# 计算方法
# 及其在测绘中的应用

朱长青　编著

测绘出版社

# 序　言

计算方法是研究各种数学问题的近似数值解法的一门数学课程，由于其应用的广泛性，已成为许多学科的研究生和高年级大学生的基本课程。在测绘领域，计算方法也得到了广泛而深入的应用。

本书系统地介绍了计算方法的基本思想和基本方法。全书内容共分七章，主要有代数插值、样条函数插值与插值、函数最佳逼近、二元函数插值与逼近、数值积分和数值微分、常微分方程初值问题的数值解法、微分方程边值问题的数值解法等。同时，根据测绘专业的需要，选取了一些专业上需要而一般教材上没有的内容，如加权平均抛物线拟合法、张力样条函数、移动曲面拟合法、二元函数逼近等以及作者推证的一些方法和公式，如带有导数的双二次样条函数乘积型插值、二元函数数值微分、收敛性等。另外，还穿插了一些计算方法在测绘上的应用的实例。在叙述中力求简捷明了，便于学习。在每章最后，还配备了相应的习题，以利于加深对内容的理解和掌握。

本书是作者在讲授我院研究生“计算方法”课程体会基础上，根据作者编写的“数值逼近”和“变分法”讲义经修改、整理而成的。本书可作为工科院校特别是与测绘相关专业的研究生“计算方法”课程的基础教材，也可作为本科高年级选修课教材及希望了解应用这方面知识的工程技术人员的参考用书。全书讲授时间约为 70 学时。

本书在编写过程中，承蒙我院数学教研室王鸿飞教授、黄顺玉教授认真细致地审阅了全书，并提出了宝贵的修改意见。我院数学教研室孔绍文主任、教务部的唐三林同志、方斌同志等也给予了大力的支持和帮助，作者在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中一定还有缺点和不妥之处，恳请读者批评指正。

朱长青

1997 年 3 月于郑州解放军测绘学院

# 目　　录

# 第一章　代数插值

## §1-1　引　　言

在生产和科研中，我们经常用函数 $y=f(x)$ 来表示某种内在规律的变化关系，但在实际问题中，我们经常遇到这样的情况，虽然理论上知道函数 $y=f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上是存在连续的，例如地图上的等高线，但是有时很难找到它的解析表达式，而往往只能通过实验或测量等手段得到 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的有限个不同的点 $x_0$，$x_1$，…，$x_n$ 上的值 $y_0$，$y_1$，…，$y_n$。显然，通过这有限个点来分析 $y=f(x)$ 的形态，研究 $y=f(x)$ 的变化规律，求出 $y=f(x)$ 在其它点的值都是困难的。因此，我们希望根据给定的函数值找出 $f(x)$。若不行，则构造一个函数 $y=P(x)$ 近似代替 $y=f(x)$。自然地，我们希望 $P(x)$ 既能反映 $f(x)$ 的特性，又便于计算，且利用 $P(x)$ 代替 $f(x)$ 的误差能尽量小。寻找这样的 $P(x)$ 就是我们计算方法中所要研究的主要问题。

如何根据给定的值寻找 $P(x)$ 呢？为了满足我们上面所希望的要求，通常要求 $P(x)$ 在点 $x_0$，$x_1$，…，$x_n$ 上满足要求

$$P(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{1-1-1}$$

寻找满足上述条件的 $P(x)$ 的问题称为插值问题，条件(1-1-1)称为插值条件；$f(x)$ 称为被插值函数；$P(x)$ 称为插值函数；$x_0$，$x_1$，…，$x_n$ 称为插值节点；除非特别声明，我们总设节点是互不相同的；$[a,b]$ 称为插值区间；$f(x)-P(x)$ 称为插值余项，记为 $R(x)$，即

$$R(x)=f(x)-P(x)。$$

从几何上看，插值问题就是通过曲线 $y=f(x)$ 上的 $n+1$ 个互不相同的点 $(x_i, y_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，作曲线 $y=P(x)$ 来近似代替曲线 $y=f(x)$。见图 1-1。

