《传热学》配套习题解答参考用书

重点大学传热学研究生入学考试真题解答

传热学

习题解答

CHUANREXUE XITI JIEDA

编著◎王厚华　周根明　周　杰　李新禹

重庆大学出版社

http://www.cqup.com.cn

传热学习题解答

编著　王厚华　周根明
　　　周　杰　李新禹

重庆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

传热学习题解答/王厚华等编著.—重庆:重庆大学出版社,2009.1

ISBN 978-7-5624-4721-4

Ⅰ.传… Ⅱ.王… Ⅲ.传热学—高等学校—解题 Ⅳ.TK124-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 186577 号

传热学习题解答

编著 王厚华 周根明
周 杰 李新禹

责任编辑:陈红梅 版式设计:陈红梅
责任校对:夏 宇 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本:880×1230 1/32 印张:7.875 字数:219 千
2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—2 000
ISBN 978-7-5624-4721-4 定价:16.00 元

前　言

传热学是研究热量传递过程的学科，是热能、动力、化工、建筑环境与设备等专业的一门重要的技术基础课程。在传热学的学习过程中，学习者往往需要花费大量的时间来做习题以巩固学习效果。由于传热学涉及的基本概念较多，不少具体的传热问题综合性强且灵活多变，初学者对教材的内容似乎都能理解，但却无从正确解答习题。为解决此矛盾，除了应深入地理解基本概念以外，对问题本身的正确分析，并掌握必要的解题技巧是正确解题的关键。

本书是与《传热学》(重庆大学出版社，2006 年版)配套的教学参考书，各章的习题与教材完全对应，主要供高等院校学生及科技人员自学参考，也可供任课教师教学参考。与大部分习题解答参考书不同的是，本书除了极少部分解答方法类同的习题给出了参考答案以外，其余习题均给出了较为详细的分析和解题过程。在阅读本书的过程中，建议读者首先耐心地理解题意，弄清楚已知量和待求量，然后思考求解步骤，最后再阅读书中给出的求解过程。完全不加思考地阅读习题解答不可能获得很好的学习效果。

本书由《传热学》教材的编著者编写，其中第 2 ~ 5 章(导热部分)由江苏科技大学周根明编著；第 10 章及第 8 章部分内容由重庆大学周杰编著；第 11 章(辐射换热计算)由天津工业大学李新禹编著；其余部分由重庆大学王厚华编著。全书由王厚华修改定稿。

本书附录中收入了近年来重庆大学建筑环境与设备工程专业硕士研究生传热学入学考试试题，并给出了参考答案，供读者参考。

由于作者水平有限，书中难免存在不足之处甚至可能有错误，真诚地希望读者批评指正、提出修改意见。

编著者

2008 年 12 月

目　　录

第 1 章 “绪论”习题解答

1. 热量、热流量与热流密度有何联系与区别?

【答】 热量 Q,其单位为 J(kJ);本教材中热流量记作 Φ,其单位为 W(kW),Φ 是单位时间内传递的热量,又称传热速率;热流密度 q,其单位为 $W/m^2(kW/m^2)$,q 是单位时间内通过单位面积所传递的热量。如记 τ 为传热时间,则三者间有如下的关系:

$$Q = \Phi\tau = qA\tau$$

式中,A 为传热面积,m^2。

2. “热对流”与“对流换热”是否为同一现象? 试以实例说明。对流换热是否属于基本的传热方式?

【答】 热对流与对流换热是两个不同的概念,属于不同现象。其区别为:①热对流是传热的三种基本方式之一,而对流换热不是传热的基本方式;②对流换热是导热和热对流这两种基本传热方式的综合作用,由于流体质点间的紧密接触,热对流也同时伴随有导热现象;③对流换热必然具有流体与固体壁面间的相对运动。工程中流体与温度不同的固体壁面因相对运动而发生的传热过程称为对流换热。

3. 用水壶将盛装的开水放在地面上慢慢冷却,开水以哪些方式散发热量? 打开水壶盖和盖上水壶盖,开水的冷却速度有何区别?

