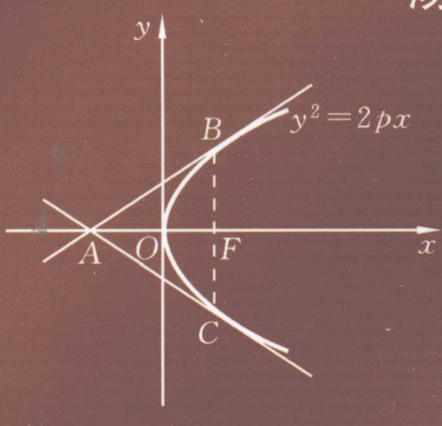
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析学习指导与习题详解

（上册）

汤燕斌　王德荣　李大华　林益



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析
学习指导与习题详解

（上册）

汤燕斌　王德荣　李大华　林　益

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析学习指导与习题详解(上册)/汤燕斌　王德荣　李大华　林　益.
—武汉:华中科技大学出版社,2009 年 4 月
ISBN 978-7-5609-5171-3

Ⅰ.工…　Ⅱ.①汤…　②王…　③李…　④林…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 025103 号

工科数学分析
学习指导与习题详解(上册)　　汤燕斌　王德荣　李大华　林　益

策划编辑:周芬娜(hbzfn30@163.com)
责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:刘　竣　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:11.75　　字数:230 000
版次:2009 年 4 月第 1 版　　印次:2009 年 4 月第 1 次印刷　　定价:18.00 元
ISBN 978-7-5609-5171-3/O·482

内 容 简 介

本书是与李大华、林益教授等主编的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《工科数学分析》(上、下册)(第三版)相配套的教学辅导书,主要是为使用该教材的学生提供课后复习指导,同时兼顾教师的教学需要.本书也可作为使用其他教材学习高等数学的学生和相关教师的参考书.

本书通过对基本概念、基本理论及重要定理和思想方法的深入分析,逐步引导学生对所学内容进行再思考,在探究的过程中加深对重点和难点的认识,从而提高学生运用数学知识分析和解决问题的能力.本书按照对应教材中的章节顺序编写,每节均包含内容提要、释疑解惑、范例分析、习题选解四个部分的内容,每章的最后给出原教材中总习题的全解.

前　　言

本书是与李大华、林益教授等主编的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《工科数学分析》(上、下册)(第三版)相配套的教学辅导书，主要是为使用《工科数学分析》的学生提供课后复习指导，同时兼顾教师的教学需要，也可作为使用其他教材学习高等数学的学生和教师的参考书.

本书力求通过对基本概念、基本理论及重要定理和思想方法的深入分析，逐步引导学生对所学内容进行再思考，在探究的过程中加深对重点和难点的认识，从而提高学生运用数学知识分析和解决问题的能力. 本书按照《工科数学分析》中的章节顺序，每节均包含内容提要、释疑解惑、范例分析、习题选解四个部分的内容，每章的最后给出本章的总习题全解.

内容提要　此部分简要地给出了本节的主要概念、主要定理及重要的思想方法，学生阅读时可以根据概要的提示回顾所学过的内容，对不清楚的内容务必重新阅读《工科数学分析》，从而加深对相关内容的理解.

释疑解惑　此部分主要针对学生学习中经常遇到的普遍问题进行重点分析，对典型思想方法进行总结和归纳，对容易混淆的概念进行辨析.

范例分析　此部分提供《工科数学分析》中没有出现过的典型例题，分析解题思路，讲解解题方法，以提高读者举一反三的能力，这些例题也可供教师上习题课时选用.

习题选解　此部分对《工科数学分析》中较难的习题进行了分析和解答，供学生在自己完成习题后进行对比和参考. 在复习过程中，遇到不会做的题目时，读者不要立即去看解答，而应先把《工科数学分析》中的有关部分复习、思考一下，然后再回头去解题. 实在不会解答此题时，才看解答. 这时一定要反思：自己不会解这道题的症结是什么？只有这样认真、深入地复习、做题，才能取得良好的学习效果.