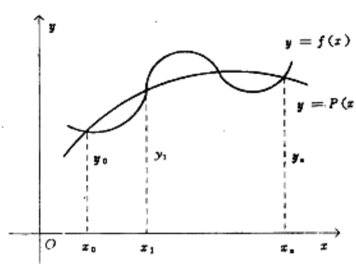

图 1-1

寻找插值函数的方法称为插值法，它是一种古老的、然而却是目前常用的方法，它不仅直接广泛地应用于生产实际和科学研究中，而且也是进一步学习数值计算方法的基础。

插值问题的首要工作是插值函数的选取，这常取决于使用上的需要及计算上的方便。常用的插值函数有代数多项式、三角多

项式、有理函数等。若选取的插值多项式是代数多项式，则这样的插值问题称为代数插值问题。本章我们主要研究代数插值问题。在下一章，我们将选用样条函数作为插值函数。

在选取了插值函数的类型之后，我们自然要考虑下面的问题：

1、满足插值条件的插值函数是否存在？

2、插值函数 $P(x)$ 是否唯一？

3、插值函数 $P(x)$ 的表达式如何？

4、插值函数 $P(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 的误差如何？

5、插值问题有何具体应用？

下面，我们将围绕这些问题来讨论代数插值问题。首先，我们给出 $n$ 次代数插值多项式的存在唯一性和余项估计，进而给出拉格朗日形式和牛顿形式的 $n$ 次代数插值多项式的具体表达式，最后讨论带有导数插值要求的埃尔米特插值多项式及分段低次插值。

## § 1-2　$n$ 次代数插值多项式

本节，我们给出 $n$ 次代数插值多项式的概念、存在唯一性的证明及余项估计。

### 一、$n$ 次代数插值多项式的概念

设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，且在$[a, b]$上 $n+1$ 个不同的点

$$x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$$

上分别取值

$$y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n$$

若构造一个次数不超过 $n$ 的代数多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1-2-1}$$

使之满足插值条件

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n \tag{1-2-2}$$

那么寻求这样的 $n$ 次代数多项式 $P_n(x)$ 的插值问题称为 $n$ 次代数插值问题，简称 $n$ 次插值。$P_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的 $n$ 次代数插值多项式，简称 $n$ 次插值多项式。

### 二、$n$ 次代数插值多项式的存在唯一性

要得到满足插值条件(1-2-2)的插值多项式(1-2-1)，只要得到插值多项式 $P_n(x)$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 即可。由插值条件(1-2-2)可知，$P_n(x)$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下面的线性方程组

$$
\left.\begin{array}{l}
a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
\cdots\cdots \\
a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{array}\right\} \tag{1-2-3}
$$

由线性代数知，其系数行列式(记为$V$)是$n+1$阶范德蒙(Vandermonde)行列式，且

$$V = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j),$$

由于$x_0, x_1, \cdots, x_n$是区间$[a, b]$上互不相同的点，故上式右端乘积中的每一个因子$x_i - x_j \neq 0$，于是$V \neq 0$，因而由线性代数中的克莱姆(Gramer)法则知，方程组(1-2-3)的解存在且唯一。于是，我们得到下面的定理。

定理 1-1　若插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$互不相同，则满足插值条件(1-2-2)的$n$次代数插值多项式(1-2-1)存在且唯一。

唯一性表明了，不论用什么方法构造，也不论用什么形式来表示插值多项式$P_n(x)$，只要满足同样的插值条件且次数不超过$n$，其结果都是恒等的。

这里应当注意，若不限定插值多项式的次数，则满足插值条件(1-2-2)的插值多项式并不唯一。例如，设$P_n(x)$是满足插值条件(1-2-2)的$n$次代数插值多项式，则对于任何的多项式$S(x)$，多项式

$$Q(x) = P_n(x) + S(x)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

也是满足插值条件(1-2-2)的插值多项式。

通过解线性方程组(1-2-3)，我们可以得到满足插值条件(1-2-2)的$n$次代数插值多项式(1-2-1)。后面几节我们将给出另外几种不同形式的满足插值条件(1-2-2)的形式直观方便的插值多项式。下面先讨论插值多项式的余项估计。

