

■ 专转本复习指南丛书编委会 编



专转本

复习指南

高等数学

GAODENG SHUXUE

- ★ 2008年 最新题型
- ★ 真题集萃 专家评析
- ★ 难点突出 事半功倍
- ★ 题型丰富 高效实用



南京出版社

责任编辑 赵育春

封面设计 周 涌

专转本

复习指南

- 大学英语
- 大学英语模拟试卷
- 计算机应用基础
- 计算机应用基础模拟试卷
- 高等数学
- 高等数学模拟试卷
- 大学语文
- 大学语文模拟试卷

ISBN 978-7-80718-426-3



9 787807 184263 >

20.50

全套定价：156.50元

■ 专转本复习指南丛书编委会 编



专转本 复习指南

高等数学

专转本复习指南丛书编委会：

钱浩希 李宁妹 许淑臣 高江宁 王晓娟 汪小艳
杜秀清 罗正军 孙芝兰 李柯伟

本册主编：钱浩希 李宁妹

南京出版社

图书在版编目(CIP)数据

专转本复习指南·高等数学/专转本复习指南丛书编委会编. —南京:南京出版社,2008.10

ISBN 978-7-80718-426-3

I. 专… II. 南… III. 高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 IV. G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 153071 号

书 名:专转本复习指南·高等数学

作 者:专转本复习指南丛书编委会

出版发行:南京出版社

社址:南京市成贤街 43 号 3 号楼 邮编:210018

网址:<http://www.njpbs.com>

联系电话:025-83283871(营销) 025-83283883(编务)

电子信箱:njpbs1988@163.com

特约编辑:黄秀琴

责任编辑:赵育春

装帧设计:周 涌

印 刷:南京市溧水秦源印务有限公司

开 本:787 mm×1092 mm 1/16

印 张:92.25

字 数:2158 千字

版 次:2008 年 10 月第 1 版

印 次:2008 年 10 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-80718-426-3

定 价:156.50 元(共八册)

南京版图书若有印刷技师问题可向本社调换

前 言

正德职业技术学院在历年“专转本”考试中均取得骄人成绩。这一成绩的取得与“专转本”辅导班一线主讲教师的付出是分不开的。这些教师在多年的“专转本”辅导过程中,积累了丰富的经验,整理出了整套的内容完备的复习资料。应广大“专转本”考生的要求,我们组织这些教师在现有复习资料的基础上,经反复修改充实后,集书成套出版,以供广大考生共享。

这套丛书包括大学英语、计算机应用基础、高等数学、大学语文四门科目。每一科目又分为“复习指南”和“模拟试卷”。在编写过程中,这套丛书主要体现了以下几个特点:

一、整套丛书紧扣“专转本”选拔考试要求。“专转本”考试在江苏省已实行多年。纵观历年考试,考试的内容和题型可以说是“稳中有变”。这套丛书的编者密切关注历年的命题特点,研究对策,预测动向,体现了很强的针对性。

二、复习内容简明扼要,重点突出。“专转本”考试的内容覆盖面广,知识含量大。为了帮助广大考生提高复习效率,保证复习效果,这套丛书力争做到知识叙述简明扼要,考试重点难点突出。

三、解题方法叙述详尽,题型丰富。考生在使用时会发现,这套丛书非常实用、好用。这套丛书的编者在长期的教学过程中深切体会到,应对“专转本”考试,没有大量的练习是不行的,但如果只是大量做习题,而没有解题方法的总结与指导,同样也会事倍功半。因此,这套丛书除了详尽叙述解题方法之外,还配以丰富的练习,帮助考生更好地掌握知识点和解题方法。

这套专转本复习指南丛书能如期付梓出版,离不开学院有关领导和老师的大力支持,也离不开南京出版社赵育春编辑的辛勤付出,在此一并表示深深的感谢。与此同时,也希望广大师生和读者能给我们提出宝贵的意见,使此套丛书的出版更加完善。

