

CONG MING
DE YAO SHI

聪明的钥匙

高中物理竞赛中的物理数学方法

郑荣玉 编著

聪明的钥匙

高中物理竞赛中的物理数学方法

CONGMING DE YAOSHI

郑荣玉 编著



中国图书馆CIP数据核字(2008)第091336号

广西师范大学出版社出版发行

(桂林市中华路22号 邮政编码: 541001)

网址: <http://www.gdpress.com>

出版人: 何林夏

编辑: 李海霞

桂林漓江印刷厂印刷

(广西桂林市西清路A号 邮政编码: 541001)

开本: 787 mm × 1 092 mm 1/16

印张: 6.75 字数: 133千字

2008年6月第1版 2008年6月第1次印刷

定价: 18.00元



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

· 桂林 ·

聪明的钥匙

高中物理竞赛中的物理数学方法 / 郑荣玉 编著

ISBN 978-7-5633-7579-0

著者 王荣联

图书在版编目 (CIP) 数据

聪明的钥匙: 高中物理竞赛中的物理数学方法 / 郑荣玉
编著. —桂林: 广西师范大学出版社, 2008.6

ISBN 978-7-5633-7579-0

I. 聪… II. 郑… III. 物理课—高中—教学参考资料
IV. 634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 091236

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市中华路 22 号 邮政编码: 541001)
网址: <http://www.bbtpress.com>

出版人: 何林夏

全国新华书店经销

桂林漓江印刷厂印刷

(广西桂林市西清路 9 号 邮政编码: 541001)

开本: 787 mm × 1 092 mm 1/16

印张: 6.75 字数: 173 千字

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

定价: 18.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。

前言

物理竞赛题难不难？我说当然难，但也不是绝对的难。

说难，是因为我们有相当多的同学靠操练，靠题海战术的方法在准备物理竞赛，在这些同学的脑子里，物理竞赛题是一盘散沙，解一题就是一题，没有形成一类思想。这样学习当然是花的时间多，而效率低了。

说不难，是因为任何学科竞赛都有自己独特的思维方式，如果你掌握了这种思维方式，学习起来就多快好省了。对于物理竞赛来说，就有一整套的物理思想方法，它是贯穿在解竞赛题的过程中，但它不是一下子可以看见的，它好像披了一层薄薄的轻纱，模模糊糊，要靠我们去体会，去“悟”的。

本书的目的就是想掀开这层轻纱，“掀开它的盖头”，让大家把原本比较隐蔽的物理竞赛思想方法看得比较清楚。本书将针对有志于参加全国物理竞赛的同学，介绍了解物理竞赛题中的思想方法，特别强调与数学的联系，因此本书称为物理竞赛中的物理数学方法。有了这种物理数学方法之后，你的思维会上升到一个新的高度，会变得更理性，会有质的飞跃。

作者
2008年1月

第一讲

程序+函数+条件的思想方法
..... 1

第二讲

模拟实验思想
..... 8

第三讲

微积分思想
..... 17

第四讲

参考坐标系与相对运动
..... 26

第五讲

递推思想
..... 38

第六讲

分类讨论思想
..... 47

第七讲

图象思想
..... 62

第八讲

物理规律和约束条件
..... 77

第九讲

守恒思想
..... 86

第十讲

气体状态方程和热力学第一定律
..... 95

程序+函数+条件的思想方法

一、程序+函数+条件的思想方法的提出

物理现象的发生必定经过一系列的物理过程和状态,依据发生的过程和状态遵循相应的物理规律,我们在这里定义为物理程序函数。

分析这些物理程序函数,我们可以发现能否解决问题。若仍然无法解决要考虑到制约的条件,就将这些条件用数学式表达出来。

以上分析问题的方法我们称之为程序函数条件思想,也就是平常我们在数学中常说的分析法。

二、竞赛试题案例分析

例 1 (第 22 届全国物理竞赛复赛题)图 1-1 中的

AOB 是游乐场中的滑道模型,它位于竖直平面内,由两个半径都是 R 的 $1/4$ 圆周连接而成,它们的圆心 O_1 、 O_2 与两弧的连接点 O 在同一竖直线上, O_2B 是沿水池的水面。一小滑块可由弧 AO 的任意点从静止开始下滑。