【答】 水壶与地面间以导热方式传递热量;水壶与周围空气间以自然对流换热方式传递热量,与周围环境以辐射换热方式传递热量;壶嘴以蒸发方式散发热量。打开壶盖后,开水的蒸发速度加快,开水因此冷却得更快。

4. 夏季在维持 20 ℃的空调教室内听课,穿单衣感觉很舒适,而冬季在同样温度的同一教室内听课却必须穿绒衣。假设湿度不是影响的因素,试从传热的观点分析这种反常的“舒适温度”现象。

【答】 夏季人体的散热量为:

$$\Phi_s = \Phi_{s,cv} + \Phi_{s,r}$$

冬季人体的散热量为：

$$\Phi_w = \Phi_{w,cv} + \Phi_{w,r}$$

式中：Φ_s，Φ_w 分别为夏季和冬季人体的总散热量；$\Phi_{s,cv}$，$\Phi_{s,r}$分别为夏季人体的对流换热量与辐射换热量；$\Phi_{w,cv}$，$\Phi_{w,r}$分别为冬季人体的对流换热量与辐射换热量。

由于冬夏两季室内的风速变化不大，因此对流换热量 $\Phi_{s,cv} \approx \Phi_{w,cv}$；但由于人体与围护结构内壁面的温差冬季远大于夏季，辐射换热量 $\Phi_{w,r} > \Phi_{s,r}$，所以在室温相同时，$\Phi_w > \Phi_s$，说明人体冬季散热量更多，为维持热舒适，冬季应多穿或者穿厚一些的衣物。

5. 用厚度为 δ 的 2 块薄玻璃组成的具有空气夹层的双层玻璃窗和用厚度为 2δ 的 1 块厚玻璃组成的单层玻璃窗传热效果有何差别？试分析存在差别的原因。

【答】 双层玻璃窗增加了空气夹层，通常夹层厚度 δ 远小于窗的高度，自然对流难以展开，且空气的导热系数很小，因此增加了空气层热阻，传热系数比单层玻璃窗更小，保温效果更好。

6. 略。

7. 图 1.3 中（见教材 P4），壁内的温度变化用连接 t_{w1} 和 t_{w2} 的直线表示，即壁内温度分布呈线性规律。若 t_{w1} 和 t_{w2} 保持不变，什么情况下温度分布呈非线性？

【答】 当壁内具有内热源或者壁体材料导热系数随温度发生变化时，壁内温度分布为非线性分布。

8. 长 5 m，高 3 m，厚 250 mm 的普通黏土砖墙，在冬季供暖的情况下，如果室内外表面温度分别为 15 ℃和 −5 ℃，黏土砖的导热系数为 0.81 W/(m · ℃)，试求：通过该砖墙的热损失；如已知墙外壁与大气间的表面传热系数为 10 W/(m^2 · ℃)，求大气温度。

【解】 由于室温高于室外气温，热量由室内传递到室外，墙体以导热方式传递的热量为：

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})A = \frac{0.81}{0.25} \times (15 + 5) \times 5 \times 3 \text{ W} = 972 \text{ W}$$

因 $$\Phi = h(t_{w2} - t_{f2})A$$

故 $$t_{f2} = t_{w2} - \frac{\Phi}{hA} = \left(-5 - \frac{972}{10 \times 5 \times 3}\right) ℃ = -11.48 ℃$$

9. 上题中,如果采用膨胀珍珠岩配置轻质混凝土浇铸制成的墙板[$\lambda = 0.1$ W/(m · ℃)]代替黏土砖墙,设两者厚度相等,室内外表面温度保持不变,热损失减少了多少?

【解】 $\Phi' = \frac{\lambda'}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})A = \frac{0.1}{0.25} \times (15 + 5) \times 5 \times 3 \text{ W} = 120 \text{ W}$

$\Delta\Phi = \Phi - \Phi' = (972 - 120) \text{ W} = 852 \text{ W}$

减少百分比为:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{852}{972} \times 100\% = 87.7\%$$

10. 炉子的炉墙厚 13 cm,总面积为 20 m^2,平均导热系数为 1.04 W/(m · ℃),内外壁温分别为 520 ℃和 50 ℃。试计算通过炉墙的热损失。如果燃煤的发热值为 2.09×10^4 kJ/kg,问每天因热损失要多用掉多少煤?