编者

2008年金秋于翠屏山下

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
§ 1.1 函数	1
§ 1.2 极限	6
§ 1.3 无穷大与无穷小	12
§ 1.4 函数的连续性	15
专转本真题解析	21
练习题一	23
第二章 一元函数微分学	26
§ 2.1 函数导数与微分的概念	26
§ 2.2 函数导数的求法	30
§ 2.3 微分中值定理	40
§ 2.4 罗必达法则	42
§ 2.5 导数的应用	47
专转本真题解析	57
练习题二	62
第三章 一元函数积分学	65
§ 3.1 不定积分的性质与常用积分公式	65
§ 3.2 积分的基本方法	67
§ 3.3 定积分的性质与计算	77
§ 3.4 无穷区间上的广义积分	85
§ 3.5 定积分的应用	86
专转本真题解析	93
练习题三	97
第四章 微分方程	101
§ 4.1 微分方程的基本概念	101
§ 4.2 一阶微分方程解法	101
§ 4.3 可降阶的高阶微分方程	104

§ 4.4 二阶常系数线性微分方程	105
专转本真题解析	108
练习题四	109
第五章 向量代数与空间解析几何	111
§ 5.1 空间直角坐标系	111
§ 5.2 向量代数	111
§ 5.3 空间平面与直线方程	115
§ 5.4 常见的二次曲面	118
专转本真题解析	120
练习题五	121
第六章 多元函数微分学	124
§ 6.1 偏导数与全微分	124
§ 6.2 高阶偏导数	128
§ 6.3 多元函数的极值	129
专转本真题解析	131
练习题六	132
第七章 二重积分	135
§ 7.1 二重积分化成累次积分与交换积分次序	136
§ 7.2 二重积分的计算	137
§ 7.3 二重积分的应用	141
专转本真题解析	142
练习题七	145
第八章 无穷级数	148
§ 8.1 常数项级数的概念和性质	148
§ 8.2 正项级数敛法	148
§ 8.3 交错级数 级数的绝对收敛与条件收敛	153
§ 8.4 幂级数的收敛半径与收敛区间	155
§ 8.5 函数展开成幂级数	157
专转本真题解析	159
练习题八	161
参考答案	164

第一章 函数、极限与连续

§ 1.1 函数

一、内容概要与重要结论

(一) 函数的定义

设 D 是一个数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照某一规律总有一个确定的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y=f(x)$.

数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域. x 称为自变量, y 称为函数.

对应规律和定义域是函数定义中的两要素. 两个函数仅当它们的对应规律和定义域都相同时, 才是相同的函数.

(二) 函数的简单性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果存在正数 M , 使对于一切 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果不存在这样的正数 M , 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界.

如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域上有界, 则称为有界函数; 否则称为无界函数. 有界函数 $y=f(x)$ 在平面直角坐标系中的图形界于两水平直线之间.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加; 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调增加, 则称 $f(x)$ 为单调增加函数; 如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调减少, 则称 $f(x)$ 为单调减少函数; 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于 $x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意 $x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 在平面直角坐标系中, 偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

既非偶函数又非奇函数的函数称为非奇非偶函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T \neq 0$, 使得对于任意 $x \in D$, 总有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

二、题型分析及解题方法与技巧

题型 1 求函数的定义域

解题方法 依据下列原则确定函数的定义域.

(1) 对于用一个分析表达式表示的函数,其定义域是使函数表达式有意义的全体实数,即应满足以下条件:

- 分母不能为零;
- 负数不能开偶次方;
- 零和负数没有对数;
- 对于 $\arcsin u$, $\arccos u$ 应有 $-1 \leq u \leq 1$.

(2) 分段函数的定义域为各段表达式定义域范围的叠加.

(3) 对于有实际背景的函数,其定义域是使实际问题有意义的全体实数.