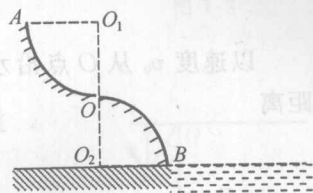


图 1-1

1. 若小滑块从开始下滑到脱离滑道过程中,在两个圆弧上滑过的弧长相等,则小滑块开始下滑时应在圆弧 AO 上的何处?(用该处到 O_1 的连线与竖直线的夹角表示)。

2. 凡能在 O 点脱离滑道的小滑块,其落水点到 O_2 的距离如何?

问题 1:

物理程序分析

如图 1-2 所示,设滑块出发点为 P_1 ,离开点为 P_2 ,按题意要求 O_1P_1 、 O_2P_2 与竖直方向的夹角相等,设其为 θ ,其经过的物理程序可以划分为两个,(1)从 P_1 下滑到 P_2 ,

相应的物理规律

$$2mgR(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

①

②

图 1-2

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \text{ 或 } \theta = \arccos \frac{4}{5} = 36^\circ 52' \quad (3)$$

物理程序分析

- (3) 在 O 点脱离后做平抛运动。

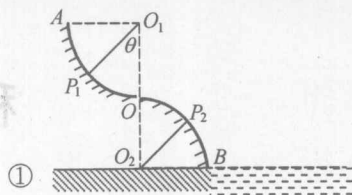
相应的物理规律

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg$$
$$v_0 = \sqrt{R_g}$$
$$x_0 = v_0 t$$

$$R = \frac{1}{2}gt^2 \quad (7)$$

$$x_0 = \sqrt{2} R$$

制约的条件分析

$$mgR(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$


对于 $v > v_0$ 的滑块, 其在 OA 上出发点的位置对应的 θ 角必大于 θ_0 , 即 $\theta > \theta_0$, 由于受轨道的限制, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$ 。

根据机械能守恒定律, 到达 O 点的最大速度

$$v_{\max} = \sqrt{2Rg} \quad (9)$$

由此可知, 能从 O 点离开滑道的滑块速度是 v_0 到 $v_{\max}$ 之间所有可能的值, 也就是说, θ 从 $\frac{\pi}{3}$ 至 $\frac{\pi}{2}$ 下滑的滑块都将在 O 点离开滑道。

当滑块以 $v_{\max}$ 从 O 点沿水平方向滑出滑道时, 其落水点到 O_2 的距离

$$x_{\max} = v_{\max} t \quad (10)$$

由⑦、⑨、⑩三式得

$$x_{\max} = 2R \quad (11)$$

因此, 凡能从 O 点脱离滑道的滑块, 其落水点到 O_2 的距离在 $\sqrt{2}R$ 到 $2R$ 之间的所有可能值。即

$$\sqrt{2}R \leq x \leq 2R \quad (12)$$

例 2 (第 20 届全国物理竞赛预赛题) 有一个摆长为 l 的摆 (摆球可视为质点, 摆线的质量不计), 在过悬挂点的竖直线上距悬挂点 O 的距离为 x 处 ($x < l$) 的 C 点有一固定的钉子, 如图 1-3 所示, 当摆摆动时, 摆线会受到钉子的阻挡。当 l 一定而 x 取不同值时, 阻挡后摆球的运动情况将不同。现将摆拉到位于竖直线的左方 (摆球的高度不超过 O 点), 然后放手, 令其自由摆动, 如果摆线被钉子阻挡后, 摆球恰巧能够击中钉子, 试求 x 的最小值。

