

高中新课标·人教版

# 教材 动态/全解

主编 / 田祥高 黄浩胜

● 高中数学 A 版 ●

必修⑤



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS  
WWW.NENUP.COM

东北师范大学出版社

配人民教育出版社课程标准实验教科书

主编 田祥高 黄浩胜



# 教材动态全解

# DONGTAI

Q U A N J I E

## 高中数学必修⑤



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

WWW.NENUP.COM

东北师范大学出版社 长春

---

### 图书在版编目 (CIP) 数据

教材动态全解: 人教版 A 版. 高中数学. 5: 必修/田祥高, 黄浩胜主编. —长春: 东北师范大学出版社, 2007. 5  
ISBN 978 - 7 - 5602 - 5047 - 2

I. 教... II. ①田... ②黄... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 071430 号

---

责任编辑: 任桂菊 郭晓莉 封面设计: 宋 超  
责任校对: 齐 虹 李春鹏 责任印制: 栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行  
长春市人民大街 5268 号 (130024)  
销售热线: 0431—85695744 85688470

传真: 0431—85695734

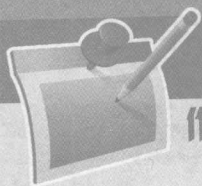
网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: [sdcbs@mail.jl.cn](mailto:sdcbs@mail.jl.cn)  
东北师范大学出版社激光照排中心制版  
沈阳新华印刷厂印装  
沈阳市铁西区建设中路 30 号 (110021)

2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷  
幅面尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 10.75 字数: 395 千

定价: 18.50 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换



ZUOZHE MINGDAN

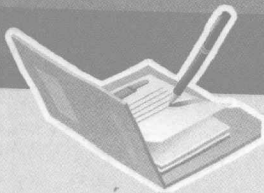
作者名单



# 动态全解·高中数学

## 作者名单

★主 编	田祥高	黄浩胜			
★编 写	宋明华	黄浩胜	田 军	余方元	
	周金涛	王长法	王年贺	张亚良	
	胡冠群	方志芳	张天次	郭爱梅	
	李秀梅	闵 慧	汪 勇	夏海军	
	吴文明	吴小明	姚献平	李桂芳	
	吴 玮	孟 磊	张钦平	余 俊	
	宋水清	陈少华	张愿球	占国平	



ZAIBAN SHUOMING

## 再版说明

本书在 2006 年国家新闻出版总署质量检查中全部合格

本书动态讲解 体现课堂互动

本书以最新版教材和考试大纲为编写依据，完全与现行教材同步

### ★本书特点

本书立足于对教材中基本概念、基本理论和基本方法的讲解。在编写过程中，对知识点的“三基”讲解严格把握“细”、“精”、“透”、“全”的原则。

#### 1. 对知识点的讲解——细

全书知识点分布全面，对教材中涉及的每一个知识点不仅没有遗漏，而且详细解析。具体体现在：（1）对知识点的讲解细；（2）对例题的解析过程细；（3）对难点的解析细；（4）对知识点的归纳总结细；（5）对习题的解答细。

#### 2. 对知识点的讲解——精

全书的讲解真正体现了“围绕重点，突破难点，解惑释疑，启发思维”。全书讲解既能够紧紧围绕重点内容精讲精析，又能够层层突破重点、难点和疑点，对各种题型及其变式、规律、误区等分析透彻，启发思维，提高知识的迁移能力。

#### 3. 对知识点的讲解——透

在讲解的过程中既能够把握教材，又能够不拘泥于教材。全书注重知识点与面的联系，教与学的联系，学与用的联系，注重一题多解，一题多问，多侧面、多角度分析问题。

#### 4. 对知识点的讲解——全

本书完全按最新教材的知识点顺序进行编写，不遗漏一个知识点，涵盖了中学教学的全过程，内容丰富，立体动态，适应读者面广。



## ★本书与其他同类书的不同之处

### 1. 基础例题紧随知识点的讲解

在新知识点讲解辨析后，马上设置具有说明性的例题进行知识巩固，这样可以使学生做到“学一点，通一点，会一点”，不必来回翻书寻找知识点和例题的对应。

### 2. 设置小栏目进行动态讲解

在知识点的讲解过程中，根据课堂教学情况即时插入“释疑解难”、“探究学习”、“易错点提示”、“疑似点破译”、“课堂问答”、“方法提示”、“心灵交流”等动态小栏目，对教材内容予以补充说明，实现教与学的互动。

