

■ 工科研究生系列教材

SHUIZIYUAN  
XITONG FENXI  
LILUN YU YINGYONG

# 水资源系统分析 理论与应用

袁宏源 邵东国 郭宗楼 编著

武汉水利电力大学出版社

WUHAN SHUILI DIANLI DAXUE  
CHUBANSHE

# 水资源系统分析理论与应用

袁宏源  
邵东国 编著  
郭宗楼

武汉水利电力大学出版社

(鄂) 新登字 15 号

### 内容提要

本书主要阐述系统分析理论与技术在水资源系统规划设计及管理运行中的应用。全书共分十三章，第一章至第八章为系统分析基本理论，第九章至第十三章为一些新的理论与方法，每章都有应用实例及算例。

本书可作为系统工程专业及水利水电工程专业研究生和本科生的教材，也可供从事水资源系统及水利水电工程规划设计和管理运行的工程技术人员参考。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

水资源系统分析理论与应用/袁宏源，邵东国，郭宗楼主编. —武汉：武汉水利电力大学出版社，2000.8

ISBN 7-81063-076-8

I . 水… II . ①袁… ②邵… ③郭… III . 水资源—系统分析 IV . TV211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 19254 号

责任编辑：瞿扬清 封面设计：涂 驰

武汉水利电力大学出版社出版发行

(武汉市武昌东湖南路 8 号，邮编 430072)

湖北省黄冈日报社印刷厂印刷

\*

开本：787×1 092 1/16 印张：34 字数：824 千字

2000 年 10 月第 1 版 2000 年 10 月第 1 次印刷 印数：1—1 000 册

ISBN 7-81063-076-8/TV·12 定价：44.00 元

# 前　　言

本书是根据武汉水利电力大学研究生教材出版规划而编写的，它的前身为“系统分析”及“水资源系统分析中的随机方法”，分别为系统工程专业硕士生的学位课程及选修课程。

本教材在阐述水资源系统分析基本原理的基础上，着重引入了一些新的理论与方法，如随机方法、模糊决策、人工神经网络及可靠性分析等，力图将研究生的教学置于一个比较高的起点上。与此同时，本着理论联系实际、少而精的原则，选用了较多的典型实例及算例。为便于教学，在附录中列出了习题集及有关常用表格。全书共分十三章，第一章为绪论，主要论述系统、系统分析及水资源系统分析；第二章至第八章为水资源系统分析中所涉及的基本理论，主要包括线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、系统决策、系统对策及模拟技术等；其余五章则介绍了水资源系统分析中的一些新的理论及技术，如线性随机模型、随机规划、模糊决策、人工神经网络理论、系统可靠性与风险分析等。本书可作为系统工程专业及水利水电工程专业的研究生和本科生的教材，而且可供从事水资源系统及水利水电工程规划设计和管理运行的工程技术人员参考。

参加本书编写的有武汉水利电力大学袁宏源（第一、八、九、十章及附录），邵东国（第二、三、六、七及十三章），郭宗楼（第四、五、十一及十二章），全书由袁宏源统稿。在本书编写中，还引用了有关兄弟院校及生产、科研单位的某些资料，在此，谨表谢意。

对于本书的错误及不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者  
1999年10月

# 目 录

## 前言

<b>第一章 绪 论</b>	1
第一节 系 统	1
第二节 系统分析	3
第三节 水资源系统分析	6
<b>第二章 线性规划</b>	9
第一节 线性规划的基本理论	9
第二节 单纯形法	17
第三节 修正单纯形法	25
第四节 LP 的对偶理论与对偶算法	28
第五节 多项式算法	35
第六节 敏感度分析	42
第七节 参数 LP	47
第八节 线性规划的分解算法	52
<b>第三章 整数规划</b>	68
第一节 整数规划问题的提出及其数学模型	68
第二节 分枝定界法	71
第三节 割平面法	75
第四节 隐枚举法	82
第五节 IP 问题解法的讨论	90
<b>第四章 非线性规划及其应用</b>	93
第一节 非线性规划的基本数学概念	93
第二节 无约束非线性规划	97
第三节 有约束非线性规划	111
第四节 应用举例	140
<b>第五章 动态规划及其应用</b>	147
第一节 动态规划的基本原理	147