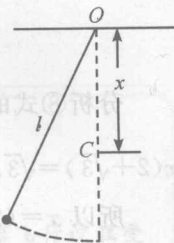


图 1-3

物理程序分析

要使摆球恰巧能够击中钉子, 分析摆球的运动必定经过下列几个程序, 如图 1-4 所示。

- (1) 从 A 到 B 一段时间内摆球做圆周运动;
- (2) 在 B 位置时摆线开始松弛, 此时 $T=0$;
- (3) 松弛后摆球仅在重力作用下做斜抛运动, 后恰巧能击中钉子。

相应的物理规律

令 θ 表示摆线在起始位置时与竖直方向的夹角, 取 O 点为势能零点, 从 A 到 B 过程中机械能守恒, 有关系

$$-mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg[x - (l-x)\cos\alpha] \quad (1)$$

在 B 位置时摆线开始松弛, 此时 $T=0$, 设在该位置时摆球速度为 v , 由牛顿第二定律, 有关系式

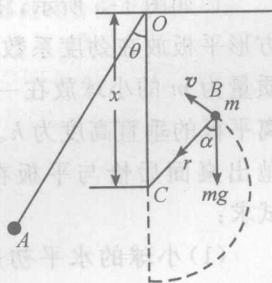


图 1-4

然后摆球做斜抛运动击中 C 点,位移应满足下列关系式:

竖直方向: $(l-x)\cos\alpha = -v\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$ ④

(注:读者也可取 BC 和垂直 BC 方向列出位移式)

分析以上的式子有 v, α, θ 和 x 等量, 而按题意 v, α 仅是中间变量, 我们需要得出 x 和 θ 的函数式, 然后求极值即可,

代入式①,消去 v^2 ,得到 $2l\cos\theta=3(x-l)\cos\alpha+2x$ ⑥

利用式③和式④, 消去 t , 得到 $v^2 = \frac{g(l-x)\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$ ⑦

由⑤式和⑦式得到 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 代入⑥式得到 x 和 θ 的函数式

$$2l\cos\theta = x(2 + \sqrt{3}) - l\sqrt{3} \quad (8)$$

分析⑧式的函数式我们会发现: $\cos\theta$ 取最小值时, 也就是 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, x 取最小值:

$$x(2+\sqrt{3})=\sqrt{3}l$$

所以 $x = (2\sqrt{3} - 3)l = 0.464l$ 。⑨

三、应用引导

1. 如图 1-5 所示, 将一边长为 l 、质量为 M 的正方形平板放在劲度系数为 k 的轻质弹簧上, 另有一质量为 m 的小球放在一光滑桌面上 ($m < M$), 桌面离平板的垂直高度为 h 。如果将小球以水平初速 v_0 抛出桌面后恰与平板在中点处做完全弹性碰撞。试求:

(1) 小球的水平初速度应多大?

(2) 弹簧的最大压缩量是多大?

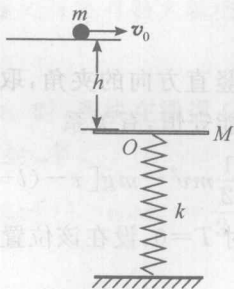


图 1-5

要点提示

(1) 经过的程序有, A: 小球平抛, B: 小球与平板碰撞, 在碰撞瞬间小球与平板组成的系统在竖直方向动量守恒、且小球和平板系统机械能守恒, C: 碰后平板向下压缩弹簧; (2) 取平衡位置为重力势能零点, 取弹簧原长为弹性势能零点。

2. (第20届全国物理竞赛复赛题) 有一半径为 R 的圆柱 A , 静止在水平地面上, 并与竖直墙面相接触。现有另一质量与 A 相同, 半径为 r 的较细圆柱 B , 用手扶着圆柱 A , 将 B 放在 A 的上面, 并使之与墙面相接触, 如图 1-6 所示, 然后放手。已知圆柱 A 与地面的静摩擦因数为 0.20, 两圆柱之间的静摩擦因数为 0.30。若放手后, 两圆柱体能保持图示的平衡, 问圆柱 B 与墙面间的静摩擦因数和圆柱 B 的半径 r 的值各应满足什么条件?

