=\dfrac{1}{2}$，使对一切 $x\in[2, +\infty]$有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$. 而在$(0, 1)$内却是无界的，因为对任意给定正数 $M>1$，总存在 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0, 1)$，使$|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果对(a, b)内任意两个数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称$f(x)$在(a, b)内单调增加(或单调减少). 如果当 $x_1<x_2$ 时，总有$f(x_1)<f(x_2)$ (或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称$f(x)$在(a, b)内严格单调增加(或严格单调减少).

单调增加(或严格单调增加)的函数和单调减少(或严格单调减少)的函数统称为单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$, 其中 D 关于原点对称, 即当 $x\in D$ 时有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$, 总有

$$f(-x)=-f(x)\ [\text{或} f(-x)=f(x)],$$

则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

例如, $f(x)=x^3$ 是奇函数, $g(x)=x^2$ 是偶函数, 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$, 总有

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

又如在三角函数中, 正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数, 余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数, 而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

在坐标平面上, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$. 若存在常数 $T\neq 0$, 使对任意 $x\in D$, 总有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

显然, 若 T 为 $f(x)$ 的一个周期, 则 $kT(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 也都是它的周期, 所以一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

并非任何周期函数都有最小正周期, 如狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是周期函数, 任何正有理数都是它的周期, 因此它没有最少正周期.

五、复合函数和反函数

1. 复合函数

在实际问题中, 我们会经常遇到两个函数之间发生联系的情况, 有时需要把两个或两个以上的函数组合成另一函数. 如由函数 $y=u^5$, $u=\cos x$, 组合成 $y=\cos^5 x$, 我们称函数 $y=\cos^5 x$ 是由 $y=u^5$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的复合函数.

一般地, 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W_φ, 如果 $D_f\cap W_\varphi\neq\varnothing$, 则函数 y 称为 x 的复合函数, 记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

在组成复合函数时要注意如下事实:

(1)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数;

例如, 函数 $y=\ln u$, $u=-x^2-1$, 显然 $D_f\cap W_\varphi=\varnothing$, 故这两个函数不能复合成复合函数.

(2)复合函数可以由两个以上的函数复合而成.

例如, 由三个函数 $y=\mathrm{e}^u$, $u=v^2$, $v=3x+2$ 复合而成的函数为

$$y=\mathrm{e}^{(3x+2)^2}.$$