### 三、$n$次代数插值多项式的余项估计

在插值区间$[a, b]$上，我们用满足插值条件(1-2-2)的$n$次代数插值多项式$P_n(x)$近似代替$f(x)$，即

$$f(x) \approx P_n(x),$$

那么，在节点$x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$处，有

$$P_n(x_i) = f(x_i),$$

但在$x \neq x_i$处，$P_n(x)$与$f(x)$一般是不相等的，即存在误差$f(x) - P_n(x)$，这称为插值余项，记为$R_n(x)$，即

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)。 \tag{1-2-4}$$

不妨设互不相同的节点按由小到大的顺序排列，

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b,$$

则我们有下面的余项估计定理。

定理 1-2　若$f(x)$在$[a, b]$上有直到$n+1$阶的导数，则有

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),
\end{aligned} \tag{1-2-5}
$$

其中 $\xi_x \in (a, b)$。

证明　设 $x$ 是$[a, b]$中的任一数，当 $x = x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 时，(1-2-5) 两端都为零，故定理成立。因此下面总设 $x \neq x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$。

由插值条件(1-2-2)，有

$$
R_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, n
$$

因此，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 都是 $R_n(x)$ 的零点，因此可以设

$$
R_n(x) = k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{1-2-6}
$$

若能确定出 $k(x)$，则问题就解决了。为此，引入辅助函数

$$
\varphi(t) = R_n(t) - k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n),
$$

则 $\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个零点 $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$，如果将这 $n+2$ 个零点按大小顺序排列，则由高等数学中的罗尔定理，$\varphi'(t)$ 在$(a, b)$ 上至少有 $n+1$ 个零点，$\varphi''(t)$ 在$(a, b)$ 上至少有 $n$ 个零点，…，$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在$(a, b)$ 上至少有一个零点，设此零点为 $\xi_x$(与 $x$ 有关)，则有

$$
\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - k(x)(n+1)! = 0,
$$

于是，有

$$
k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},
$$

将上式代入(1-2-6)，即得(1-2-5)。

利用余项估计式(1-2-5)，即可得到用 $n$ 次代数插值多项式近似代替 $f(x)$ 的误差。但在具体应用时，因为 $\xi_x$ 在$(a, b)$ 内一般不能具体求出，所以计算 $R_n(x)$ 仍有困难，但对于某些函数 $f(x)$，如果在区间$[a, b]$ 上有

$$
|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1},
$$

则有

$$
|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|, \tag{1-2-7}
$$

由此不等式即可求得插值多项式的误差界。显见，误差不仅和 $f(x)$ 有关，而且也和因子$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 有关，因此，为使 $|R_n(x)|$ 尽量小还需使 $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$ 尽量小，这在以后讨论。

### 四、插值余项的事后估计法

许多情况下，要直接应用余项估计公式(1-2-5)或(1-2-7)来估计误差是困难的。例如，只是给出函数 $y = f(x)$ 的一些点上的值而没有给出具体的解析表达式，当然不能用(1-2-5)或(1-2-7)。但这时，可以通过前后两个计算结果的偏差来估计误差。

以一次插值为例，设有三个插值节点 $x_0 < x_1 < x_2$，先用 $x_0, x_1$ 进行一次插值，求出 $f(x)$ 的一个近似值，记为 $P_1$。然后用 $x_0, x_2$ 进行一次插值，求出 $f(x)$ 的一个近似值，记为