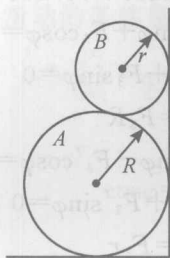


图 1-6

3. 如图 1-7 所示, 有一航天器(不带动力)自远方以速度 v_0 射向某一行星, 计划在行星上着陆, 如果以 b 表示与行星的垂直距离(称为瞄准距离), 求 b 最大值为多少时, 航天器可以在行星上着陆。设航天器的质量为 m , 行星的质量为 M , 半径为 R 。

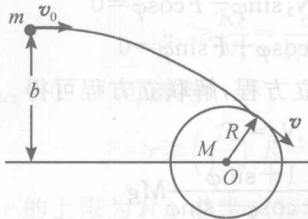


图 1-7

要点提示

分别对 A 、 B 列出对应的物理函数 $\sum F_x = 0$, $\sum M = 0$, 共 6 个方程, 然后注意到接触点不发生滑动的制约条件 $\mu \geq \frac{F}{N}$ 。

要点提示

(1) 航天器飞行过程受到向心力的作用, 因此应角动量守恒和机械能守恒求解。(2) b 最大值的条件是航天器到达行星时恰好与之相切。

四、应用引导解答

1. 答案: (1) $v_0 = \frac{l}{2\sqrt{\frac{g}{2h}}}$; (2) $\frac{Mg}{k} + \frac{2m}{m+M}\sqrt{\frac{2Mgh}{k}}$

2. 物理程序分析

放上圆柱 B 后, 圆柱 B 有向下运动的倾向, 对圆柱 A 和墙面有压力。圆柱 A 倾向于向左运动, 对墙面没有压力。平衡是靠各接触点的摩擦力维持的。现设系统处于平衡状态, 取圆柱 A 受地面的正压力为 N_1 , 水平摩擦力为 F_1 ; 圆柱 B 受墙面的正压力为

N_2 , 竖直摩擦力为 F_2 , 圆柱 A 受圆柱 B 的正压力为 N_3 , 切向摩擦力为 F_3 ; 圆柱 B 受圆柱 A 的正压力为 N_3' , 切向摩擦力为 F_3' , 如图 1-8 所示。各力以图示方向为正方向。

已知圆柱 A 与地面的摩擦因数 $\mu_1 = 0.20$, 两圆柱间的摩擦因数 $\mu_3 = 0.30$ 。设圆柱 B 与墙面的摩擦因数为 μ_2 , 过两圆柱中轴的平面与地面的交角为 φ 。

相应的物理规律

设两圆柱的质量均为 M , 为了求出 N_1 、 N_2 、 N_3 以及为保持平衡所需的 F_1 、 F_2 、 F_3 之值, 下面列出两圆柱所受力和力矩的平衡方程:

$$\text{对圆柱 A:} \quad Mg - N_1 + N_3 \sin \varphi + F_3 \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$F_1 - N_3 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

$$F_1 R = F_3 R \quad (3)$$

$$\text{对圆柱 B:} \quad Mg - F_2 - N_3' \sin \varphi - F_3' \cos \varphi = 0 \quad (4)$$

$$N_2 - N_3' \cos \varphi + F_3' \sin \varphi = 0 \quad (5)$$

$$F_3' r = F_2 r \quad (6)$$

由于 $F_3' = F_3$, 所以得

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_3' = F \quad (7)$$

式中 F 代表 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_3' 的大小。因 $N_3' = N_3$, 于是式①、②、④和⑤四式成为:

$$Mg - N_1 - N_3 \sin \varphi + F \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

$$F - N_3 \cos \varphi + F \sin \varphi = 0 \quad (9)$$

$$Mg - F + N_3 \sin \varphi - F \cos \varphi = 0 \quad (10)$$

$$N_2 - N_3 \cos \varphi + F \sin \varphi = 0 \quad (11)$$

以上四式是 N_1 、 N_2 、 N_3 和 F 的联立方程, 解联立方程可得

$$N_2 = F \quad (12)$$

$$N_3 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg \quad (13)$$

$$N_2 = F = \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg \quad (14)$$

$$N_1 = \frac{2 + \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg \quad (15)$$

式⑫、⑬、⑭和⑮是平衡时所需要的力, 至此仍没有解决问题, 因此我们要分析制约的条件是什么?

