普通高等教育“十一五”国家级规划教材

应用数学

（医学类专业适用）

主编 李 伶

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

应用数学

（医学类专业适用）

主编　李　伶

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，它汲取了医学类全国高职院校高等数学教学改革的成果，充分体现了以应用为目标，以必需、够用为度的原则。本书以医学案例为载体，将数学建模思想融入到了主干教学，并辅之以数学软件的使用，注重培养学生运用信息技术解决实际问题的能力。全书内容包括函数、极限和连续、一元函数的导数与微分、一元函数的积分、常微分方程、医学统计基础、二元函数的微分、二元函数的积分、无穷级数、数学实验软件简介等。

本书既可作为医学类高职高专各专业的高等数学教材，也可作为医学工作者及相关人员的参考书及培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学 / 李伶主编. —北京：高等教育出版社，2008.4

医学类专业适用

ISBN 978-7-04-023657-6

Ⅰ.应… Ⅱ.李… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 028749 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 黄建英
版式设计 王艳红 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2008年4月第1版
印 张	15.25	印 次	2008年4月第1次印刷
字 数	280 000	定 价	21.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 23657-00

前言

在我国,高等职业技术教育是新型的高等教育类型,它培养的是初步掌握高新技术、面向生产、管理和服务第一线的应用型人才。这类人才对基础理论要求是以应用为导向,以必需、够用为度。近年来,高职院校通过开展人才培养水平评估,特别是在创建全国示范性职业技术学院等活动中,在专业建设、课程设置、教学内容、教学方法和教学手段等方面进行了深入改革,使高职院校办学特色更加明显。医学类高职院校高等数学课程也进行了相应的改革探索,在围绕着人才培养目标和为专业教学服务等方面做了大量工作,并取得了初步成果。本书是在充分汲取全国各地医学类高职院校高等数学教学改革成果基础上编写的,具体有以下特色:

1. 本书紧紧围绕医学类高职院校各专业的培养目标,以能力为基础,以素质培养为主线,按照高职医学类专业职业岗位需求的基本数学知识选择和安排教学内容,教学时可针对医学类各专业对数学基础不同需求及教学计划学时实际,选择教材的全部内容或部分章节。

2. 本书从高职院校学生的认知实际出发,起点低,注意与高中阶段数学知识的衔接;内容广而不深,数学概念的引入强调从实际背景出发,可读性强;理论以"必需"、"够用"为度,"应知"服从"应会";每章后介绍数学名人,注重人文素质的培养。

3. 注重与医学类各专业的结合。全书采用引例、练习、案例的体例,注重医学案例的渗入,以系列化的医学引例、案例为载体突出数学在医学上的应用和数学建模能力的培养。围绕着案例教学,要注重让学生在"做中学"、"学中做",在运用数学知识解决医学实际问题的过程中进行体验学习。

4. 注重与信息技术整合。本书第九章是数学实验软件简介,对数学软件 Mathematica 及统计软件 SPSS 的使用进行了介绍,各章中配有数学实验内容。教学时,可把数学软件作为演示工具、计算工具、认知工具和应用工具,构建高等数学学习平台,让学生自主进行"数学实验"及"问题解决"。对于数学基础差的学生可以把演算过程作为"黑箱",运用信息技术平台先实验再回过头学理论。教学时,特别要注意培养学生使用信息技术进行数学学习的意识,为学生将来运用信息技术解决实际问题打好基础。

5. 注重立体化建设。除一本纸质教材外,还有与之配套的教学光盘,其中

包括教师用的电子教案、课件、素材及习题答案等。

本书由李伶主编，肖兆武任副主编，编者还有徐荣辉、朱永娥、安建平、杨景华、胡伟卿、韩群、赵玲、李烁、周金城等老师，周金城、赵玲二位老师参与了部分统稿工作。

本书由北京航空航天大学李心灿教授、滨州职业技术学院院长石忠教授担任主审，襄樊职业技术学院张勤国教授对本书的医学案例内容作了审阅，他们给本书提出了许多宝贵的修改意见，在这里表示衷心感谢。

本书在编写过程中得到了襄樊职业技术学院院长蔡泽寰教授、高等教育出版社高职中心基础分社王冰社长和邓雁城编辑的大力支持和热情帮助，谨此致谢。

由于成书时间紧促，同时限于水平，本书中不足之处，恳切希望得到大家的批评指正。

编者

2008 年 1 月

目录

第一章

函数、极限和连续

学习目标

1. 理解函数的概念,掌握基本初等函数的性质,会建立简单实际问题中的函数关系式.