$Q_1$。由余项公式(1-2-5)，有

$$f(x) - P_1 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0)(x - x_1),$$

$$f(x) - Q_1 = \frac{f''(\xi_2)}{2}(x - x_0)(x - x_2),$$

假设 $f''(x)$ 在插值区间变化不大，可认为 $f''(\xi_1) \approx f''(\xi_2)$。将上面两式相除可得

$$\frac{f(x) - P_1}{f(x) - Q_1} \approx \frac{x - x_1}{x - x_2},$$

即有

$$f(x) - P_1 \approx \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(Q_1 - P_1)。 \tag{1-2-8}$$

上式表明，插值结果 $P_1$ 的误差 $f(x) - P_1$ 可以通过两个插值结果的偏差 $Q_1 - P_1$ 来估计。

这种直接利用计算结果来估计误差的方法，称为插值误差的事后估计法。

对于更高次的插值，我们可推导类似于(1-2-8)的估计式。

## §1-3 拉格朗日插值多项式

由上节知道，要求满足插值条件

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n \tag{1-3-1}$$

的 $n$ 次代数插值多项式 $P_n(x)$，只要解一个 $n+1$ 个方程组成的 $n+1$ 元方程组即可。但在实际计算中，当 $n$ 较大时，解 $n+1$ 元线性方程组较为困难。下面我们将介绍几种简便的求 $n$ 次插值多项式 的方法，这一节我们给出拉格朗日(Lagrange)形式的代数插值多项式。

### 一、拉格朗日插值基多项式

为了构造满足插值条件(1-3-1)的 $n$ 次代数插值多项式，我们先考虑一个简单的插值问题，即求一个 $n$ 次插值多项式，使它在插值节点 $x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 上的值为

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{1-3-2}$$

$$i, k = 0, 1, \cdots, n。$$

由条件 $l_k(x_i) = 0(i \neq k)$ 知，$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 都是 $n$ 次多项式 $l_k(x)$ 的零点，故可设

$$l_k(x) = C_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n),$$

其中 $C_k$ 是待定系数。又由条件 $l_k(x_k) = 1$，有

$$1 = l_k(x_k) = C_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n),$$

注意到 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相同，于是由上式可得

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)},$$

因此得

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \end{aligned} \tag{1-3-3}$$

$l_k(x)$ 即为满足插值条件(1-3-2)的 $n$ 次插值多项式。取 $k = 0, 1, \cdots, n$，即得满足插值条件(1-3-2)的 $n+1$ 个 $n$ 次插值多项式 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$，这些多项式称为在 $n+1$ 个节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的 $n$ 次基本插值多项式或 $n$ 次拉格朗日插值基多项式。

## 二、拉格朗日插值多项式

利用 $n+1$ 个 $n$ 次拉格朗日插值基多项式 $l_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为基础，我们就可以写出满足插值条件(1-3-1)的 $n$ 次代数插值多项式。

定理 1-3　满足插值条件(1-3-1)的 $n$ 次插值多项式可表示为

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)。 \tag{1-3-4}$$

证明　由于 $l_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 都是 $n$ 次多项式，故它们的线性组合 $P_n(x)$ 也是次数不超过 $n$ 的多项式。又由于

$$l_k(x_i) = \delta_{ki}, \qquad k, i = 0, 1, \cdots, n$$

于是，得

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

因此，$P_n(x)$ 是满足插值条件(1-3-1)的 $n$ 次代数插值多项式。

我们称满足插值条件(1-3-1)的形如(1-3-4)的 $n$ 次插值多项式为拉格朗日插值多项式，并记为 $L_n(x)$，即

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)。 \tag{1-3-5}$$

由 $n$ 次代数插值多项式的唯一性可知，满足插值条件(1-2-2)或(1-3-1)的 $n$ 次代数插值多项式是唯一的，因此我们这里所得的拉格朗日插值多项式和由方程组(1-2-3)所确定的 $n$ 次代数插值多项式是恒等的，因而它们的余项也是同样的，所以拉格朗日插值多项式的余项公式即为(1-2-5)，即

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - L_n(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)。 \end{aligned} \tag{1-3-6}$$

为了便于上机计算，我们常将拉格朗日插值多项式改写为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[ y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \left( \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \right]。$$