### 3. 基础提高两不误

本书不仅有对教材“三基”知识点的讲解，还有将教材中的知识点进行综合和提高总结。书中有综合问题的解析，综合方法的总结，综合题型的归纳，思维误区的提示，专项内容的总结提高，中高考题的讲解。综合性强，目标瞄准中高考。

### 4. 全面解读教材栏目

本书不仅对教材中的知识点进行全面细致的讲解，而且对教材中所涉及的“图表”，“活动”，“教材专栏文献资料”等小栏目都作了导读和提示，这些解读充分满足了广大学生的不同需求。

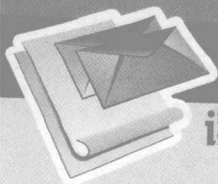
## 东师教辅平台

我社多年来致力于教辅图书的出版，以为广大教师和学子奉献精品图书为宗旨。因此，我们真诚地希望得到来自各方面的鼓励和指正。如果您有好的思路、新的设计，如果您有好的构想、新的策划，那么请您与我们联系，我们期待着您的建议和支持，期盼着与您的真诚合作。

我社正在进行作者资源库建设，如果您想成为其中一员，欢迎把您详细的资料邮寄或通过电子函件发送给我们。

办公电话：0431-85693036 转 2026

电子函件：dongshijiaofu@126.com

**★黑龙江哈尔滨市读者 毕欣**

我喜欢《教材动态全解》，它特别符合我们的学习习惯，在详细讲解教材的每一个知识点后都配相应的例题进行说明，这样能使我们加深对知识的理解，谢谢贵社出版的这套书！

**★广西河池市巴马县第一初级中学初三（1）班读者 饶碧刚**

我是广西河池巴马县第一初级中学初三（1）班的一名学生，我是第一次使用贵社的《教材动态全解》，从中我得到了许多未见过的知识，受益匪浅……

**★四川西昌市川兴中学初 07 级 1 班读者 赖皓**

我是《教材动态全解》的一位忠实读者。《教材动态全解》陪我度过了两个春秋，未来的日子，它也是我学习生活中不可缺少的一部分。我选择了《教材动态全解》，就找到了一个解惑释疑的知心朋友；使用了《教材动态全解》，我的成绩有了一个令人欣喜的提高！

**★湖北随州市万福店农场初级中学二年级 4 班读者 刘杰**

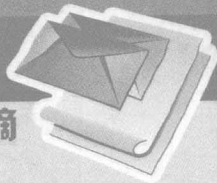
我喜欢《教材动态全解》，因为它例题丰富，讲解透彻，解析知识点精确。尤其是十六章的“分式”，《教材动态全解》把每一节内容都讲得十分详细，根本不用老师讲解，我们完全能把握每一节的重点、难点和考点。

**★福建长乐市温岭中学初二（1）班读者 周慧秋**

我是《教材动态全解》的读者，我不得不承认这套书很好。书的内容详细，知识丰富，题目难度有高的，也有容易的，难易结合正适合我。

**★河北邯郸市魏县读者 李亚杰**

我是一名中学生，对于贵社出版的八年级物理上册《教材动态全解》尤其喜爱，这本书是我学习的好帮手。



### ★安徽寿县堰口中学初三(1)班读者 陶应明

我是一名中学生。自从我购买了贵社出版的《教材动态全解》，对它就十分喜爱。近年来，几乎每个学期我都会购买。使用过程中，我发现它内容充实，深浅适度，讲解透彻。

### ★云南读者 段伟高

我儿子就读于县一中，即将毕业。儿子在三年的初中阶段能保持良好的学习成绩，得益于你们出版的《教材动态全解》的辅助，在此表示深深感谢！

### ★广西南宁市第28中学读者 莫文新

我是贵社《教材动态全解》的使用者。这套书对于学生可谓是良师益友；对于教师可谓是参考之必备。我喜欢《教材动态全解》。

### ★云南红河州四中初三(2)班读者 杨良茜

自从我选购了《教材动态全解》以后，我的学习成绩有了很大的提高，尤其是英语成绩，以前总是上不去，自从选了贵社出版的这本书，成绩在年级里总算是出类拔萃了。谢谢贵社对我的帮助！