制约的条件分析

求 N_1 、 N_2 、 N_3 的值没有问题, 但 F_1 、 F_2 、 F_3 三个力能不能达到所需要的数值 F , 即式⑫、⑭要受那里的摩擦因数的制约。三个力中只要有一个不能达到所需的 F 值, 在那一点就要发生滑动而不能保持平衡。

首先讨论圆柱 B 与墙面的接触点。若接触点不发生滑动, 要求

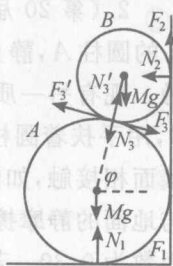


图 1-8

$$\mu_2 \geq \frac{F_2}{N_2}$$

由式⑫,得

$$\frac{F_2}{N_2} = 1$$

所以

$$\mu_2 \geq 1 \quad (16)$$

再讨论圆柱 A 与地面的接触点的情形。由题设知此处的摩擦因数为 $\mu_1 = 0.20$, 根据摩擦定律 $f \leq \mu N$, 若上面求得的接地点维持平衡所需的水平力 F_1 满足 $F_1 \leq \mu_1 N_1$, 则圆柱在地面上不滑动; 若 $F_1 > \mu_1 N_1$, 这一点将要发生滑动。

圆柱 A 在地面上不发生滑动的条件是

$$\mu_1 \geq \frac{F_1}{N_1} = \frac{\cos \varphi}{2 + \cos \varphi + 2 \sin \varphi} \quad (17)$$

由图 1-7 可知

$$\cos \varphi = \frac{R-r}{R+r} \quad (18)$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} \quad (19)$$

由式⑰、⑱和式⑲以及 $\mu_1 = 0.20$, 可以求得

$$r \geq \frac{1}{9}R \quad (20)$$

即只有当 $r \geq \frac{1}{9}R$ 时, 圆柱 A 在地面上才能不滑动。

最后讨论两圆柱的接触点。若接触点不发生滑动, 要求

$$\mu_3 \geq \frac{R_3}{N_3} = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (21)$$

由式⑱、⑲以及 $\mu_3 = 0.30$, 可解得

$$r \geq \left(\frac{7}{13}\right)^2 R = 0.29R \quad (22)$$

显然, 在平衡时, r 的上限为 R 。总结式⑳和式㉑, 得到 r 满足的条件为

$$R \geq r \geq 0.29R \quad (23)$$

3. 答案: $b = R \sqrt{1 + \left(G \frac{mM}{R} / \frac{1}{2} m v_0^2\right)}$

模拟实验思想

一、问题的提出

我们知道物理学是一门以实验为基础的科学,通过实验我们可以发现物体的运动规律,同样我们在解决复杂的物理问题时如果设想一下实验情景,马上会找到解决问题的方法和规律。因为复杂的问题常常隐藏着一些我们难以觉察的物理过程。通过模拟实验情景,一些原本隐藏的过程就会显示出来,下面通过一个问题来说明这一思想的应用。

如图 2-1 所示的正方形 $ABCD$ 是水平放置的固定梁的横截面, AB 是水平的, 截面的边长都是 l 。一根长为 $2l$ 的柔软的轻细绳, 一端固定在 A 点, 另一端系一质量为 m 的小球, 初始时, 手持小球, 将绳拉直, 绕过 B 点使小球处于 C 点。现给小球一竖直向下的初速度 v_0 , 使小球与 CB 边无接触地向下运动, 当 v_0^2 分别取下列两值时, 小球将打到梁上的何处?