作为常用的特例，我们列出 $n=1$、2 时的拉格朗日插值多项式。

## 三、线性插值和抛物插值

1、线性插值

在(1-3-5) 中取 $n=1$，则拉格朗日插值公式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x),$$

即

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\tag{1-3-7}$$

这是一个线性函数。用 $L_1(x)$ 近似代替 $f(x)$ 称为线性插值，公式(1-3-7) 称为线性插值公式。在利用函数表计算函数值时，常常用到线性插值。在几何上，线性插值就是用通过两点 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$ 的直线近似代替 $y=f(x)$。见图 1-2。

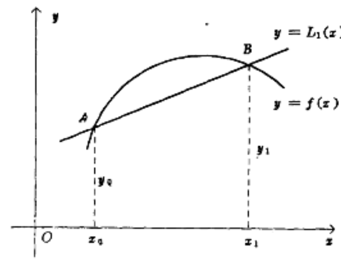

图 1-2

2、抛物插值

在(1-3-5) 中取 $n=2$，则拉格朗日插值公式(1-3-5) 为

$$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x),$$

即

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}。\tag{1-3-8}$$

这是一个二次函数，用 $L_2(x)$ 近似代替 $f(x)$，在几何上就是利用通过三点 $A(x_0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$ 和 $C(x_2, y_2)$ 的抛物线 $y=L_2(x)$ 近似代替 $y=f(x)$。如图 1-3。相应的插值问题称为抛物插值，公式(1-3-8) 称为抛物插值公式。

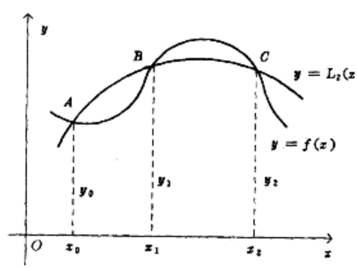

图 1-3

例 1-1　已知函数 $y=\sqrt{x}$ 的值 $\sqrt{1}=1$，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，试分别用线性插值和抛物插值求 $\sqrt{1.5}$ 的近似值，并估计误差。

解　1、利用线性插值。

(1) 取节点为 $x_0=1$，$x_1=2$，则由线性插值公式(1-3-7)，有

$$L_1(x)=\sqrt{1}\,\frac{x-2}{1-2}+\sqrt{2}\,\frac{x-1}{2-1},\tag{1-3-9}$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{1.5}\approx L_1(1.5)&=\sqrt{1}\,\frac{1.5-2}{1-2}+\sqrt{2}\,\frac{1.5-1}{2-1}\\&\approx 0.5+0.5\cdot 1.414=1.207,\end{aligned}$$

下面看公式(1-3-9)的误差，由于

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

故由(1-3-6)，有

$$\begin{aligned}&R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi_x^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1),\\&\xi_x\in[1,2],\end{aligned}\tag{1-3-10}$$

而 $x=1.5$，$x_0=1$，$x_1=2$，故

$$\begin{aligned}|R_1(1.5)|&\leqslant\frac{1}{8}|(1.5-1)(1.5-2)|\max_{1\leqslant\xi_x\leqslant 2}|\xi_x^{-\frac{3}{2}}|\\&=\frac{1}{8}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 1=0.03125。\end{aligned}\tag{1-3-11}$$

(2) 取节点 $x_0=2$，$x_1=3$，利用线性插值，则插值公式为

$$\tilde{L}_1(x)=\sqrt{2}\,\frac{x-3}{2-3}+\sqrt{3}\,\frac{x-2}{3-2},\tag{1-3-12}$$

利用上面的公式

$$\begin{aligned}\sqrt{1.5}\approx\tilde{L}_1(1.5)&=\sqrt{2}\,\frac{1.5-3}{2-3}+\sqrt{3}\,\frac{1.5-2}{3-2}\\&\approx 1.5\cdot 1.414-0.5\cdot 1.732\approx 1.255,\end{aligned}\tag{1-3-13}$$