【解】 $\Phi = \frac{\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})A = \frac{1.04}{0.13} \times (520 - 50) \times 20 \text{ W}$

$= 75\ 200 \text{ W}$

$$M = \frac{24 \times 3\ 600\Phi}{q_0} = \frac{24 \times 3\ 600 \times 7.52 \times 10^4}{2.09 \times 10^7} \text{ kg} = 310.9 \text{ kg}$$

即每天因热损失要多用掉煤 310 kg。

11. 竖直管道高 20 m,管内径为 15 mm,进口温度为 25 ℃的冷水经管道后被加热到 40 ℃,冷水的质量流量为 0.25 kg/s,水的比定压热容为 4.174 kJ/(kg · ℃)。试求:①水的加热量为多少? ②若考虑位能,水的总能量增大多少? ③设管内壁温度为 55 ℃,水的平均温度取进出口平均值,求表面传热系数。

【解】 ①$\Phi = Mc_p(t_{f2} - t_{f1}) = 0.25 \times 4.174 \times (40 - 25) \text{ kW}$

$= 15.652\ 5 \text{ kW}$

②$\Delta\Phi = Mg\Delta z = 0.25 \times 9.81 \times 20 \text{ W} = 49.05 \text{ W}$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi}=\frac{49.05}{15\ 652.5}\times100\%=0.31\%$$

可见,考虑位能后总能量仅增加了0.31%,完全可以忽略不计。

$$t_f=\frac{1}{2}\times(t_{f1}+t_{f2})=32.5\ ℃$$

③因 $\Phi=h(t_w-t_f)\pi dl$,故

$$h=\frac{\Phi}{(t_w-t_f)\pi dl}=\frac{15\ 652.5}{(55-32.5)\times3.14\times0.015\times20}\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

$$=738.5\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

12. 在一次测定空气横向外掠单根圆管的对流换热实验中,得到下列数据:管壁平均温度 $t_w=69$ ℃,空气加热前后平均温度 $t_f=20$ ℃,管子外径 $d=14$ mm,加热段长80 mm,输入加热段的功率为8.5 W。如果全部热量通过对流换热传给空气,求此时的对流换热表面传热系数。

【解】 $\Phi=h(t_w-t_f)\pi dl$

$$h=\frac{\Phi}{(t_w-t_f)\pi dl}$$

$$=\frac{8.5}{(69-20)\times3.14\times0.014\times0.08}\mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

$$=49.3\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

13. 求传热过程的总热阻、传热系数、散热量和内外表面温度。已知:$\delta=360$ mm,室外温度 $t_{f2}=-10$ ℃,室内温度 $t_{f1}=18$ ℃,墙的导热系数 $\lambda=0.61\ \mathrm{W/(m\cdot K)}$,内壁表面传热系数 $h_1=8.7\ \mathrm{W/(m^2\cdot K)}$,外壁传热系数 $h_2=24.5\ \mathrm{W/(m^2\cdot K)}$。

【解】 $$R=\frac{1}{h_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{h_2}=\left(\frac{1}{8.7}+\frac{0.36}{0.61}+\frac{1}{24.5}\right)\mathrm{m^2\cdot ℃/W}$$

$$=0.746\ \mathrm{m^2\cdot ℃/W}$$

$$k=\frac{1}{R}=1.34\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$$

$$q=k(t_{f1}-t_{f2})=1.34\times(18+10)\mathrm{W/m^2}=37.5\ \mathrm{W/m^2}$$

因 $$q=h_1(t_{f1}-t_{w1})=h_2(t_{w2}-t_{f2})$$

故 $$t_{w1}=t_{f1}-\frac{q}{h_1}=\left(18-\frac{37.5}{8.7}\right)\ ℃=13.68\ ℃$$

$$t_{w2}=t_{f2}+\frac{q}{h_2}=\left(-10+\frac{37.5}{24.5}\right)\ ℃$$
$$=-8.47\ ℃$$

14. 两平行大平壁 A 和 B 构成一空气夹层。平壁 A 厚12 mm,壁体材料的导热系数为 1.2 W/(m · K),外表面温度为 42 ℃,内表面温度为 40 ℃;平壁 B 内表面温度为 17 ℃,两壁面表面间的系统辐射系数 $C_{1,2}=3.96$。求两壁内表面间的辐射换热量和夹层内空气与壁面间的自然对流换热量。