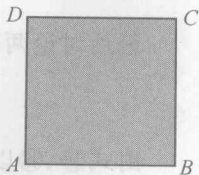


图 2-1

$$(1) v_0^2 = 2(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 1)gl$$

$$(2) v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$$

设绳的伸长量可不计而且绳是非弹性的。

这是 23 届全国物理竞赛的预赛试题,许多同学拿到题目之后,不知从何下手,不能下手的一个原因是不知道小球打到梁上的过程中的运动情况。实际上如果我们做一下模拟实验很快就会发现小球的运动分为以下几个过程:

- (1)以初速度 v_0 沿 BC 边方向做匀加速直线运动;
- (2)到某一位置绳被拉直;
- (3)绳被拉直后,绕 A 点做圆周运动;
- (4)小球打到梁上因初速度不同,可能出现:圆周运动到某一位置后,绳子松弛而做斜抛运动,或一直绕 A 点做圆周运动,这需要进行判断。

有了上面的模拟实验,就能整体上把握解题的思路。以下是按照上述的模拟实验

图 2-2

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gs \quad (2)$$
$$v_1' = v_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} v_1 \quad (3)$$
$$v_1'^2 = \frac{1}{4}v_0^2 + \frac{1}{2}gl(1+\sqrt{3}) \quad (4)$$
$$\frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(\sqrt{3}l + 2l\sin\theta) \quad (5)$$
$$F_T + mg \sin \theta = m \frac{v^2}{2l} \quad (6)$$

设在 $\theta = \theta_1$ 时(见图 2-3), 绳开始松弛, $F_T = 0$, 小球的速度 $v = u_1$ 。以此代入⑤、⑥两式得

$$v_1'^2 = u_1^2 + 2g(\sqrt{3}l + 2l\sin\theta_1) \quad (7)$$

$$g \sin \theta_1 = \frac{u_1^2}{2l} \quad (8)$$

$$\theta_1 = 45^\circ \quad (9)$$

$$u_1 = \sqrt{\sqrt{2}gl} \quad (10)$$

图 2-3

以 N_1 点为坐标原点, 建立直角坐标系 N_1xy , x 轴水平向右, y 轴竖直向上。若以小球从 N_1 处抛出的时刻作为计时起点, 小球在时刻 t 的坐标分别为

$$x = u_1 \cos 45^\circ t = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 t \quad (11)$$

$$y = u_1 \sin 45^\circ t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (12)$$

由⑪、⑫式,注意到⑩式,可得小球的轨道方程为:

$$y = x - g \frac{x^2}{u_1^2} = x - \frac{x^2}{\sqrt{2}l} \quad (13)$$

AD 面的横坐标为:

$$x = 2l \cos 45^\circ = \sqrt{2}l \quad (14)$$

由⑬、⑭式可得小球通过 AD 所在竖直平面的纵坐标 $y=0$

由此可见小球将在 D 点上方越过, 然后打到 DC 边上, DC 边的纵坐标为

$$y = -(2l \sin 45^\circ - l) = -(\sqrt{2} - 1)l \quad (16)$$

把⑬式代入⑫式,解得小球与DC边撞击点的横坐标

$$x = 1.75l \quad (17)$$

撞击点与 D 点的距离为

$$\Delta l = x - 2l \cos 45^\circ = 0.35l \quad (18)$$

2. 当 $v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$ 时:

设在 $\theta = \theta_2$ 时, 绳松弛, $F_T = 0$ 小球的速度 $v = u_2$, 以此代入⑤、⑥式, 得

$$v_1'^2 = u_2^2 + 2g(\sqrt{3}l + 2l\sin\theta_2) \quad (19)$$

$$mg\sin\theta_2 = m \frac{u_2^2}{2l} \quad (20)$$

以 $v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$ 代入④式,与⑬、⑭式联立,可解得

$$\theta_2 = 90^\circ \quad (21)$$

$$u_2 = \sqrt{2gl} \quad (22)$$

②式表示小球到达圆周的最高点处时,绳中张力为 0,随后绳子被拉紧,球速增大,绳中的拉力不断增加,拉力和重力沿绳子的分力之和等于小球沿圆周运动所需的向心力,小球将绕以 D 点为圆心, l 为半径的圆周打到梁上的 C 点。