本书由华中科技大学数学与统计学院的下列四位教师编写：李大华教授(第1、2、3章)、王德荣副教授(第4、6章)、汤燕斌教授(第5、7、10章)、林益教授(第8、9、11章). 全书由汤燕斌统稿.

本书在编写过程中得到华中科技大学"新世纪教学改革工程"第六批立项教材基金的资助. 同时，对华中科技大学出版社的大力支持，特别是对策划编辑周芬娜老师和责任编辑王汉江老师的辛勤劳动表示衷心的感谢！

对于本书中的不足和错误，恳请专家、同行及热心的读者批评指正.

编　者

2008年10月

于华中科技大学

目　　录

第1章 集合与函数

1.1 集合与实数集

内容提要

1. 集合的一般概念,集合的表示法,集合的并、交、差、余,两个集合的乘积集合.
2. 实数的性质、常用不等式.
3. 区间、邻域、空心邻域.
4. 确界的概念、确界原理.

释疑解惑

1. 如何用精确的语言描述有界数集和无界数集?

答 设 E 为一非空数集,若存在数 M 和 m,使得 $\forall x\in E$ 都有 $m\leqslant x\leqslant M$,则称 E 为有界数集. 若对任何数 G,都存在 $x_0\in E$,使得 $x_0>G$,则称数集 E 无上界. 若对任何数 g 都存在 $x_0\in E$,使得 $x_0<g$,则称数集 E 无下界. 无上界或者无下界的数集称为无界数集. 当然,既无上界又无下界的数集是无界数集.

2. 有上界的数集的最大数与上确界有什么不同?

答 设 E 是一个有上界的数集,则根据确界原理,其上确界肯定存在,但这个上确界可能属于 E,也可能不属于 E. 因此,E 的上确界不一定是 E 的最大数. 另一方面,有上界的数集 E 不一定有最大数;若 E 有最大数,则此最大数必属于 E,并且此最大数就是 E 的上确界. 具体例子可参见《工科数学分析》(上册)第 6 面的例 1.1.3.

范例分析

例 1 设 $A\cap B=A$,证明 $A\subset B$.

证 设 $x\in A$,则由题设知 $x\in A\cap B$. 由交集的定义知必有 $x\in A$ 且 $x\in B$. 这表明由 $x\in A$ 可推出 $x\in B$, 因此 $A\subset B$.

例 2 设 $|a|<1$,$|b|<1$,证明 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证　要证$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$,即证$-1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1$,即证$1-\dfrac{a+b}{1+ab}>0$和$1+\dfrac{a+b}{1+ab}>0$.实际上,由题设知

$$|ab|=|a|\cdot|b|<1\Rightarrow -1<ab<1\Rightarrow 1-ab>0,\quad 1+ab>0;$$
$$|a|<1,\quad |b|<1\Rightarrow 1-a>0,\quad 1+a>0;\quad 1-b>0,\quad 1+b>0,$$

于是推出$1-\dfrac{a+b}{1+ab}=\dfrac{1+ab-a-b}{1+ab}=\dfrac{(1-a)(1-b)}{1+ab}>0$. 类似可证$1+\dfrac{a+b}{1+ab}>0$.

习题选解

习　题　1.1(A)

5. 设$a\leqslant c\leqslant b$,证明$|c|\leqslant\max(|a|,|b|)$.

证　方法一　由于$\max(|a|,|b|)\geqslant|b|\geqslant b\geqslant c$及$-\max(|a|,|b|)\leqslant-|a|\leqslant a\leqslant c$,故综合以上两式即得$|c|\leqslant\max(|a|,|b|)$.