【解】 热量以导热方式从大平壁 A 的外表面传递到内表面,在稳态传热过程中,这部分热量以辐射换热的方式和对流换热的方式通过空气夹层传递到大平壁 B 的内表面,空气夹层内的传热属于复合换热过程。

$$q=\frac{\lambda}{\delta}(t_{w1}-t_{w2})$$
$$=\frac{1.2}{0.012}\times(42-40)\ \mathrm{W/m^2}$$
$$=200\ \mathrm{W/m^2}$$
$$q_r=C_{1,2}\left[\left(\frac{T_{w2}}{100}\right)^4-\left(\frac{T_{w3}}{100}\right)^4\right]$$
$$=3.96\times(95.98-70.73)\ \mathrm{W/m^2}$$
$$=100\ \mathrm{W/m^2}$$
$$q_c=q-q_r=(200-100)\mathrm{W/m^2}$$
$$=100\ \mathrm{W/m^2}$$

15. 一玻璃窗,尺寸为 600 mm × 300 mm,厚为 4 mm。冬天,室内及室外温度分别为 20 ℃和 −20 ℃,内表面的自然对流表面传热系数为 10 W/(m² · ℃),外表面的强迫对流表面传热系数为 50 W/(m² · ℃),玻璃的导热系数为 0.78 W/(m · ℃)。试求通过玻璃窗的热损失。

【答】 $\Phi=59.76\ \mathrm{W/m^2}$。

第 2 章　“导热问题的数学描述”习题解答

1. 试写出傅里叶定律的一般形式，并说明其中各个符号的意义。

【答】 $q = -\lambda \mathrm{grad}t$。式中：$\mathrm{grad}t$ 是空间某点的温度梯度，q 为梯度方向上的热流密度，λ 是物体的导热系数，式中“ - ”表明热流总是与温度梯度方向相反。

2. 已知导热物体中某点在 x,y,z 三个方向上的热流密度分别为 q_x,q_y,q_z，如何获得该点的热流密度矢量？

【答】 矢量大小：

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2},$$

矢量的方向余弦：

$$\frac{q_x}{q} = \cos\alpha \quad \frac{q_y}{q} = \cos\beta \quad \frac{q_z}{q} = \cos\gamma$$

3. 不同温度的等温面（线）不能相交，热流线能相交吗？热流线为什么与等温线垂直？

【答】 热流线也不能相交，这是因为与热流线垂直方向没有热流分量。如热流线不垂直于等温线，则等温线上必有一热流分量。而等温线上无温差，$q=0$，只有热流线垂直于等温线才能使等温线上的分热流为零。

4. 根据对导热系数主要影响因素的分析，试说明在选择和安装保温隔热材料时要注意哪些问题。

【答】 ①根据工作温度选择适合的保温材料；②进行保温计算时应考虑温度对保温材料导热系数的影响；③选择导热系数小的材料，其密度在最佳密度附近，使其具有最佳保温性能；④保温材料的保温性能受水分影响很大，必须采取防水措施；⑤采用各向异性材料时要注意导热方向对导热系数的影响。

5. 冰箱长期使用后外壳上易结露，这表明其隔热材料性能下降。

你知道其道理吗？（提示：冰箱隔热材料用氟利昂发泡，长期使用后氟利昂会逸出，代之以空气）

【答】 冰箱隔热材料为用氟利昂作发泡剂的聚氨脂泡沫塑料，其导热系数要比一般保温材料小。由于孔中氟利昂气体导热系数较低，随着使用时间的延长，气孔中氟利昂逐步逸出，环境中的空气取而代之。由于空气的导热系数是氟利昂的 2～3 倍，进入空气的隔热材料导热系数增大，致使冰箱保冷性能下降。

6. 导热系数 λ 和热扩散率 a 有何区别？

【答】 导热系数 λ 和热扩散率 a 是两个不同的物理量。前者仅指材料导热能力的大小，而后者综合了材料的导热能力和单位体积的热容量大小。导热系数小的材料热扩散率不一定小。如气体的导热系数很小，可是其热扩散率 a 却和金属相当。