2. 理解极限的概念,掌握极限四则运算法则,会利用两个重要极限求极限;了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念.

3. 理解函数在一点连续的概念.了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

4. 会用数学软件计算函数值及作函数的图像.

千姿百态的物质世界无不处在运动、变化和发展之中.16 世纪,为适应社会生产力发展的需要,运动变化就成为自然科学研究的主题,对各种变化过程和过程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数概念.微积分是从研究函数开始的,连续函数是它研究的重点.极限是研究微积分学的重要工具,是高等数学中最重要的概念之一.微积分中的许多重要概念,如连续、导数、定积分等,都要通过极限来定义.因此,掌握极限的思想与方法是学好微积分的前提条件.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

第一节　函　　数

一、函数的概念

引例 1　自由落体运动　设物体下落的时间为 t,下落距离为 s,假定开始下落的时刻 $t=0$,那么 s 与 t 之间的依赖关系由

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出,其中 g 为重力加速度.在这个关系中,距离 s 随着时间 t 的变化而变化.其

特点是,当下落的时间 t 取定一个值时,对应的距离 s 的值也就确定了.

引例 2 医师用药 医师给儿童用药和成人不一样,用药量可由儿童的体重来确定. 要计算 1 ~ 12 岁的儿童的正常体重可用经验公式 $y=2x+8$,其中 x 代表年龄(岁),y 代表体重(千克),年龄确定了,相应的体重也就确定了.

上述两个引例的变化过程中,出现的变量不都是独立变化的,而是按照一定的规律相互制约. 分析这种变量间的对应关系,可抽象出"函数"的概念.

1. 函数的定义

定义 1 设 x,y 是同一变化过程中的两个变量,若当 x 取其变化范围内任一值时,按照某种对应规则,总能唯一确定变量 y 的一个值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),$$

x 叫做自变量,y 叫做因变量. x 的取值范围叫做函数的定义域,与 x 的值对应的 y 值的集合叫做函数的值域.

练习 1 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ 的定义域.

解 要使分式有意义,必须分母 $x^2+2x-3\neq0$,即 $x\neq-3$ 且 $x\neq1$,所以这个函数的定义域是 $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.

练习 2 已知 $f(x)=2x^2-3x+7$,求 $f(0)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x+1)$.

解 $f(0)=2\times0^2-3\times0+7=7$,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+7=9,$$

$$f(x+1)=2(x+1)^2-3(x+1)+7=2x^2+x+6.$$

函数有三种常用的表示法:解析法、图像法和列表法. 关于这方面的知识,读者已很熟悉,这里不再叙述.

案例 1 在药物动力学研究中,给健康人服用 Asp-AL(阿斯匹林铝的英文缩写)片后,测得血药浓度 C 和时间 t 的对应数据如下表:

t(时间)	0	1	2	2.5	3	4	6	12
C(血药浓度)	0	2.08	3.20	3.58	4.08	4.56	4.74	1.52

可见,给定一个服药后的时间 t,服药者血药浓度 C 就有一个确定的值与之对应,因此 C 是 t 的函数. 血药浓度(pleasma coucentration)是指药物吸收在血浆内的总浓度,包括与血浆蛋白结合的或在血浆游离的药物,有时也可泛指药物在

全血中的浓度.

案例 2　活酵母细胞在适宜的条件下，每小时可增加原细胞的 1.5 倍，问 10 个细胞 8 小时后，可繁殖成多少个？

解　设 10 个酵母细胞 x 小时后繁殖总数为 y 个，1 小时后有 $10(1+1.5)$ 个，2 小时后有 $10(1+1.5)^2$ 个，依此类推，10 个酵母细胞 x 小时后繁殖总数为

$$y = 10(1+1.5)^x,$$

两边取对数得

$$\lg y = \lg 10 + x\lg 2.5,$$

当 $x=8$ 时，有

$$\lg y = \lg 10 + 8\lg 2.5 = 1 + 8 \times 0.397\,9 = 4.183\,2,$$

解得

$$y = 15\,259,$$

即 10 个活酵母细胞 8 小时后可繁殖成 15 259 个.