方法二　分$c\geqslant 0$与$c<0$的情形.当$c\geqslant 0$时,$c\leqslant b\Rightarrow|c|\leqslant|b|\leqslant\max(|a|,|b|)$;当$c<0$时,$0<-c\leqslant-a\Rightarrow|c|\leqslant|a|\leqslant\max(|a|,|b|)$.

10. 求下列数集的上、下确界:(4) $D=\{x|x>0$且$x^2<2\}$.

解　$x^2<2\Rightarrow|x|<\sqrt{2}$,而$x>0$,故有$0<x<\sqrt{2}$,从而$\sup D=\sqrt{2}$,$\inf D=0$.

习　题　1.1(B)

5. 设$a,b>0$,求证(1) $(a+b)^p\geqslant a^p+b^p\ (p>1)$;(2) $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p\ (0<p<1)$.

证　(1) 方法一　令$p=1+h,h>0$,则

$$(a+b)^p=(a+b)^{1+h}=(a+b)(a+b)^h=a(a+b)^h+b(a+b)^h\geqslant a^{1+h}+b^{1+h}=a^p+b^p.$$

方法二　$\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^p\leqslant\dfrac{a}{a+b}$,$\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^p\leqslant\dfrac{b}{a+b}$,所以

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p+\left(\frac{b}{a+b}\right)^p\leqslant 1,\quad 即\quad (a+b)^p\geqslant a^p+b^p.$$

(2) 令$p=1-h$,$0<h<1$,其证法与上述的方法一类似.

7. 设E为非空的有界数集,定义$E^-=\{x|-x\in E\}$. 试证明:

(1) $\inf E^-=-\sup E$;　(2) $\sup E^-=-\inf E$.

证　(1) 设$\alpha=\inf E^-$,由定义知① 当$-x\in E^-$时,有$-x\geqslant\alpha$;② $\forall\varepsilon>0$,$\exists -x_0\in E^-$,使$-x_0<\alpha+\varepsilon$. 由此分别推出① 当$x\in E$时,有$x\leqslant-\alpha$;② $\forall\varepsilon>0$,$\exists x_0\in E$,使$x_0>-\alpha-\varepsilon$.这表明$-\alpha=\sup E$,即$\inf E^-=-\sup E$.

(2) 方法类似,略.

9. 设A是有下界的非空数集,$\alpha=\inf A$. 证明$\forall\varepsilon>0$,$\exists x_0\in A$,使得$\alpha\leqslant x_0<\alpha+\varepsilon$.

证　由题设知,α是集A的一个下界:$\forall x\in A$,有$x\geqslant\alpha$.如果不存在这样的$x_0\in A$,满足$x_0<\alpha+\varepsilon$,则$\forall x\in A$,都满足$x\geqslant\alpha+\varepsilon$.于是$\alpha+\varepsilon$也是$A$的一个下界.由于$\alpha$是$A$

的最大下界,故必有 $\alpha \geqslant \alpha+\varepsilon$. 但由于 $\varepsilon>0$,故产生矛盾,命题得证.

10. 证明:若数集 A 包含了它的一个下界 α,则 $\alpha=\inf A$.

证 设 α' 是 A 的另一个下界,则因 $\alpha \in A$,故 $\alpha' \leqslant \alpha$,这表明 α 是 A 的最大下界,所以 $\alpha=\inf A$.

1.2 映射与函数

内容提要

1. 映射的概念、映射的定义域和值域、原像集、恒等映射.

2. 函数的概念、一对一的函数、复合函数和反函数、多元函数的概念.

释疑解惑

1. 当变量 x 与 y 不能用算式表示其相互间的关系时,能否说 x 与 y 不存在函数关系?

答 不能这样说. 函数的表示法有三种:表格法、图形法、解析法(即算式表示法). 算式表示法只是其中的一种. 例如,用自动记录仪记录了一天中气温 T 与时间 t 的关系的曲线,它刻画了 T 与 t 的函数关系,但它很难用算式表示.

2. 两个函数相同是什么意思?