利用(1-3-10)，这里 $x_0=2$，$x_1=3$，$\xi_x\in[2,3]$，有

$$\begin{aligned}|\tilde{R}_1(1.5)|&\leqslant\frac{1}{8}|(1.5-2)(1.5-3)|\max_{2\leqslant\xi_x\leqslant 3}|\xi_x^{-\frac{3}{2}}|\\&=\frac{1}{8}\cdot 0.5\cdot 1.5\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\approx 0.03315。\end{aligned}\tag{1-3-14}$$

2、利用抛物插值求 $\sqrt{1.5}$。取节点 $x_0=1$，$x_1=2$，$x_2=3$，由抛物插值公式(1-3-8)，有

$$L_2(x)=\sqrt{1}\,\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+\sqrt{2}\,\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+\sqrt{3}\,\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)},\tag{1-3-15}$$

则

$$\begin{aligned}\sqrt{1.5}\approx L_2(1.5)&\approx 1\cdot\frac{(1.5-2)\cdot(1.5-3)}{(1-2)\cdot(1-3)}+\\&1.414\cdot\frac{(1.5-1)\cdot(1.5-3)}{(2-1)\cdot(2-3)}+1.732\cdot\frac{(1.5-1)\cdot(1.5-2)}{(3-1)\cdot(3-2)}\\&=\frac{0.5\cdot 1.5}{2}+0.5\cdot 1.5\cdot 1.414-\frac{1}{2}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 1.732\end{aligned}$$

$$\approx 1.219, \tag{1-3-16}$$

插值余项

$$R_2(x) = -\frac{1}{3!}f'''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \qquad \xi_x \in [1, 3],$$

将 $x=1.5$、$x_0=1$，$x_1=2$，$x_2=3$，$f'''(\xi_x)=\frac{3}{8}\xi_x^{-\frac{5}{2}}$ 代入上式，有

$$|R_2(1.5)| \leqslant \frac{1}{3!}|(1.5-1)\cdot(1.5-2)\cdot(1.5-3)|\max_{1\leqslant\xi_x\leqslant 3}\left|\frac{3}{8}\xi_x^{-\frac{5}{2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{3!}0.5\cdot 0.5\cdot 1.5\cdot\frac{3}{8}\cdot 1 \approx 0.02344。$$

实际上，$\sqrt{1.5}$ 的精确结果为 1.22474…。将上述结果与精确值相比较可见，抛物插值的精度优于线性插值，而线性插值的近似值 $L_1(1.5)$ 又优于 $\bar{L}_1(1.5)$。

一般说来，高次插值多项式的精度要优于低次插值多项式，插值点在节点之间的插值优于节点之外的插值。

插值点在节点之间的插值称为内插，插值点在节点之外的插值称为外插。一般内插优于外插，所以实际应用中一般都用内插。

## §1-4　差商和牛顿插值公式

在上节，我们介绍了拉格朗日型代数插值公式，拉格朗日公式含义直观，形式简单，规律明显，因而被广泛应用。但是它有一个缺点，就是当插值精度不够，需要增加新的节点时，则整个计算工作必须从头开始，不能利用已有的结果。为了克服这一缺点，本节介绍一种能灵活增加插值节点并且节省运算次数的牛顿(Newton)插值公式。下面先给出差商的概念，然后给出牛顿插值公式。

### 一、差商的概念

设有函数 $f(x)$，它在互不相同的节点

$$x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n$$

上分别取值

$$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_i), \cdots, f(x_j), \cdots, f(x_n),$$

则称

$$\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}, \tag{1-4-1}$$

为函数 $f(x)$ 在点 $x_i$，$x_j$ 处的一阶差商，记为 $f[x_i,x_j]$。例如

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}。$$

称一阶差商的差商

$$\frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}, \tag{1-4-2}$$

为函数 $f(x)$ 在 $x_i$，$x_j$，$x_k$ 处的二阶差商，记为 $f[x_i, x_j, x_k]$。例如

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}。$$

一般地，可以通过函数 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶差商来定义 $f(x)$ 的 $k$ 阶差商。例如，$f(x)$ 在 $x_0$，$x_1$，…，$x_k$ 处的 $k$ 阶差商定义为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0 - x_k}。\tag{1-4-3}$$