从以上的解题过程大家不难发现通过模拟实验能引导我们得到解决问题的办法。

二、竞赛试题案例分析

例 1 (第 23 届全国物理竞赛预赛题) 图 2-4 所示为一固定不动

的绝缘的圆筒形容器的横截面,其半径为 R ,圆筒的轴线在 O 处。圆筒内有匀强磁场,磁场方向与圆筒的轴线平行,磁感应强度为 B 。筒壁的 H 处开有小孔,整个装置处在真空中。现有一质量为 m 、电荷量为 q 的带电粒子 P 以某一初速度沿筒的半径方向从小孔射入圆筒,经与筒壁碰撞后又从小孔射出圆筒。设筒壁是光滑的, P 与筒壁碰撞是弹性的, P 与筒壁碰撞时其电荷量是不变的。若要

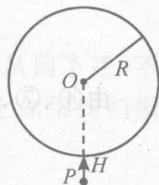


图 2-4

使 P 与筒壁碰撞的次数最少,问:

1. P 的速率应为多少?

2. P 从进入圆筒到射出圆筒经历的时间为多少?

解析:这道题隐藏了其运动过程,题目只给出带电粒子与筒壁碰撞的次数最少,我们也可通过模拟实验(用画运动轨迹线)来找到其运动过程。

1. 如图 2-5 所示,设筒内磁场的方向垂直纸面指向纸外,带电粒子 P 带正电,其速率为 v , P 从小孔射入圆筒中因受到磁场的作用力而偏离入射方向,若与筒壁只发生一次碰撞,是不可能从小孔射出圆筒的。但与筒壁碰撞两次,它就有可能从小孔射出。在此情形中, P 在筒内的路径由三段等长、等半径的圆弧 HM 、 MN 和 NH 组成。现考察其中一段圆弧 MN ,如图 2-6 所示。由于 P 沿筒的半径方向入射, OM 和 ON 均与轨道相切,两者的夹角



图 2-5

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi$$

设圆弧的圆半径为 r ,则有

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

圆弧对轨道圆心 O' 所张的圆心角

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

由几何关系得

$$r = R \cot \frac{\beta}{2}$$

解②、③、④式得

$$v = \frac{\sqrt{3}qBR}{3m} \quad (5)$$

2. P 由小孔射入到第一次与筒壁碰撞所通过的路径为:

$$s = \beta r \quad (6)$$

$$\text{经历时间为 } t_1 = \frac{s}{v} \quad (7)$$

$$P \text{ 从射入小孔到射出小孔经历的时间为 } t = 3t_1 \quad (8)$$

由以上有关各式得

$$t = \frac{\pi m}{qB} \quad (9)$$

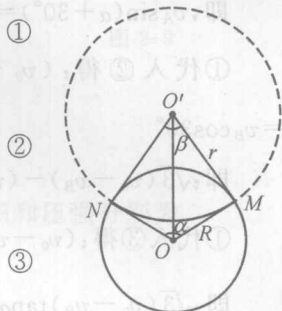


图 2-6

例 2 (苏联竞赛试题)如图 2-7 所示,质量为 m 的两质点 A 和 B ,由长为 L 的不可伸长的绳连接, B 质点被限制在水平桌面上方的光滑水平直槽内,可以沿槽滑动。开始时 A 质点静止在光滑桌面上,在 B 点下方, B 点静止于槽内。桌面到槽的距离为 $\frac{L}{2}$ 。若 A 以速度 v_0 在桌面上平行于槽的方向运动,求 B 点开始运动时的速度大小。

解析:用模拟实验的思想,球先做匀速运动,当 A 、 B 间的距离为 L 时绳子恰被拉

紧,但此时绳子的拉力很大,所以 B 有水平方向的速度 v_B , A 由于受到沿绳子方向的冲量的作用,所以 A 的速度大小和方向都发生变化。

由于是两体问题,一般情况下可以从动量守恒、速度关联考虑(本题中能量不守恒,为什么?)