第二节 动态规划的数学模型和求解方法 .....	156
第三节 多维动态规划求解方法的改进 .....	165
第四节 应用实例 .....	181
<b>第六章 决策分析理论与技术 .....</b>	<b>197</b>
第一节 决策问题的基本概念 .....	197
第二节 单目标决策分析理论与方法 .....	200
第三节 多目标决策分析理论与方法 .....	218
第四节 决策支持系统 .....	233
<b>第七章 对策理论与方法 .....</b>	<b>239</b>
第一节 基本概念 .....	239
第二节 矩阵对策的基本定理 .....	241
第三节 矩阵对策的解法 .....	255
<b>第八章 模拟技术 .....</b>	<b>268</b>
第一节 模拟技术概述 .....	268
第二节 水资源系统模拟技术 .....	271
第三节 模拟技术中的优选方法 .....	281
第四节 应用举例 .....	286
<b>第九章 线性随机模型 .....</b>	<b>302</b>
第一节 水文系列的特征 .....	302
第二节 时间系列模型化的统计原理与方法 .....	309
第三节 单变量自回归模型 .....	313
第四节 多变量自回归模型 .....	335
第五节 自回归滑动平均模型 (ARMA 模型) .....	343
第六节 自回归聚合滑动平均模型(ARMA模型) .....	347
第七节 线性随机模型的分解技术 .....	349
<b>第十章 随机规划 .....</b>	<b>356</b>
第一节 随机线性规划 .....	356
第二节 随机动态规划 .....	375
<b>第十一章 模糊决策理论与应用 .....</b>	<b>408</b>
第一节 多目标系统模糊优选理论 .....	408
第二节 模糊决策分析理论 .....	418
第三节 模糊模式识别、模糊聚类理论与模型 .....	432
第四节 应用举例 .....	441

第十二章 人工神经网络理论与应用 .....	452
第一节 人工神经网络概论 .....	452
第二节 BP 人工神经网络及应用 .....	457
第三节 径向基函数 (RBF) 网络及应用 .....	474
第十三章 可靠性分析 .....	490
第一节 可靠性评价指标 .....	490
第二节 系统的可靠性模型 .....	493
第三节 可靠度的分配 .....	500
第四节 可维修系统的可靠性分析 .....	504
参考文献 .....	512
附录一 附表 .....	514
附录二 习题 .....	523

# 第一章 绪论

系统的概念是随着人类社会生产实践逐渐形成并发展起来的。我国古代农事、工程、医学、天文等方面的知识和成就，都在不同程度上反映了朴素系统概念的自发应用。例如，战国时期秦李冰父子设计兴建的都江堰，包括：岷江“鱼咀”分水工程、“飞沙堰”分洪排沙工程、“宝瓶口”引水工程和 120 多个附属渠堰工程，形成了一个各工程间联系合理、运转协调的工程总体，是一次典型的系统思想的实践活动。

随着人类社会实践活动的大型化和复杂化，要求系统思想不仅能定性描述，而且能定量表达。近几十年来，定量化的系统方法和强有力的计算工具——电子计算机已广泛地用来分析工程、经济、军事、政治领域大型的复杂系统问题。系统思想方法一经取得数学表达形式和计算工具，就从哲学思维领域发展成为专门的科学。

系统工程科学是一门具有高度综合性的学科，它是在第二次世界大战期间逐步发展起来的。当时，由于战争的驱动，在资源分配、军事设施配置、各种人员配置以及交通运输和军事工程的进度等方面进行了大量分析工作，进而明确地提出了对问题给予最优解决的概念，并产生了反映这一概念的数学方法。这就是出现系统工程学的历史背景和条件。1957 年第一本《系统工程》专著问世，标志着这门科学的产生和命名。随后，在近 40 年的过程中，系统工程的概念和方法逐步运用到许多科学和技术领域，并取得了成功。

系统工程在水利水电工程中的应用，始于 50 年代中期，首例是用于制定流域规划的工作，以后逐步扩展到规划、设计、施工和管理诸多方面，从水力发电工程到灌溉排水工程的各个领域几乎都引进和应用了系统工程的方法。近些年来，运用系统工程更有效地解决了实际生产问题，在国内外普遍受到重视，从而使系统工程方法的应用具有更为广阔的前景。

## 第一节 系统

### 一、系统的定义

关于系统的意义，不同的学科有不同的说法。一个比较通用的提法是：凡在一定环境下，为实现某一目标，由若干相互联系、相互制约、相互作用的因素（部分）而组成的集合体，就称为系统。任何一个系统均包括两个部分：一是系统本身；二是系统所处的环境。系统本身由三个元素组成，即输入、运转（转换、处理……）和输出。系统环境就是系统本身以外的部分。系统与环境的界限叫系统边界。