从差商的定义可见，当 $x_0$，$x_1$，…，$x_k$ 给定时，$k$ 阶差商就是一个具体的数值。但当 $x_0$，$x_1$，…，$x_k$ 中含有变量 $x$ 时，则 $k$ 阶差商就是一个关于 $x$ 的函数。例如

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}。$$

为了便于计算应用，通常采用称为差商表的表格形式计算差商，如表 1-1 所示。

表 1-1

| $x$ | $f(x)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | …… |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | | …… |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | $f[x_1, x_2, x_3, x_4]$ | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | | $f[x_2, x_3, x_4]$ | | |
| | | $f[x_3, x_4]$ | | … | |
| $x_4$ | $f(x_4)$ | | … | | |
| | | … | | | |
| … | … | | | | |

## 二、差商的性质

性质 1　常数的各阶差商为零。

性质 1 由差商的定义立即可得。

性质 2　函数 $f(x)$ 的 $k$ 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 是由函数值 $f(x_0)$，$f(x_1)$，…，$f(x_k)$ 的线性组合而成的，即有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} (x_j - x_i)}。\tag{1-4-4}$$

证明　应用数学归纳法来证明。

当 $k=1$ 时，由差商的定义，有

$$f[x_0, x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0},$$

因此对于 $k=1$ 时，(1-4-4) 成立。

设 $k=m-1$ 时，(1-4-4) 成立，即有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}]=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})},$$

$$f[x_1, x_2, \cdots, x_m]=\sum_{j=1}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}。$$

下面我们证明 $k=m$ 时(1-4-4) 也成立，由 $m$ 阶差商的定义及上面两式，有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_m]=\frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}]-f[x_1, x_2, \cdots, x_m]}{x_0-x_m}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)}+$$

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}\cdot\frac{(x_j-x_m)-(x_j-x_0)}{(x_0-x_m)}+$$

$$\frac{f(x_m)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)},$$

这表明(1-4-4) 对 $k=m$ 也成立。综上可知(1-4-4) 对任意自然数 $k$ 都成立。性质 2 得证。

一般地，有

推论　$$f[x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+k}]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_{m+j})}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_{m+j}-x_{m+i})}。\tag{1-4-5}$$

由性质 2，我们立即可得下面的性质 3。

性质 3　差商具有线性性质。

例如，设 $f(x)=\alpha u(x)+\beta v(x)$，这里 $\alpha$、$\beta$ 都是常数，则关于任意的 $k$ 阶差商，有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\alpha u[x_0, x_1, \cdots, x_k]+\beta v[x_0, x_1, \cdots, x_k]。$$

性质 4　差商具有对称性。即在 $k$ 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 中任意调换 $x_i$、$x_j$ 的次序，其值不变。

事实上，由性质 2 的(1-4-4) 可见，调换 $x_i$、$x_j$ 的次序，(1-4-4) 右端只改变求和的次序，其值不变。例如有

$$f[x_0, x_1, x_2]=f[x_1, x_0, x_2]=f[x_2, x_1, x_0]。$$

性质 5　设 $f(x)$ 是 $x$ 的 $n$ 次多项式，则 $f[x, x_0]$ 是 $x$ 的 $n-1$ 次多项式。

证明　由差商定义

$$f[x, x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

上式右端分子为 $n$ 次多项式，当 $x=x_0$ 时分子为零，因此分子上含有因子 $(x-x_0)$，把该因子与分母共同的因子消去，则右端即为 $x$ 的 $n-1$ 次多项式。