7. 得出导热微分方程所依据的是什么基本定律？

【答】 傅里叶定律和能量守恒定律。

8. 试分别说明导热问题 3 种类型的边界条件。

【答】 第一类边界条件：已知任意时刻物体边界上的温度分布；第二类边界条件：已知任意时刻物体边界上的热流密度或温度梯度；第三类边界条件：已知任意时刻物体边界与周围流体间的对流换热情况，即已知表面传热系数 h 和周围流体温度 t_f。

9. 对于第一类边界条件的稳态导热问题，其温度分布与导热系数有没有关系？

【答】 导热问题的完整数学描述包括导热微分方程和定解条件。在导热系数为常数的稳态导热问题中，只有第一类边界条件下的无内热源稳态导热问题的分析解才与导热系数没有关系，即导热系数只影响热流量，而不影响温度场。

10. 一维无限大平壁的导热问题，两侧给定的均为第二类边界条件，能否求出其温度分布？为什么？

【答】 不能求出。因为第二类边界条件所对应的是温度曲线的斜率，与绝对温度没有对应关系。

11. 有人对二维矩形物体中的稳态、无内热源、常物性的导热问题

进行了数值计算。矩形的一个边绝热，其余三个边均与温度为 t_f 的流体发生对流换热，这样能预测温度场的解吗？

【答】 根据所给边界条件，可以判断该物体没有热流，所以物体各点温度均为 t_f。

12. 在青藏铁路建设中，采用碎石路基可有效防止冻土区的冻胀和融降问题，为什么？

【答】 碎石路基中的空隙可以有效阻止热量自上而下的传递，而能顺利地将冻土层的热量自下而上的传递。其原因是：空隙内的空气的自然对流能将下方的热量传递到上方，而不能将上方的热量传递给下方，即路基中热量只能单向传递，这样就可以维持路基下冻土层的常年冻结。

13. 一厚度为 40 mm 的无限大平壁，其稳态温度分布为：$t=(180-1\,800x^2)$℃。若平壁材料导热系数 $\lambda=50$ W/(m·K)，试求：

①平壁两侧表面处的热流密度；

②平壁中是否有内热源？若有的话，它的强度是多大？

【解】 ①由傅里叶定律：

$$q=-\lambda\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\lambda(-3\,600x)=3\,600\lambda x$$

平壁两侧表面的热流密度：

$$q\big|_{x=0}=-\lambda\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=0$$

$$q\big|_{x=\delta}=-\lambda\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=40\ \mathrm{mm}}$$

$$=3\,600\times50\times0.04\ \mathrm{kW/m^2}=7.2\ \mathrm{kW/m^2}$$

②由导热微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\dot{\Phi}}{\lambda}=0$$

解得 $$\dot{\Phi}=-\lambda\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda(-3\,600)=3\,600\lambda$$

$$=3\,600\times50\ \mathrm{W/m^3}=1.8\times10^5\ \mathrm{W/m^3}$$

14. 从宇宙飞船伸出一根细长散热棒，以辐射换热形式将热量散发到温度为绝对零度的外部空间，已知棒的表面发射率为 ε，导热系数为 λ，长度为 l，横截面积为 A，截面周长为 P，根部温度为 T_0，试写出导热微分方程及边界条件。

【解】 对于细长散热棒，假设温度只在杆长方向变化，这属于一维稳态导热问题。分析厚度为 $\mathrm{d}x$ 的微元段的导热：

$$\Phi_x = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

$$\Phi_{x+\mathrm{d}x} = -\lambda A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

微元段净导热： $\Phi_\mathrm{d} = \Phi_x - \Phi_{x+\mathrm{d}x} = \lambda A \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$

微元段散热量： $\Phi_\mathrm{s} = P\mathrm{d}x\varepsilon\sigma_\mathrm{b}T^4$

由能量守恒定律： $\Phi_\mathrm{d} = \Phi_\mathrm{s}$

导热微分方程： $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{P\varepsilon\sigma_\mathrm{b}}{\lambda A}T^4 = 0$

边界条件： $x = 0,\quad T = T_0$

$x = l,\quad -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \varepsilon\sigma_\mathrm{b}T^4$ （辐射边界条件）

15. 无内热源，常物性二维导热物体在某一瞬时的温度分布为 $t = 2y^2\cos x$。试说明该导热物体在 $x=0, y=1$ 处的温度是随时间增加逐渐升高，还是逐渐降低。