此例用数学软件 Mathematica 计算比较简单（见本章实验 2）.

2. 分段函数

引例 3　乘坐火车时，铁路部门规定：每位旅客可免费随身携带不超过 20 千克的物品，超过 20 千克部分，每千克收费 0.2 元，超过 50 千克部分，再加收 50%，应如何计算携带物品所交的费用.

解　设物品的重量为 x 千克，应交费用为 y 元，则有

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 20, \\ 0.2(x-20), & 20 < x \leqslant 50, \\ 0.3(x-50)+6, & x > 50. \end{cases}$$

引例 4　有人根据在一项生理学研究中测得血液中的胰岛素浓度 $c(t)$（单位：mL）是随时间 t（单位：min）变化的数据，建立了如下经验公式

$$c(t) = \begin{cases} t(10-t), & 0 \leqslant t \leqslant 5, \\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t > 5, \end{cases}$$

其中 k 为常数.

像引例 3 和引例 4，自变量在定义域内不同区间上用不同解析式子表示的函数，称为分段函数. 在实际生活和工程实践中，这是一类常见函数.

练习 3　函数 $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 是一个分段函数，其定义域为

$D=(-\infty,+\infty)$，它的图像如图 1－1 所示.

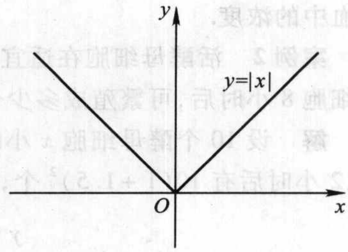

图 1－1

案例 3　某药厂生产某种口服液，年产量 x 万支，每支售价 2 元. 根据历史资料，该厂每年自销量稳定在 50 万支，如果委托代销，销售量可上升 20%，但销售量达 60 万支时即呈饱和状态，若代销费为代销部分药价的 40%，试将总收入 R(万元)表示成年产量 x(万支)的函数.

解　如果该厂年产量不超过 50 万支时，因产品可全部自销售出，这时

$$R=R(x)=2x\ (\text{万元}).$$

若该厂年产量超过 50 万支而不超过 60 万支时，通过委托代销，也能全部售出，但此时需支付代销费 $2\times40\%\times(x-50)$ 万元，这时

$$\begin{aligned}R=R(x)&=2x-2\times40\%\times(x-50)\\&=1.2x+40\ (\text{万元}).\end{aligned}$$

如果该厂年产量超过 60 万支时，因只能售出 60 万支，这时

$$R=R(x)=1.2\times60+40=112\ (\text{万元}).$$

综上可得，总收入 R 与年产量 x 的函数关系式

$$R=R(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 1.2x+40, & 50<x\leqslant 60,\\ 112, & x>60.\end{cases}$$

对于分段函数，要注意以下几点：

(1) 分段函数是由几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集；

(3) 在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的表达式.

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $x\in D\Leftrightarrow -x\in D$，若 $f(-x)=f(x)$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

若 $f(-x)=-f(x)$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=x^2(x\in\mathbf{R})$，是偶函数，其图像如图 1－2 所示；$y=x^3(x\in\mathbf{R})$，是奇函数，其图像如图 1－3 所示.

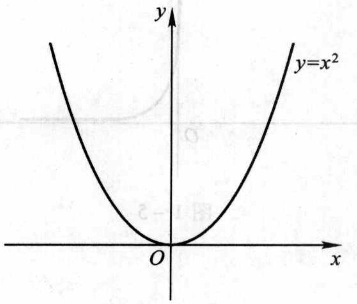

图 1－2

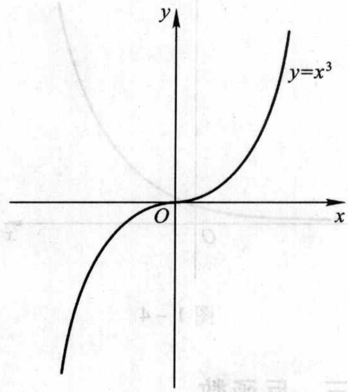

图 1－3

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

两个偶函数之和、差、积、商仍是偶函数；两个奇函数之和、差仍是奇函数；两个奇函数之积、商是偶函数；奇函数与偶函数之积、商是奇函数.