例 1 求下列函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$$

解 (1) 由
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) \geq 0 \\ -7 \leq 2x-1 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

所以所求定义域为 $-3 \leq x \leq -2$ 或 $3 \leq x \leq 4$, 即 $[-3, -2] \cup [3, 4]$

$$(2) \begin{cases} x(x-4) \neq 0 \\ \ln(2+x) \geq 0 \\ 2+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 4 \\ 2+x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

所以所求定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 4]$, 求下列函数的定义域

(1) $f(x^2)$

(2) $f(\lg x)$

(3) $f(x+a)$ ($a > 0$)

(4) $f(x+1) + f(x-1)$

解 (1) 由 $0 < x^2 \leq 4$ 得 $x \neq 0$ 且 $-2 \leq x \leq 2$, 故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 2]$

(2) 由 $0 < \lg x \leq 4$ 得 $1 < x \leq 10\,000$, 故 $f(\lg x)$ 的定义域为 $(1, 10\,000]$

(3) 由 $0 < x+a \leq 4$ 得 $-a < x \leq 4-a$, 故 $f(x+a)$ 的定义域为 $(-a, 4-a]$

(4) 由 $\begin{cases} 0 < x+1 \leq 4 \\ 0 < x-1 \leq 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -1 < x \leq 3 \\ 1 < x \leq 5 \end{cases}$, $\therefore 1 < x \leq 3$, 故 $f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域为 $(1, 3]$

题型 2 判断两函数是否为同一函数

解题方法 检查两函数的定义域、对应规律是否相同(与自变量所用字母无关). 若两函数的定义域、对应规律都相同, 则两函数是同一函数. 否则就不是同一函数.

例 在下列各对函数中, 哪些是同一函数

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $g(x) = x + 1$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2} \text{ 与 } g(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \lg x^2 \text{ 与 } g(x) = 2 \lg x$$

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$ 且对应规律也相同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 1$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 两者定义域不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$ 且对应规律也相同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$, $g(x)$ 的定义域为 $x > 0$, 两者定义域不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

题型3 求函数的表达式

(1) 已知 $f(x)$, $\varphi(x)$ 的表达式, 求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式

解法 将 $f(x)$ 表达式中的 x 用 $\varphi(x)$ 代入.

例1 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$), $\varphi(x) = 1-x$, 求 $f[\varphi(x)]$, $f[f(x)]$, $\varphi[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$

$$\text{解 } f[\varphi(x)] = \frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)} = \frac{x}{2-x} \quad (x \neq -1, x \neq 2)$$

$$f[f(x)] = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = x \quad (x \neq -1)$$

$$\varphi[f(x)] = 1-f(x) = \frac{2x}{1+x} \quad (x \neq -1)$$

$$\varphi[\varphi(x)] = 1-\varphi(x) = x \quad (x \neq -1)$$

例2 设 $f(x) = \cos x$, $f[\varphi(x)] = 2-x^2$, 求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域

解 由 $f(x) = \cos x$ 可得 $f[\varphi(x)] = \cos \varphi(x)$; 由 $f[\varphi(x)] = 2-x^2$ 可知 $\cos \varphi(x) = 2-x^2$

$$\therefore \varphi(x) = \arccos(2-x^2)$$

其定义域由不等式 $-1 \leq 2-x^2 \leq 1$ 解得 $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ 及 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

$$\therefore \varphi(x) \text{ 的定义域为 } [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$$

(2) 已知的 $f[\varphi(x)]$ 表达式, 求 $f(x)$ 的表达式

解法1 代换法——令 $u = \varphi(x)$ 由此解出 $x = g(u)$, 代入 $f[\varphi(x)]$ 表达式中得 $f(u)$ 的表达式, 然后将 u 换写成 x , 即得 $f(x)$ 的表达式.

解法2 拼凑法——将 $f[\varphi(x)]$ 表达式的右端凑成 $\varphi(x)$ 的形式, 然后将 $\varphi(x)$ 换写成 x , 即得 $f(x)$ 的表达式.