类似于性质 5 的证明，我们可得到下面的推论。

推论　设 $f(x)$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式，则

$f[x, x_0, x_1]$ 为 $x$ 的 $n-2$ 次多项式；

$f[x, x_0, x_1, x_2]$ 为 $x$ 的 $n-3$ 次多项式；

……；

$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]$ 为 $x$ 的零次多项式，即为常数；

$f[x, x_1, x_2, \cdots, x_n]=0$。

### 三、牛顿插值公式

下面，我们利用差商来建立 $n$ 次代数插值问题

$$P_n(x_i)=f(x_i), \qquad i=0, 1, \cdots, n$$

的另一表达式。

由函数 $f(x)$ 在 $x$，$x_0$ 处的差商定义，有

$$f[x, x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

即有

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x, x_0],$$

由 $f(x)$ 在 $x$，$x_0$，$x_1$ 处的差商定义，有

$$f[x, x_0, x_1]=\frac{f[x, x_0]-f[x_0, x_1]}{x-x_1},$$

即有

$$f[x, x_0]=f[x_0, x_1]+(x-x_1)f[x, x_0, x_1],$$

依次类推，继续由各阶差商定义可得下面一组式子

$$\left.\begin{aligned}
&f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x, x_0]\\
&f[x, x_0]=f[x_0, x_1]+(x-x_1)f[x, x_0, x_1]\\
&\qquad\quad =f[x_0, x_1, x_2]+(x-x_2)f[x, x_0, x_1, x_2]\\
&\cdots\cdots\\
&f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]=f[x_0, x_1, \cdots, x_n]+(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]
\end{aligned}\right\} \tag{1-4-6}$$

将(1-4-6)第二式代入第一式，有

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x, x_0, x_1],$$

再将(1-4-6)第三式代入上式，如此继续进行下去，就有

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]+\\&(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]+\end{aligned}$$

$$\cdots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n] +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]。 \quad (1\text{-}4\text{-}7)$$

记

$$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$\cdots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n], \quad (1\text{-}4\text{-}8)$$
$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n], \quad (1\text{-}4\text{-}9)$$

则有

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)。 \quad (1\text{-}4\text{-}10)$$

显然，$N_n(x)$ 是 $n$ 次代数多项式。下面我们证明 $N_n(x)$ 是满足插值条件

$$N_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n \quad (1\text{-}4\text{-}11)$$

的函数 $f(x)$ 的 $n$ 次代数插值多项式。显然，若能证明 $N_n(x)$ 就是 $f(x)$ 在点 $x_0$，$x_1$，$\cdots$，$x_n$ 上插值的拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$，则由插值的唯一性可知，$N_n(x)$ 就是 $f(x)$ 在 $x_0$，$x_1$，$\cdots$，$x_n$ 上的 $n$ 次代数插值多项式。

事实上，在(1-4-7) 中取 $f(x)$ 为 $L_n(x)$，则(1-4-7) 当然成立，于是有

$$L_n(x) = L_n(x_0) + (x-x_0)L_n[x_0, x_1] +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)L_n[x_0, x_1, x_2] +$$
$$\cdots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})L_n[x_0, x_1, \cdots, x_n] +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)L_n[x, x_0, x_1, \cdots, x_n], \quad (1\text{-}4\text{-}12)$$

由于 $L_n(x)$ 是 $n$ 次的多项式，因此由差商的性质 5 的推论知，$n+1$ 阶差商

$$L_n[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0, \quad (1\text{-}4\text{-}13)$$

即(1-4-12) 最后一项为零。

又由于 $L_n(x)$ 满足插值条件，即

$$L_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

而由差商的定义知，差商只与函数在 $x_0$，$x_1$，$\cdots$，$x_n$ 处的函数值有关。因此，由下面的插值条件知，$L_n(x)$ 和 $f(x)$ 关于 $x_0$，$x_1$，$\cdots$，$x_n$ 的各阶差商都相等，即有

$$L_n[x_0, x_1] = f[x_0, x_1],$$
$$L_n[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_1, x_2],$$
$$\cdots\cdots,$$
$$L_n[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n],$$

于是，将上面这些式子及(1-4-13) 代入(1-4-12)，就有

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] +$$