2. 函数的周期性

定义 3 给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在常数 T 使得 $x\in D\Leftrightarrow x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为周期. 满足条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期，通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期. 例 $\sin x,\cos x,\sec x,\csc x$ 是周期为 2π 的函数，$\tan x,\cot x$ 是周期为 π 的函数. 以 T 为周期的函数图像沿 x 轴方向左右平移 T 的整数倍，图像将重合.

3. 函数的单调性

定义 4 若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（如图 1－4），区间 I 称为单调递增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少（如图 1－5），区间 I 称为单调递减区间.

单调增加与单调减少分别称为递增与递减. 单调递增区间与单调递减区间统称为单调区间.

4. 函数的有界性

定义 5 若存在正数 M，使得在区间 I 上 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 否则称为无界.

例如，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

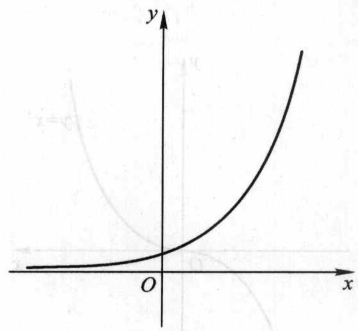

图 1－4

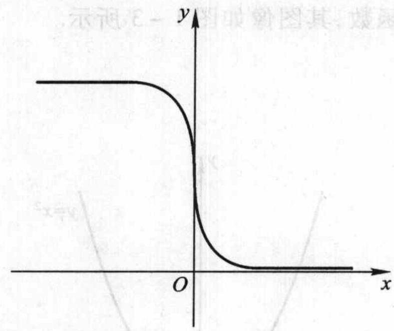

图 1－5

三、反函数

定义 6 如果已知 y 是 x 的函数，$y=f(x)$，则由它所确定的以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

但习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$，并用 $f^{-1}(x)$ 来表示（$y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$），即 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

单调函数存在反函数，且函数与其反函数单调性相同.

练习 4 求函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 的反函数.

解 因为函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以存在反函数. 由 $y=x^2$ 解得 $x=\sqrt{y}, y\geqslant 0$，于是 $y=x^2$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

四、基本初等函数和初等函数

1. 基本初等函数

常数函数 $y=c$（c 为常数）.

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）.

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

2. 复合函数

我们先来看一个例子，对于给定的两个函数 $y=u^2$ 及 $u=1+3x$，通过将后一

函数代入前一个，就产生一个新的函数 $y=(1+3x)^2$. 称其为是由两个函数复合而成的复合函数.

一般地，有如下的复合函数的概念

定义7 设函数 $y=f(u),u\in U,u=\varphi(x),x\in X$，且由 $x\in X$ 确定的函数值 $u=\varphi(x)$ 落在函数 $y=f(u)$ 的定义域 U 内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而 u 称为中间变量，称 $u=\varphi(x)$ 为里层函数，$y=f(u)$ 为外层函数.

练习5 设 $y=2^u,u=\sin x$，则由这两个函数组成的复合函数为 $y=2^{\sin x}$.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成，例如，由函数 $y=\sin u,u=e^v,v=\tan x$ 复合后可得复合函数 $y=\sin e^{\tan x}$.

练习6 函数 $y=\ln e^{x^2}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解 设 $u=e^v,v=x^2$，则 $y=\ln e^{x^2}$ 是由函数 $y=\ln u,u=e^v,v=x^2$ 复合而成的复合函数.

3. 初等函数

定义8 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，且可用一个解析式表示的函数，叫做初等函数，否则就是非初等函数.

例如，$y=\sqrt{x^2+1},y=7\sin 9x,y=x^2\ln x$ 等都是初等函数，而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

就不是初等函数.

用数学解决实际问题时，其中一类较简单的问题便是建立函数关系.

案例4 单利模型 金融业务中有一种利息叫做单利. 设 p 是本金，r 是计息期的利率，c 是计息期满应付的利息，n 是计息期数，I 是 n 个计息期（即借期或存期）应付的单利，A 是本利和. 求本利和 A 与计息期数 n 的函数模型.

解 计息期的利率 = 计息期满的利息/本金，即 $r=\dfrac{c}{p}$. 由此得

$$c=pr,$$

单利与计息期数成正比，即 n 个计息期应付的单利 $I=cn$，也就是

$$I=prn.$$

所以，本利和为 $A=p+I$，即

$$A=p+prn.$$

综上，可得本利和与计息期数的函数关系，即单利模型

$$A = p(1 + rn).$$

习　题　一

1. 填空.