例1 已知 $f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x + 1$, 求 $f(x)$

解法1 (代换法)

$$\text{令 } u = e^x + 1, \text{ 则 } x = \ln(u-1)$$

$$\text{于是 } f(u) = e^{2\ln(u-1)} + e^{\ln(u-1)} + 1 = (u-1)^2 + u - 1 + 1 = u^2 - u + 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1$$

解法2 (拼凑法)

$$f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x + 1 = (e^x + 1)^2 - (e^x + 1) + 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1$$

例 2 已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x+1}{x^2}$ ($x \neq 0$), 求 $f(x)$

解法 1 (代换法)

$$\text{令 } u = \frac{x+1}{x}, \text{ 则 } x = \frac{1}{u-1}$$

$$\text{于是 } f(u) = \frac{\frac{1}{u-1} + 1}{\frac{1}{(u-1)^2}} = \frac{u(u-1)^2}{u-1} = u(u-1)$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)$$

解法 2 (拼凑法)

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x+1}{x^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1+x-x}{x} = \frac{x+1}{x} \left(\frac{x+1}{x} - 1\right)$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)$$

例 3 已知 $f(2x) = x^2 + 3x + 2$, 求 $f(3x)$

$$\text{解 令 } 2x = 3u, \text{ 则 } x = \frac{3u}{2}$$

$$\text{于是 } f(3u) = \left(\frac{3}{2}u\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2}u + 2 = \frac{9}{4}u^2 + \frac{9}{2}u + 2$$

$$\therefore f(3x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 2$$

例 4 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0$, 求 $f(x)$

$$\text{解 令 } x = -\frac{1}{t} \text{ 代入方程 } 3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0 \text{ ① 得 } 3f\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{4}{t^2} f(t) - 7t = 0, \text{ 即 } 3f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{x^2} f(x) - 7x = 0 \text{ ②}$$

$$\text{由 ①、② 消去 } f\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ 得 } f(x) = 4x^3 + \frac{3}{x}$$

题型 4 求函数值——已知 $f(x)$ 表达式, 求 $f(a)$ 的值

解题方法 将 $f(x)$ 表达式中的 x 用 a 代入计算, 注意: 分段函数求函数值必须代入自变量所在区间的表达式中计算.

$$\text{例 设 } f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \leq 0 \\ 1 + \sin x & 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{x} & x \geq \pi \end{cases} \text{ 求 } f(-1), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f(3\pi)$$

$$\text{解 } f(-1) = e^{-2}, f(0) = e^0 = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2, f(\pi) = \frac{\pi}{\pi} = 1, f(3\pi) = \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$$

题型 5 求反函数——已知函数 $y=f(x)$, 求其反函数

解题方法 从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$, 将 x 换写成 y , y 换写成 x , 即得反函数 $y=$

$\varphi(x)$. (反函数图形与原函数图形关于直线 $y=x$ 对称)

例 求下列函数的反函数

(1) $y = 1 + \ln(x+2)$

解 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 得 $\ln(x+2) = y-1 \Rightarrow x+2 = e^{y-1} \Rightarrow x = e^{y-1} - 2$

\therefore 反函数为 $y = e^{x-1} - 2$

(2) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$

解 由 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $2^x(y-1) = -y$, 即 $2^x = \frac{y}{1-y}$, $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$

\therefore 反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$

题型 6 确定函数的奇偶性

解题方法 若 $f(x)$ 的定义域不是以原点为中心的对称区间, 则 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

若 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则进而比较 $f(-x)$ 与 $f(x)$

若 $f(-x) = \begin{cases} f(x), & \text{则 } f(x) \text{ 是偶函数; (图形对称于 } y \text{ 轴)} \\ -f(x), & \text{则 } f(x) \text{ 是奇函数; (图形关于原点对称)} \\ \text{上两式均不成立,} & \text{则 } f(x) \text{ 是非奇非偶函数} \end{cases}$

例 1 指出下列函数的奇偶性

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -y$$

$\therefore y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数

(2) $f(x) = \frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f(-x) = \frac{-x(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1} = \frac{-x(\frac{1}{e^x}-1)}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{-x(1-e^x)}{1+e^x} = \frac{x(e^x-1)}{e^x+1} = f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