“系统 $A、B$ ”水平方向动量守恒, $mv_0 = mv_A \cos \alpha + mv_B$

得, $v_0 = v_A \cos \alpha + v_B$ ①

绳子不可伸长,在绳子方向,速度关联

$$v_A \cos(\alpha + 30^\circ) = v_B \cos 30^\circ$$
 ②

对 A 球,绳对 A 的冲量沿绳子方向,故在垂直于绳子方向动量不变,

$$mv_A \sin(\alpha + 30^\circ) = mv_0 \sin 30^\circ$$

即, $v_A \sin(\alpha + 30^\circ) = v_0 \sin 30^\circ$ ③

$$\begin{aligned} \text{①代入②得: } (v_0 - v_B) \cdot \frac{\cos \alpha \cos 30^\circ - \sin \alpha \sin 30^\circ}{\cos \alpha} \\ = v_B \cos 30^\circ \end{aligned}$$

$$\text{即: } \sqrt{3}(v_0 - v_B) - (v_0 - v_B) \tan \alpha = \sqrt{3} v_B$$
 ④

$$\text{①代入③得: } (v_0 - v_B) \cdot \frac{\sin \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \sin 30^\circ}{\cos \alpha} = v_0 \sin 30^\circ$$

$$\text{即: } \sqrt{3}(v_0 - v_B) \tan \alpha + (v_0 - v_B) = v_0$$
 ⑤

$$\text{④} \times \sqrt{3} + \text{⑤得: } 3(v_0 - v_B) + (v_0 - v_B) = 3v_B + v_0$$

$$v_B = \frac{3v_0}{7}$$
 ⑥

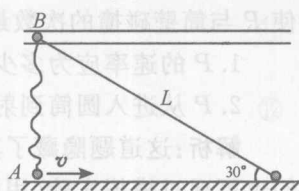


图 2-7

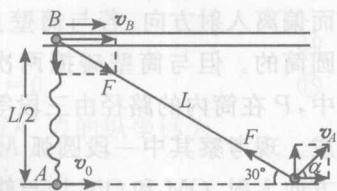


图 2-8

例 3 (第 21 届全国物理竞赛复赛试题) 薄膜材料气密性能的优劣常用其透气系数来加以评判。对于均匀薄膜材料,在一定温度下,某种气体通过薄膜渗透过的气体分子数 $N = k \frac{\Delta p S t}{d}$, 其中 t 为渗透持续时间, S 为薄膜的面积, d 为薄膜的厚度, Δp 为薄膜两侧气体的压强差。 k 称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数。透气系数越小,材料的气密性能越好。

图 2-9 为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图。 $EFGI$ 为渗透室, U 形管左管上端与渗透室相通,右管上端封闭; U 形管内横截面积 $A = 0.150 \text{ cm}^2$ 。实验中,首先测得薄膜的厚度 $d = 0.66 \text{ mm}$,再将薄膜固定于图中 CC' 处,从而把渗透室分为上下两部分,上面部分的容积 $V_0 = 25.00 \text{ cm}^3$,下面部分连同 U 形管左管水面以上部分的总容积为 V_1 ,薄膜能够透气的面积 $S = 1.00 \text{ cm}^2$ 。打开开关 $K_1、K_2$ 与大气相通,大气的压强 $p_1 = 1.00 \text{ atm}$,此时 U 形管右管中气柱长度 $H = 20.00 \text{ cm}$, $V_1 = 5.00 \text{ cm}^3$ 。关闭 $K_1、K_2$ 后,打开开关 K_3 ,对渗透室上部分迅速充气至气体压强 $p_0 = 2.00 \text{ atm}$,关闭 K_3 并开始计时。两小时后, U 形管左管中的水面高度下降了 $\Delta H = 2.00 \text{ cm}$ 。实验过程中,始终保持温度为 0° 。求该薄膜材料在 0° 时对空气的透气系数。