系统的相互联系、相互制约、相互作用的组成部分，称为系统结构。环境对系统的作

用是系统输入，系统对环境的作用是系统的输出；在动态条件下，输出可反作用于输入，这就是所谓的反馈。把输入转换为输出就是系统的功能，它是由系统结构和系统环境决定的。系统每时每刻所处的状况称为系统状态。系统状态随时间的变化称为系统行为。

对于工程体系中的系统，可以这样描述：在给定时间内，使物质（原料、能量、信息）的输入与物质（产品、能量、效益）的输出相互联系起来，在一定的环境下，具有一定功能的任何结构、装置、设计方案和运行程序的有机体，均称为系统。而且这个系统本身又是它所从属的一个大系统的组成部分（子系统），这就是系统的相对性概念。

## 二、系统的类别

在自然界和人类社会中，系统是普遍存在的。从不同的角度出发，可将系统分成不同的类别，大致可分为三类：即自然系统、人工系统和两者组合起来的复合系统。

### 1. 自然系统

自然系统是由自然物质所组成的系统。如太阳系、银河系、宇宙系和生物系统、生态系统，以及微观的原子核系统等。

### 2. 人工系统

人工系统是为达到人类需求的目的而人为地建立起来的系统。例如：生产、交通、水利、电力、教育、经营、医疗等系统。一般可包括三种类型：一是由人将零星部件装置成工具、仪器、设备、以及由它们组成的工程技术系统；二是由一定的制度、组织、程序、手续等组成的管理系统和社会系统；三是根据人对自然现象、社会现象的科学认识而建立的科学体系和技术体系。

### 3. 复合系统

由人工系统与自然系统组合起来的复合系统也是广泛存在的系统，它们既有自然系统的特征，又具备人工系统的特性，如交通管制系统、航空导航系统、广播系统等人工系统。

## 三、系统的特性

系统一般具有下列特征。

### 1. 集合性

系统由两个或两个以上可以互相区分的要素（或子系统）组成。实际工作中，系统常常是巨大而复杂的，这并不一定是在规模上庞大，而是由于有非常多的要素作为它的组成部分，从而产生复杂的动作、程序和状态。一个系统常常是由若干子系统有机地结合起来的，子系统又由更小的系统构成，形成一个多层次的结构。

### 2. 关联性

组成系统的各部分之间及系统与环境之间相互联系、相互制约和相互作用，就是系统的关联性。如果只有一些要素，尽管是多种多样的，若它们之间没有任何联系，就不能称之为系统。

### 3. 目的性

系统的目的是指系统都具有特定的功能，即既定的目的。人工系统的目的，有时不止一个，可能有多个，并与系统的结构层次相对应。系统作为总体具有一个总目标，

各子系统也可分别具有各自的层次性目标。为了使各层次的目标均能按既定的意图得以实现，就需要一定的手段与方法，使系统的构造要素有机地协调动作，以达到系统功能的总目标。

#### 4. 整体性

系统具有整体性是因为系统的各个组成部分构成了一个有机整体。各构成要素的独立功能及其相互间的有机联系，只能是在一定的协调关系之下统一于系统的整体之中。脱离了整体性，各构成要素的功能及要素间的作用就失去了意义。

#### 5. 不确定性

系统具有不确定性是因为系统中存在某些不能用确定性方法描述其状态的构成要素所致。这些组成部分的活动或者由于人的认识尚未完全掌握其准确的规律，或者由于活动本身带有一定的随机性，因而只能使用统计规律等手段反映其活动状态与进程，这就使系统带有不确定性。

#### 6. 环境适应性

任何系统不能孤立存在，而是存在于一定的环境之中，必定与外部环境发生物质的、能量的和信息的交换，以适应外部环境的变化，这就构成系统的环境适应性。能够经常与外部环境保持最佳适应状态的系统，是理想的系统；不能适应环境变化的系统是没有生命力的。

## 第二节 系统分析

### 一、系统工程概念

系统工程是实现系统科学改造客观世界的工程技术和组织管理技术。它是应用系统理论、近代数学方法和电子计算机运算技术，研究系统规划、设计、制造、组织和管理的一门整体最优的技术科学。其主要特点为：