(3) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & -5 \leq x \leq 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

解 $\because f(x)$ 的定义域 $[-5, 4]$ 不是关于原点的对称区间, $\therefore f(x)$ 是非奇非偶函数

例 2 设 $f(x)$ 为奇函数, $\varphi(x)$ 为偶函数, 讨论 $f[\varphi(x)]$, $f[f(x)]$ 的奇偶性

解 记 $F(x) = f[\varphi(x)]$

$$\text{则 } F(-x) = f[\varphi(-x)] = f[\varphi(x)] = F(x)$$

$\therefore f[\varphi(x)]$ 是偶函数

记 $G(x) = f[f(x)]$

$$\text{则 } G(-x) = f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)] = -G(x)$$

$\therefore f[f(x)]$ 是奇函数

§ 1.2 极限

一、内容概要与重要结论

(一) 数列的极限

1. 数列极限的基本概念

数列极限研究的本质:研究当 n 无限增大时,数列通项对应值的变化趋势(即通项对应值向何处去).

(1) 若当 n 无限增大时,数列 x_n 通项对应值的绝对值无限增大,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

(2) 若当 n 无限增大时,数列 x_n 通项对应值与某常数 A 无限接近,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

(3) 若当 n 无限增大时,数列 x_n 通项对应值没有确定的变化趋势,则称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

2. 数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ 都存在,则有

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \cdot B$

注:(1)、(2)可推广到有限多项相加、减、乘的形式.

(3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B}$

3. 数列极限的基本性质

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 若 $A > B$, 则当 n 充分大时, $x_n > y_n$

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 若 $A > 0$, 则当 n 充分大时 $x_n > 0$; 若当 n 充分大时 $x_n \geq 0$, 则 $A \geq 0$

(二) 函数的极限

1. 函数极限的基本概念

A. 研究 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ —— 研究当 $|x|$ 无限增大时,函数值的变化趋势(函数值向何处去?)

当 $|x|$ 无限增大时, $|f(x)|$ 无限增大,记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

当 $|x|$ 无限增大时,其函数值与常数 A 无限接近,记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

当 $|x|$ 无限增大时,其函数值没有确定的变化趋势,则称 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在

B. 研究 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ —— 研究当 x 无限接近于 x_0 时,函数值的变化趋势(函数值向何处去?)

当 x 无限接近于 x_0 时, $|f(x)|$ 无限增大,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

当 x 无限接近于 x_0 时,其函数值与常数 A 无限接近,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

当 x 无限接近于 x_0 时,其函数值没有确定的变化趋势,则称 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

C. 函数的左、右极限

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (或记作 $f(x_0 - 0)$) —— 研究当 x 从 x_0 的左侧(即小于 x_0 的方向)无

限接近于 x_0 时, 函数值的变化趋势.

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (或记作 $f(x_0+0)$)——研究当 x 从 x_0 的右侧 (即大于 x_0 的方向) 无

限接近于 x_0 时, 函数值的变化趋势.

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在的充分必要条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, \text{ 即 } f(x-0) = f(x+0) = A$$

2. 函数极限的四则运算法则

设有 $f(x), g(x)$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = B$ 都存在, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = A \cdot B$$

注: (1)、(2) 可推广到有限多个函数相加、减、乘的形式.

$$(3) \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)} = \frac{A}{B}$$

3. 函数极限的基本性质

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 若 $A > B$, 则在 x_0 的某个邻域内 $f(x) > g(x)$

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 若 $A > 0$, 则在 x_0 的某个邻域内 $f(x) > 0$; 若在 x_0 的某个邻域内

$f(x) \geq 0$, 则 $A \geq 0$

4. 两个重要极限

$$(1) \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

本质特征: ① \sin 后面的表达式趋于零; ② \sin 后面的表达式与分母一致.