答 两个函数相同是指:(1) 它们有相同的定义域;(2) 它们的对应规则相同. 例如,函数 $y=\lg(x^2)$ 与 $y=2\lg x$ 是不同的,因为前者的定义域是 $x\neq 0$ 的任何实数,而后者的定义域是 $x>0$. 但是如果只考虑 $x>0$ 的部分,则这两个函数是相同的.

3. 在函数的算式表示法中,一个函数是否只能用一个式子表示?

答 不. 有些函数的关系比较复杂,需要用多个算式表示,如《工科数学分析》(上册)中第11面的例1.2.5和例1.2.6,其中的符号函数和狄利克雷函数都是分段函数,在其定义域的不同部分,对应规则由不同的算式表示. 这时不能把它们理解为多个函数,而应该理解为由多个式子表示的一个函数.

范例分析

例1 求函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$ 的定义域.

解 使 $[x+1]=0$ 的点满足 $0\leqslant x+1<1$,即 $-1\leqslant x<0$. 因此函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

例2 求函数 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}\ (x>0)$ 的反函数及反函数的定义域.

分析　一般地,若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上存在反函数,求此反函数的步骤是:求出 $y=f(x)$ 对应的值域 $f(I)$,然后把 $y=f(x)$ 中的变量 x 与 y 对换,即写成 $x=f(y)$,解出 $y=g(x)$,此即所要求的反函数的解析表达式,其定义域为 $f(I)$.

解　当 $x\geqslant 0$ 时,此函数的值域为 $-1\leqslant y\leqslant 3$. 将函数表达式改写为 $x=1+2\sin\dfrac{y-1}{y+1}$,可解得

$$y=\frac{1+\arcsin[(x-1)/2]}{1-\arcsin[(x-1)/2]}\ (-1\leqslant x\leqslant 3).$$

例 3　设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(\cos x)$.

解　因为 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$,故

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x\quad 或\quad f(\cos x)=1-\cos 2x.$$

习题选解

习　题　1.2(B)

3. 如果 f 和 g 都是一对一的函数,那么 $f\circ g$ 是否为一对一的?为什么?

解　设 $x_1\neq x_2$,则因 g 是一对一的,故有 $y_1=g(x_1)\neq g(x_2)=y_2$. 又因 f 也是一对一的,故有 $f(y_1)\neq f(y_2)$,此即 $f[g(x_1)]\neq f[g(x_2)]$,所以 $f\circ g$ 也是一对一的.

1.3　函数的几种特性与初等函数

内容提要

1. 函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

2. 初等函数.

释疑解惑

1. 区间 (a,b) 内定义的两个无界函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之和是否一定是无界函数?

答　不一定. 例如,$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$,$g(x)=-\dfrac{1}{x}$,它们都是区间 $(0,1)$ 内的无界函数,但它们的和 $f(x)+g(x)=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=1$ 在区间 $(0,1)$ 内有界.

2. 是否任何周期函数都有最小正周期?

答　否. 例如,狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ 这个函数以任何有理数为周期,这是因为对任何有理数 r,若 x 为有理数,则 $x+r$ 也为有理数,于是 $D(x+r)=D(x)=0$;若 x 为无理数,则 $x+r$ 也为无理数,于是 $D(x+r)=D(x)=1$. 由于不存在最小的有理数,故 $D(x)$ 也就不存在最小正周期.

3. 定义在一个关于原点对称的区间内的函数,能否既是奇函数又是偶函数?为什么?

答　只有恒为零的函数,即 $f(x)\equiv 0$ 才可能既是奇函数又是偶函数. 事实上,若函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的区间内既是奇函数又是偶函数,则对该区间内的每个点 x,有 $f(x)=-f(-x)$,$f(x)=f(-x)$ 都成立,两式相加得 $2f(x)=0$,即 $f(x)=0$.

4. 是不是只有单调函数才存在反函数?