【解】 常物性无内热源二维物体的导热微分方程式：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

由某一瞬时的温度分布 $t = 2y^2\cos x$ 得：

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2y^2\cos x)\Big|_{x=0,y=1} = -2y^2\cos x\Big|_{x=0,y=1} = -2$$

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|_{x=0,y=1} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2y^2\cos x)\Big|_{x=0,y=1} = 4\cos x\Big|_{x=0,y=1} = 4$$

代入微分方程式得：

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{x=0,y=1} = a(-2+4) = 2a > 0$$

即该导热物体在 $x=0, y=1$ 处的温度是随时间增加逐渐升高。

16. 试推导圆柱坐标系和球坐标系的导热微分方程。已知物体的导热系数 λ、密度 ρ 和比热容 c 为常数，且物体内部有均匀稳定的内热源，强度为 $\dot{\Phi}$。

【解】 ①圆柱坐标系的导热微分方程分析，参见教材图 2.5(a)。

r 方向导热：

$$\Phi_r = -\lambda r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\frac{\partial t}{\partial r} = -\lambda\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}zr\frac{\partial t}{\partial r}$$

$$\mathrm{d}\Phi_r = -\lambda\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right)\mathrm{d}r$$

φ 方向导热：

$$\Phi_\varphi = -\lambda\mathrm{d}r\mathrm{d}z\frac{\partial t}{r\partial\varphi}$$

$$\mathrm{d}\Phi_\varphi = -\lambda\mathrm{d}r\mathrm{d}z\frac{1}{r}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi$$

Z 方向导热：

$$\Phi_z = -\lambda r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$\mathrm{d}\Phi_z = -\lambda r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\mathrm{d}z$$

净导热：

$$\Phi_d = -(\mathrm{d}\Phi_r + \mathrm{d}\Phi_\varphi + \mathrm{d}\Phi_z)$$

$$= \lambda r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right]$$

内热源生成热：

$$\Phi_n = \dot{\Phi} r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

式中，$\dot{\Phi}$ 为内热源强度，$\mathrm{W/m^3}$。

内能增量:

$$\Phi_e = \rho c r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}z \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

由能量守恒定律:

$$\Phi_d + \Phi_n = \Phi_e$$

导热微分方程:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right] + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

②球坐标系的导热微分方程分析,参见教材图 2.5(b)。

r 方向导热:

$$\Phi_r = -\lambda r \sin\theta \mathrm{d}\varphi r \mathrm{d}\theta \frac{\partial t}{\partial r}$$

$$= -\lambda \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta r^2 \frac{\partial t}{\partial r}$$

$$\mathrm{d}\Phi_r = -\lambda \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r}\right)\mathrm{d}r$$

φ 方向导热:

$$\Phi_\varphi = -\lambda r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \frac{\partial t}{r\sin\theta \partial \varphi}$$

$$= -\lambda \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{d}\Phi_\varphi = -\lambda \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}\varphi$$

θ 方向导热:

$$\Phi_\theta = -\lambda r \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \frac{\partial t}{r\partial \theta}$$

$$= -\lambda \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

$$\mathrm{d}\Phi_\theta = -\lambda \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

净导热:

$$\Phi_d = -(\mathrm{d}\Phi_r + \mathrm{d}\Phi_\varphi + \mathrm{d}\Phi_\theta)$$

$$= \lambda r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \right]$$

内热源生成热：

$$\Phi_n = \dot{\Phi} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r$$

内能增量：

$$\Phi_e = \rho c r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

由能量守恒：

$$\Phi_d + \Phi_n = \Phi_e$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c}$$

17. 一具有内热源 $\dot{\Phi}$，外径为 r_0 的实心长圆柱体，向四周温度为 t_f 的环境散热，表面传热系数为 h。试列出圆柱体中稳态温度场的微分方程式及边界条件，并对 Φ = 常数的情形进行求解。

【解】 由题意可知，该圆柱体中的温度只沿半径方向发生变化。其导热微分方程式由

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

得：

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\lambda r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \right) + \dot{\Phi} = 0$$

式中，$\theta = t - t_f$。

边界条件：

$$\begin{cases} r = 0 & \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = 0 \\ r = r_0 & \theta = \theta_0 = \dfrac{\dot{\Phi}}{2h} r_0 \end{cases}$$