用途: 用于求含三角函数的“ $\frac{0}{0}$ ”型极限.

$$(2) \lim_{u(x) \rightarrow 0} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$$

本质特征: ① 底数为 $1 + u(x)$ 的形式, 且 $u(x) \rightarrow 0$; ② 指数是底数中趋于 0 部分的倒数.

用途: 用于求幂指函数的“ 1^∞ ”型极限.

二、题型分析及解题方法与技巧

(一) 求数列极限

题型 1 求“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型数列极限 (通项为有理式或无理式)

解法 分子、分母同除以式中 n 的最高次方.

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 1)(n^2 + 5n + 6)}{2n^5 - 4n^2 + 3n}$

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 1)(n^2 + 5n + 6)}{2n^5 - 4n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 + 1}{n^3} \cdot \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2}}{\frac{2n^5 - 4n^2 + 3n}{n^5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)}{2 - \frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

例2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$

例3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 \right]}{3^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right]} = 3$

题型2 求“ $\infty - \infty$ ”型数列极限

例 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

解法 通分或有理化.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

题型3 求“ 1^∞ ”型数列极限

解法 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

例1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{(n+2) \cdot \frac{n}{n+2}} = e$

例2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{(n+3) \cdot \frac{2n}{n+3}} = e^2$

题型4 求通项为无穷多项相加的数列极限

解法 先求和再计算极限.

例 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) / (1 - \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{3^{n+1}}) / (1 - \frac{1}{3})} = \frac{4}{3}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

(二) 求函数的极限

求函数极限,主要有如下的基本方法:

a. 利用极限的四则运算法则;

b. 利用两个重要极限: $\left\{ \begin{array}{l} \text{对于含三角函数的“} \frac{0}{0} \text{”型极限} \\ \text{—— 利用重要极限 } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ 求解;} \\ \text{对于幂指函数的 } 1^\infty \text{ 型极限} \\ \text{—— 利用重要极限 } \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e \text{ 求解} \end{array} \right.$

c. 利用等价无穷小代换简化运算(见 § 1.3);

d. 利用“无穷小与有界函数的积仍是无穷小”(见 § 1.3);

e. 利用罗必达法则(见 § 2.4).

题型 1 求“ $\frac{0}{0}$ ”型函数极限

解法 1 对于分式有理函数的“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,分解因式后消去分子,分母中的零因式,然后利用极限的四则运算法则求极限值.

对于分式无理函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限,将无理式有理化后消去分子,分母中的零因式,然后利用极限的四则运算法则求极限值.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2}$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3}$

解 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{4}$

解法 2 当式中含三角函数时,通过三角恒等变形后利用 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ 求.

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

解法 3 利用罗必达法则(见 § 2.4).

题型 2 求“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型函数极限

解法 对于分式有理函数或分式无理函数,分子、分母同除以式中 x 的最高次方,然后再求极限.可直接使用的结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{当分子次数高于分母次数时} \\ 0 & \text{当分子次数低于分母次数时} \\ \frac{b}{a} \text{ (最高次系数比)} & \text{当分子,分母次数相同时} \end{cases}$$

例 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(3x-2)^2}{(2x)^5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(3x-2)^2}{(2x)^5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(3x-2)^2}{\frac{x^5}{x^5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 \cdot (3x-2)^2}{x^3 \cdot x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3 \left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{2^5} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^5} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = 1$$

函数的“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限,常可利用罗必达法则求其极限,具体解法见 § 2.4.

题型 3 求“ $\infty - \infty$ ”型函数极限.

解法 通分或有理化后化成“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”或“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,然后按题型 1 和题型 2 中所述方法求出极限值.

$$\text{例 1} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{8-x^3} - \frac{1}{2-x} \right)$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{8-x^3} - \frac{1}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12-4-2x-x^2}{8-x^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+x)}{(2-x)(4+2x+x^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 2} \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

“ $\infty - \infty$ ”型函数极限化成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限后,可利用罗必达法则求其极限,具体解法见 § 2.4.

题型 4 求幂指函数的“ 1^∞ ”型极限