### ★广东雷州市龙门镇龙门中学初二(12)班读者 柯景威

您所编的《教材动态全解》，我非常喜欢它，它帮我渡过难关，使我的成绩一升再升，也使我找到了一个可释疑解惑的知心朋友。

### ★山东济宁市读者 郑小雯

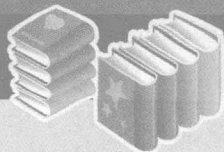
我是一名高中生，以前学习总是抓不住重点，学习起来既费时又费力，而且成绩也很不理想，自从使用了贵社编写的《教材动态全解》，我的学习成绩有了很大的提高，已经是班里的中等生了。





# 「目 录」CONTENTS

<b>第一章 解三角形</b> .....	1	<b>单元总结</b> .....	56
<b>教学目标</b> .....	1	<b>单元知识网络</b> .....	56
<b>1.1 正弦定理和余弦定理</b> .....	2	<b>基础知识提炼整理</b> .....	56
<b>1.1.1 正弦定理</b> .....	2	<b>专题总结及应用</b> .....	58
<b>相关知识链接</b> .....	2	<b>高考综合试题详解</b> .....	63
<b>教材新知识点讲解</b> .....	2	<b>教材习题答案</b> .....	67
<b>疑难问题辨析</b> .....	6		
<b>综合例题解析</b> .....	8		
<b>相关高考链接</b> .....	11		
<b>教材习题答案</b> .....	13		
<b>1.1.2 余弦定理</b> .....	13	<b>第二章 数列</b> .....	69
<b>相关知识链接</b> .....	13	<b>教学目标</b> .....	69
<b>教材新知识点讲解</b> .....	14	<b>2.1 数列的概念及简单</b>	
<b>疑难问题辨析</b> .....	17	<b>表示法</b> .....	70
<b>综合例题解析</b> .....	18	<b>相关知识链接</b> .....	70
<b>相关高考链接</b> .....	25	<b>教材新知识点讲解</b> .....	71
<b>教材习题答案</b> .....	28	<b>疑难问题辨析</b> .....	76
<b>1.2 应用举例</b> .....	29	<b>综合例题解析</b> .....	79
<b>1.3 实习作业</b> .....	29	<b>相关高考链接</b> .....	84
<b>相关知识链接</b> .....	29	<b>教材习题答案</b> .....	85
<b>教材新知识点讲解</b> .....	30	<b>2.2 等差数列</b> .....	87
<b>疑难问题辨析</b> .....	41	<b>相关知识链接</b> .....	87
<b>综合例题解析</b> .....	42	<b>教材新知识点讲解</b> .....	87
<b>相关高考链接</b> .....	48	<b>疑难问题辨析</b> .....	92
<b>教材习题答案</b> .....	51	<b>综合例题解析</b> .....	93
		<b>相关高考链接</b> .....	98
		<b>教材习题答案</b> .....	100



# 「目 录」CONTENTS

2.3 等差数列的前 $n$ 项和 .....	101	教材习题答案 .....	190
相关知识链接 .....	101		
教材新知识点讲解 .....	101	<b>第三章 不等式</b> .....	193
疑难问题辨析 .....	107	<b>教学目标</b> .....	193
综合例题解析 .....	108	<b>3.1 不等关系与不等式</b> .....	195
相关高考链接 .....	120	相关知识链接 .....	195
教材习题答案 .....	123	教材新知识点讲解 .....	195
2.4 等比数列 .....	126	疑难问题辨析 .....	202
相关知识链接 .....	126	综合例题解析 .....	203
教材新知识点讲解 .....	126	相关高考链接 .....	211
疑难问题辨析 .....	130	教材习题答案 .....	213
综合例题解析 .....	131	<b>3.2 一元二次不等式及其</b>	
相关高考链接 .....	143	解法 .....	214
教材习题答案 .....	145	相关知识链接 .....	214
2.5 等比数列的前 $n$ 项和 .....	147	教材新知识点讲解 .....	214
相关知识链接 .....	147	疑难问题辨析 .....	220
教材新知识点讲解 .....	148	综合例题解析 .....	221
疑难问题辨析 .....	151	相关高考链接 .....	242
综合例题解析 .....	153	教材习题答案 .....	244
相关高考链接 .....	166	<b>3.3 二元一次不等式(组)与</b>	
教材习题答案 .....	170	简单的线性规划问题 .....	246
单元总结 .....	173	<b>3.3.1 二元一次不等式(组)与</b>	
单元知识网络 .....	173	平面区域 .....	246
基础知识提炼整理 .....	174	相关知识链接 .....	246
专题总结及应用 .....	176	教材新知识点讲解 .....	246
高考综合试题详解 .....	186	疑难问题辨析 .....	251