1. 系统工程的研究对象广泛。系统工程的研究和应用对象是各种体系的系统，如自然的、生态的、社会的、经济的系统都是其研究的对象。
2. 系统工程是一门“软”技术。系统工程主要研究软件技术，如概念、原则、原理、方法、制度、程序等非物质实体所构成的技术，为生产“硬件”提供思考方法、程序和决策等，以实现系统的最优规划、设计、控制和管理。
3. 系统工程是定量技术。定量的办法是通过建立系统模型、系统仿真、系统分析和系统优化等主要方法与步骤实现的。
4. 系统工程是一门多学科综合的边缘学科。系统工程既要应用数学、物理、化学等基础自然学科的知识，又要以运筹学、控制论为基础，应用管理科学、经济学、社会学、生态学等知识，从而构成一门多学科相互渗透的边缘学科。

综上所述，系统工程可以归纳为：研究对象是各种体系的系统；思考方法是全局的和协调的辩证思想；采用的技术是以运筹学和控制论为理论基础、以电子计算机为运算手段

的近代科学方法；最终目的是使系统达到整体最优。

## 二、系统分析问题类型

系统分析方法是系统工程的量化和定性分析方法，用来解决系统的规划、设计和运行管理问题，其中心内容是建立模型最优化。系统分析问题大体可以分成以下几种类型：

### 1. 资源分配型问题

这类问题是各种可能分配方法中，选择出最符合目的的共有资源或稀有资源的分配方法。在水利水电工程中，水资源在各用水部门间的最优分配、制定最优运行策略等，是最典型的资源分配问题。

### 2. 存储型问题

在物质交换过程中，物品、资金、信息等都要有一定的储量，存储的最优方案就是在保证供应的条件下，使有关存储的费用最小。水库蓄水是存储问题的一种。

### 3. 流通型问题

流通型问题的实质是：从出发地有许多途径可以达到目的地，各种途径的距离、费用、运输量等均不相同，并有若干限制，如何发挥这一运输网络的最大作用，或如何规划一个网络使之最优化地满足各种经济、技术条件的要求。流通型问题有时也称为网络问题，包括最短路径问题及最大流量问题等。水利水电工程中的输水管网及施工组织设计都是流通型问题。

### 4. 排队型问题

排队是接受服务的一方和服务的一方相互等待而形成的问题。在电话通讯系统中，用户是服务对象，是接受系统服务的一方，电话呼唤是系统的服务，是服务的一方，用户使用电话进行呼唤就构成了等待电讯服务的排队问题。水库的规划和调度也可看作是排队问题。

### 5. 竞争型问题

也称对策问题，其研究在一场对抗中应采取何种策略为上策的问题。它更多地用于研究对事先未知的对象采取什么策略。

### 6. 排序型问题

也称组合型问题，即对各种活动和环节，按规定的要求和条件，排列出理想的顺序，使之达到最优的组合。在水利水电工程中，施工进度计划的制订就是排序问题的典型实例。

### 7. 综合型问题

在复杂的系统中常会出现多种类型问题并存的复杂局面，形成包含上述某几类问题的综合型问题。

## 三、常用系统分析方法

### 1. 线性规划 (LP)

线性规划是用来解决约束条件为线性等式或不等式，目标函数为线性函数的最优化问题。这种方法多用于解决资源分配型问题，存储问题等。

### 2. 整数规划 (IP)

整数规划是在线性规划的基础上发展起来的，它的基本特点是变量的取值必须是整数，

甚至在某些情况下变量只有两个可能的取值，即 0 或 1。全部变量为整数者，称整数规划；变量均为 0 或 1 者，称 0-1 规划；部分变量为整数、部分变量为任意非负实数者，称混合整数规划。排序问题多使用整数规划。

### 3. 非线性规划 (NLP)

非线性规划是用来解决约束条件和目标函数中部分或全部存在非线性函数的有关问题。包括无约束条件的非线性规划、有约束条件的非线性规划、非线性规划问题的线性化等，由于具有很高的效能，其应用范围很广。

### 4. 动态规划 (DP)

动态规划是一种多阶段决策理论和方法。它把问题分成若干阶段，运用建立的递推关系逐阶段依次作出最优策略，并使全过程达到最优结果。因问题的复杂程度不同，有常规动态规划、状态增量动态规划、离散微分动态规划等多种算法。动态规划广泛用于资源分配、制订最优运行策略、解决流通运输等问题。