答　函数在区间上单调只是存在反函数的充分条件,并非必要条件. 例如,非单调函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$ 它的反函数为 $f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

习题选解

习　题　1.3(A)

5. 证明 $f(x)=4-x^2$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内有界.

证　$|f(x)|=|4-x^2|=|2+x||2-x|$. 当 $|x|<\pi/2$ 时,有 $|2+x|<2+\pi/2<4$,又由 $2-\pi/2<2-x<2+\pi/2$ 推出 $|2-x|<4$,所以 $|f(x)|<16$.

习　题　1.3(B)

3. 设 $f(x)$ 是周期为 T $(T>0)$ 的周期函数,试证明 $f(-x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

证　$f[-(x+T)]=f(-x-T)=f[(-x-T)+T]=f(-x)$.

4. 设 $f(x)$,$g(x)$ 是定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数,求证 $f[g(x)]$ 也是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数.

证　不失一般性,设 f,g 均为单调增加函数. 任取 $x_1<x_2$,则因 g 单调增加,有 $g(x_1)\leqslant g(x_2)$. 又因 f 单调增加,故有 $f[g(x_1)]\leqslant f[g(x_2)]$,即 $f[g(x)]$ 也是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数.

5. 证明函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

证　$\forall G>1$,取 $0<x_0<\frac{1}{G}$,则 $x_0\in(0,1)$,有 $\frac{1}{x_0}>G$. 所以 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

总习题(1)全解

1. 试建立集合 A 与 B 之间的一一映射：

(1) $A=(0,1)$，$B=(-\infty,+\infty)$； (2) $A=\{$全体自然数$\}$，$B=\{$全体正有理数$\}$.

解 (1) $y=\cot(\pi x):A\to B$ 是一一映射.

(2) B 的全体元素可排成

$$\begin{array}{ccccc}
1 \longrightarrow & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

依柯西对角线法，略去重复出现的数，排列成 $1,2,\frac{1}{2},\frac{1}{3},3,4,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots$，将其记作 r_1，$r_2,r_3,r_4,r_5,\cdots$，这就与全体自然数建立了一一对应的关系.

2. 证明两个有理数 $r_1,r_2(r_1<r_2)$ 之间必存在一个无理数.

证 取 $\alpha=(r_2-r_1)/\sqrt{2}$，则 α 是无理数，且 $r_1<\alpha<r_2$.

3. 求下列函数 y 的定义域：

(1) $f(x)=\cot(\pi x)+\arccos 2^x$，$y=f(x)$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$\varphi(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，$y=f[\varphi(x)]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，$y=f[g(x)]$；

(4) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[y(x)]=1-x$，且 $y(x)\geqslant 0$.

解 (1) 由 $\cot u$ 的定义知，$k\pi<\pi x<(k+1)\pi$，即 $k<x<k+1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 由 $\arccos v$ 的定义知，$-1\leqslant 2^x\leqslant 1$，从而有 $x\leqslant 0$. 由此得函数 y 的定义域

$$D(f):-(n+1)<x<-n\ (n=0,1,2,\cdots).$$

(2) $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{\varphi+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)/(x^2-1)+1}=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$，定义域为 $x\neq 0,x\neq\pm1$ 的任何实数.

(3) $f[g(x)]=\begin{cases}2g, & 0\leqslant g(x)\leqslant 1,\\ g^2, & 1<g(x)\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}2\ln x, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\\ \ln^2 x, & \mathrm{e}<x\leqslant \mathrm{e}^2,\end{cases}$ 定义域为 $[1,\mathrm{e}^2]$.

(4) 由题设知 $1-x=\mathrm{e}^{y^2}$，$y^2=\ln(1-x)$，$y=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

4. 将函数 $y=\dfrac{|x|-1}{|x+1|}$ 写成分段函数形式.

解 $y=\begin{cases}1, & x<-1,\\ -1, & -1<x<0,\\ 1-2/(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ $(x\neq -1)$.