# 「目 录」CONTENTS

综合例题解析 .....	253	教材新知识点讲解 .....	291
相关高考链接 .....	261	疑难问题辨析 .....	298
教材习题答案 .....	264	综合例题解析 .....	300
<b>3.3.2 简单的线性规划</b>		相关高考链接 .....	308
<b>问题</b> .....	264	教材习题答案 .....	311
相关知识链接 .....	264	<b>单元总结</b> .....	313
教材新知识点讲解 .....	265	单元知识网络 .....	313
疑难问题辨析 .....	273	基础知识提炼整理 .....	313
综合例题解析 .....	277	专题总结及应用 .....	315
相关高考链接 .....	284	高考综合试题详解 .....	325
教材习题答案 .....	287	教材习题答案 .....	331
<b>3.4 基本不等式: <math>\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}</math></b> .....	291		
相关知识链接 .....	291		



# 第一章 解三角形

## 教 学 目 标

### 一、课程目标与学习目标

#### 1. 课程目标

在本章中,将在已有知识的基础上,通过对任意三角形边角关系的探究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系,运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

#### 2. 学习目标

- (1)通过对任意三角形边角关系的探究,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.
- (2)能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

### 二、本章内容结构

#### 1. 本章知识结构框图



#### 2. 本章主要内容

本章主要包括正弦定理和余弦定理、应用举例与实习作业三部分内容.教材中以直角三角形为例引出正弦定理,然后利用向量方法证明了余弦定理.正弦定理、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律,是解三角形的重要工具.

本章内容与已学过的关于三角形的定性研究的结论相联系,与三角函数知识相联系,同时也体现了向量及其运算的应用,高考中常与三角函数、向量知识联系起来考查.

本章知识在现实生活中有着广泛的应用,如天文测量、航海测量、地理测量以及日常生活中的距离、高度、角度的测量等.解三角形的理论

被用于解决许多测量问题,因此,通过对本章的学习,有利于提高数学建模能力.

### 三、本章学法点津

1. 重视数学思想方法的运用. 解三角形作为几何度量问题,要突出几何背景,注意数形结合思想的运用,在具体解题时,要注意函数与方程思想的运用.

2. 加强新、旧知识的联系. 本章知识与初中学习的三角形的边、角关系有密切联系,同时要注意与三角函数、平面向量等知识的联系,将新知识融入已有的知识体系,从而提高综合运用知识的能力.

3. 提高数学建模能力. 利用解三角形解决相关的实际问题,关键是读懂题意,找到量与量之间的关系,根据题意作出示意图,将实际问题抽象成解三角形的模型.

## 1.1 正弦定理和余弦定理

### 1.1.1 正弦定理

#### 相关知识链接

#### 1. 平面向量的数量积

对于两个向量  $a$  和  $b$ , 则  $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$  (其中  $\theta$  为  $a$  与  $b$  的夹角).

#### 2. 平面几何知识回顾

在圆中,同弧所对的圆周角相等,同弦所对的圆周角相等或互补.

#### 3. 锐角三角函数的定义

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $a, b$  分别为  $\angle A$  与  $\angle B$  所对的直角边的长,  $c$  为斜边的长, 则

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}.$$

#### 教材新知识点讲解

#### 知识点 1 正弦定理

##### 定 理

在一个三角形中,各边的长和它所对的角的正弦的比相等,即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

##### 应注意的问题

(1) 教材中分锐角三角形和钝角三角形两种情形对定理进行了证明:

当  $\triangle ABC$  是锐角三角形(如图 1-1-1)时,设边  $AB$  上的高是  $CD$ , 根据三角

函数的定义有  $CD = a \sin B$ ,  $CD = b \sin A$ ,  $\therefore a \sin B = b \sin A$ , 则可得到  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ .

同理可得  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

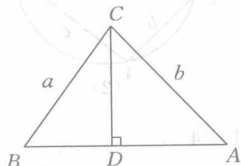


图 1-1-1

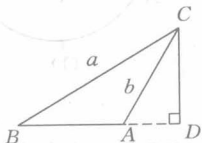


图 1-1-2

当  $\triangle ABC$  是钝角三角形(如图 1-1-2)时, 设  $\angle BAC$  为钝角,  $AB$  边上的高为  $CD$ .  $\because \angle BAC = \pi - \angle DAC$ ,  $\therefore \sin \angle BAC = \sin(\pi - \angle DAC) = \sin \angle DAC$ ,  $\therefore CD = b \sin \angle DAC = b \sin A$ , 并且  $CD = a \sin B$ ,  $\therefore b \sin A = a \sin B$ , 即  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ . 同理可

得  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

综上所述, 有  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

(2) 利用向量知识证明:

当  $\triangle ABC$  是锐角三角形时, 过  $A$  点作单位向量  $i$  垂直于  $AB$ , 如图 1-1-3(1).

$$\therefore \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC},$$

$$\therefore i \cdot \vec{AC} = i \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = i \cdot \vec{AB} +$$

$$i \cdot \vec{BC},$$

$$\therefore b \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right), \therefore b \sin A = a \sin B, \text{ 即 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

当  $\triangle ABC$  为钝角三角形时, 如图 1-1-3(2), 可类似地得出上述结论.

(3) 利用平面几何知识证明:

如图 1-1-4 所示, 设  $O$  为  $\triangle ABC$  的外接圆的圆心, 外接圆的半径为  $R$ , 连接  $BO$  并延长, 交  $\odot O$  于  $A'$ , 连接  $A'C$ , 则  $\angle A' = \angle A$  或  $\angle A' = \pi - \angle A$ ,  $\therefore \sin A =$

$$\sin A' = \frac{BC}{A'B} = \frac{a}{2R}, \text{ 即 } \frac{a}{\sin A} = 2R, \text{ 同理可证 } \frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ 故有 } \frac{a}{\sin A} =$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

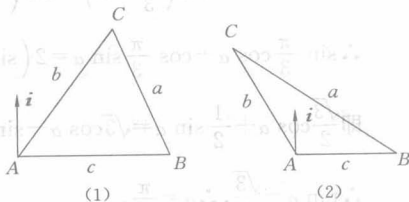


图 1-1-3

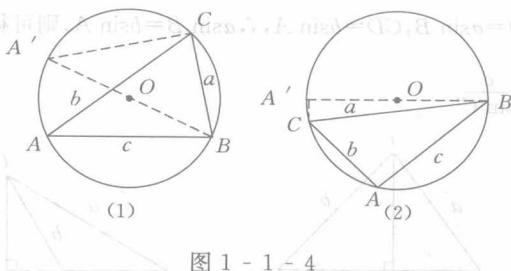


图 1-1-4

**例 1** 若 $\triangle ABC$ 的三内角满足 $\angle A + \angle C = 2\angle B$ ,并且最长边为最短边的 2 倍,则此三角形的三内角之比为\_\_\_\_\_.

**解答** 根据题意,设 $\triangle ABC$ 的三内角从小到大依次为 $\angle B - \alpha, \angle B, \angle B + \alpha$ .

$$\because \angle A + \angle B + \angle C = \pi, \therefore \angle B - \alpha + \angle B + \angle B + \alpha = \pi, \therefore \angle B = \frac{\pi}{3}.$$

设 $\triangle ABC$ 的最短边为 $a$ ,则最长边为 $2a$ .

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}, \text{ 则 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right),$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha, \therefore 3 \sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \alpha = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \text{三内角分别为 } \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \text{ 它们的比为 } 1:2:3.$$

**点评** 正弦定理具有把三角形的边角之间的关系进行相互转化的功能,如本例中,利用正弦定理把 $a$ 与 $2a$ 之间的关系转化为 $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ ,从而顺利地求出了三内角.本例还用到了公式: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ,  
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ ,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

### 知识点 2 正弦定理的活用

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (其中 $R$ 为三角形的外接圆半径)有如下几个变形公式,它们在解题中有着广泛的应用.

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A};$$

(2)  $a \sin B = b \sin A, c \sin B = b \sin C, c \sin A = a \sin C;$

(3)  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C;$

(4)  $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R};$

(5)  $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C.$

**例 2** 在  $\triangle ABC$  中, 求证:  $\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 0.$

**分析** 根据所要求证的等式知, 这三个分式中的角与边的关系具有对称性, 因此只需将其中之一变形即可. 分式中既有角又有边, 需要作边与角的转化.

**证明** 设  $R$  为  $\triangle ABC$  的外接圆半径.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} &= \frac{(2R \sin A)^2 - (2R \sin B)^2}{\cos A + \cos B} \\ &= \frac{4R^2[(1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B)]}{\cos A + \cos B} = \frac{4R^2(\cos^2 B - \cos^2 A)}{\cos A + \cos B} \\ &= \frac{4R^2(\cos B - \cos A)(\cos B + \cos A)}{\cos A + \cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A), \end{aligned}$$

同理,  $\frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} = 4R^2(\cos C - \cos B), \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C),$

$\therefore$  左边  $= 4R^2(\cos B - \cos A) + 4R^2(\cos C - \cos B) + 4R^2(\cos A - \cos C) = 0,$

故所求证的等式成立.