(1) 单调性：$y=\frac{1}{x}$在区间$(-1,0)$内单调____，$y=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$内单调____；

(2) 奇偶性：$y=2x^5+3x$是____函数，$y=x^2\cos x$是____函数，$y=\frac{1}{x^2-4}$是____函数，$y=\sin x+\cos x+1$是____函数；

(3) 有界性：$y=\sin x+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内____，$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内____；

(4) 函数$y=2^x+1$的反函数是____；

(5) 设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 则$f(x)$的定义域为____，值域为____，$f(2)=$____；

(6) 设$f(x)=\frac{x}{x-2}$，则$f(f(x))=$____.

2. 选择题.

(1) 在实数范围内，下列各对函数中表示完全相同的函数是(　　)；

(A) $f(x)=\frac{x}{x},g(x)=1$　　　　(B) $f(x)=\sqrt[3]{x^3},g(x)=x$

(C) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$　　　　(D) $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$

(2) 函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形对称于直线(　　)；

(A) $y=-x$　　(B) $y=x$　　(C) $y=0$　　(D) $x=0$

(3) 如果函数$y=-\sqrt{x}$，那么它的反函数为(　　).

(A) $y=x^2$　　(B) $y=x^2(x\geqslant0)$　　(C) $y=x^2(x\leqslant0)$　　(D) 不存在

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$；　　　　(2) $y=\ln(1-x^2)$；

(3) $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$；　　　　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^2 x$；　　　　(2) $y=\lg\frac{x-1}{x+1}$；

(3) $y=\cos^2(3x+1)$；　　　　(4) $y=\ln\sin 5x$.

5. 若某种细菌的繁殖方式属简单的细胞分裂，即经过一个繁殖周期T_0后由一个变成两个，两个变成四个，……，如果细菌生长环境是理想的，且开始时有N_0个细菌，试写出经过一段时间t后，细菌个数N与t的关系式.

6. 在温度计上，0℃对应华氏32度，100℃对应于华氏212度，求摄氏温标C与华氏温标F间的函数关系.

7. 设婴儿出生时的体重平均为 3 500 g,从出生至 6 个月,每个月长 750 g,6 个月后至 12 个月,每个月长 500 g. 试写出婴儿从出生至 1 岁其体重与月龄的函数关系式. 若婴儿刚满 8 个月,试估计其体重.

第二节 极 限

一、极限的概念

1. 极限的定义

引例 1 战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》里有一句话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭.",也就是说一根长为一尺的棒槌,每天截去一半,这样的过程可以无限制地进行下去. 庄子纯朴的哲学思想说明了一个极限问题,问题所组成的数列为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \quad 或 \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

虽然截后所剩部分越来越少,即$\frac{1}{2^n}$的值随着 n 的无限增大而无限趋近于 0,但又永远不等于 0.

引例 2 对于圆周率π的估定,我国数学家尽过很大努力,在我国最早的算术《周髀算经》(公元前 700 年)已经谈到"圆径一而周三",即$\pi\approx3$. 三国魏景元六年(263 年)刘徽算出$\pi\approx3.14$(称"徽率"). 南北朝时期的祖冲之(429—500)在《缀术》一书中求得π的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间,于是定$\pi\approx3.141\,592\,65$,叫做"圆率正数". $\pi\approx\frac{355}{113}$叫做"密率",$\pi\approx\frac{22}{7}$叫做"约率",后人总称"祖率". 祖冲之的密率要比欧洲最早得出这个近似值的德国人鄂图(Otto)早 1100 余年. 刘徽"割圆求周"(简称"割圆术")估定π值的方法:作圆内接正 n 边形,用内接正 n 边形的面积近似代替圆的面积,则随着 n 的无限增大,内接正 n 边形的面积无限接近于圆的面积. 正如刘徽所说"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.".

上述两个引例有一个共同的特征:当自变量无限增大时,相应的函数值接近于某一个常数.

定义 1 如果当 x 的绝对值无限增大时,函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数$f(x)$当 $x\to\infty$ 时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,或 $x\to\infty$,$f(x)\to A$.

定义 1 对于 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形也成立.