**点评** 等号左边是一个关于三角形的三边和三内角的轮换式(具有对称性), 解题时应充分利用这一特点.

### 知识点 3 利用正弦定理解三角形

一般地, 我们把三角形的三个角  $\angle A, \angle B, \angle C$  和它们的对边  $a, b, c$  叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素, 求其他元素的过程叫做解三角形.

利用正弦定理可解下列两种类型的三角形:

(1) 已知两角及一边, 求其余两边;

(2) 已知两边及其中一边的对角, 求另一边.

#### 教材典例剖析

**P3 例 1** 是正弦定理的第一种应用, 已知三角形的任意两角与一边, 求三角形的另一角和另两边. 解题思路: 先由三角形的内角和定理求出另一角, 然后利用正弦定理求另两边.

**P4 例 2** 是正弦定理的第二种应用, 已知三角形的任意两边与其中一边的对角解三角形, 本题的难点在于如何去判断解的个数. 解决此类问题常采用的方法: 在解题之前, 可先根据三角形中大角对大边的性质对已知条件进行分析, 判断解的个数, 从而优化解题过程.





**例3** 已知 $\triangle ABC$ .

(1)  $a=\sqrt{3}, b=2, \angle B=45^\circ$ , 求 $\angle A$ ;

(2)  $\angle A=30^\circ, a=\sqrt{2}, b=2$ , 求 $\angle B$ ;

(3)  $a=3, b=4, \angle A=60^\circ$ , 求 $\angle B$ ;

(4)  $\angle A=30^\circ, \angle B=45^\circ, a=2$ , 求 $c$ .

**分析** 利用正弦定理求解.

**解答** (1) 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  得  $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ,

又  $\angle A \in (0, \pi)$ ,  $\therefore \angle A \approx 37.76^\circ$  或  $142.24^\circ$ ,

而  $142.24^\circ + 45^\circ > 180^\circ$ , 这与  $\angle A + \angle B < 180^\circ$  矛盾,  $\therefore \angle A = 37.76^\circ$ .

(2) 由正弦定理得  $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\therefore \angle B = 45^\circ$  或  $135^\circ$ .

(3) 由正弦定理得  $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ , 故这样的  $\angle B$  不存在.

(4)  $\because \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 105^\circ$ , 又  $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ ,

$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ .

**点评** 利用正弦定理解三角形时, 有时不一定有解, 那么何时无解? 而有解时, 有时有一解, 有时有两解, 那么何时有一解? 何时有两解? 请同学们思考并总结规律.

### ◆ 疑难问题辨析

**疑难点** 在上面的例3中我们看到, 已知三角形的两边和其中一边的对角, 解此三角形时, 有时有两解, 有时有一解, 有时无解. 如果不解三角形, 那么能否确定三角形的解的个数呢?

**点拨** 若已知  $a, b, \angle A$ , 由正弦定理可得  $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = m$ , 于是  $\sin B$  的值可知, 利用三角函数知识可求出  $\angle B$ , 求出  $\angle B$  后, 可得  $\angle C = \pi - (\angle A + \angle B)$ , 再利用正弦定理可求出边  $c$ . 现在的问题是: 由正弦定理得出的  $\sin \angle B = \frac{b \sin A}{a}$  的值不一定在  $(0, 1]$  内(如例3(3)), 即使  $\sin B$  的值在  $(0, 1]$  内, 根据三角函数知识可知, 由  $\sin B = m (0 < m < 1)$  所得出的  $\angle B$  在  $(0, \pi)$  内有两个值, 一个是锐角, 一个是钝角, 但这两个角不一定是三角形的解, 因为它们与已知的  $\angle A$  的和有可能大于或等于  $180^\circ$ . 当  $\sin B = m = 1$  时,  $\angle B = \frac{\pi}{2}$ , 但此时  $\angle A + \angle B$  可能不在  $(0, \pi)$  内. 由此可知, 不解三角形而直接判定三角形的解的个数的程序如下: (1) 先判定  $m$  的值是否在