### 5. 二次规划

二次规划是非线性规划的一种特殊形式，即目标函数为二次型，约束条件为线性的最优化方法。其决策导数是决策变量的线性函数，可用微分算法求解，有一定的应用范围。

### 6. 几何规划

几何规划也是非线性规划的一种特殊形式，它不是首先寻求独立变量的最优解，而是寻求以最优方式将总目标值分配于目标函数的各项之中，当达到这样的最优分配时，通常只要考察几个简单的线性方程，便能计算出目标函数的最优解。几何规划方法能有效地处理目标函数高度非线性化问题，用其求解费用最小化的非线性规划问题，比其他方法更方便，应用比较广泛。

### 7. 多目标决策技术

多目标决策技术也称多目标规划方法，其目的是在不可公度而又相互矛盾的目标之间，经过权衡、协调，求得满意的解决途径。有权重系数法、约束法、多目标线性规划、多目标动态规划等，应用也十分广泛。

### 8. 对策论

对策论，也称博奕论，是解决竞争者应该采取何种对策的理论和方法。如果对抗双方可能采取的对策只有有限个，则是有限博奕；如果可能采取的对策为无限个，则是无限博奕；如果在对抗中获胜的一方和失败的一方得失恰好相等，则为零和博奕。

### 9. 排队论

排队论是研究由于排队而产生的等待时间和排队长度问题的理论和方法，通过对各个服务对象的研究，揭示系统工作的规律，改进服务系统的工作能力，使之处于最优的工作状态之下。

### 10. 网络技术

网络技术是以由结点及结点间的连线构成的网络为手段，来表现物流、信息流、逻辑联系和决策层次结构等的方法。网络技术用来解决最短路程、最大最小流量、最小成本流，关键路线等有关问题，是十分普遍和有效的。

### 11. 模拟技术

模拟技术是以电子计算机程序为模型，在计算机上进行模型试验的技术。进行模型试验时，以计算机的各种输入作为模型的输入数据，以计算机的反复运算作为不同处理的试验过程，以计算机的输出作为模型试验的结果。对于复杂的系统，模拟技术有着广泛的应用。

#### 12. 随机方法

随机方法是用来处理某些具有随机性质的变量的系统分析方法。常用的有随机规划，包括随机线性规划、随机动态规划和随机模拟技术。

#### 13. 模糊决策方法

模糊决策方法是以模糊数学为基础发展起来的系统分析方法，是对具有模糊性质的问题提供决策依据的方法，属于不确定性数学方法的范畴。模糊决策方法包括隶属度确定方法、模糊聚类分析、模糊数学规划等。

#### 14. 神经网络优化

神经网络是一种由大量简单非线性神经元广泛联结而成的可以高速并行处理的系统，它具有快速收敛于状态空间中一稳定平衡点的优点，因此作为优化算法模型而被应用到许多优化问题的求解中，为优化理论与算法的研究提供了一条新的途径。目前已有线性规划神经网络及动态规划神经网络等。

### 第三节 水资源系统分析

将系统思想、概念、理论与方法应用于水资源系统的研究与实践，就构成水资源系统分析。它始于 20 世纪 50 年代中的美国哈佛水规划，以后逐步扩大到水利水电工程规划、设计、施工和管理运行的各个领域。

#### 一、系统模型

系统模型是系统分析中一个重要的手段。水资源系统都十分庞大而复杂，必须借助系统模型来描述真实系统的特性和变化规律。

水资源系统分析中常用的系统模型可分为两大类：

##### (1) 抽象模型

抽象模型是对实际系统的数学表述，亦称数学模型，是应用最广的系统模型。

##### (2) 实际模型

把实际系统的结构和行为按原样作为组成因素，用集合的方法组成的模型，也就是所谓的模拟模型。

所构造的模型，应满足下列要求：

(1) 现实性——所建模型是可求解的和可实现的；

(2) 可靠性——所建模型在允许的精度范围内能较好地反映实际系统的本质属性，具有代表性；

(3) 简洁性——有简洁的结构及算法，且灵活、省时。

系统模型通常由三部分组成，即模型部件、变量和相互关系。

### (1) 模型部件

模型部件是模型的组成元素，水资源系统的组成元素为建筑物，如水库、水电站、渠道、灌区及旅游设施等。

### (2) 模型变量

水资源系统中的模型变量有决策变量、状态变量、模型参数、输入变量和输出变量等。

### (3) 相互关系

所谓相互关系是指表征系统模型各部件间相互制约和相互依存的各种联系。在水资源系统分析中的相互关系表现为系统运行程序、约束和设计准则等。

## 二、目标和目标函数

### 1. 目标

目标是指系统规划者期望通过开发利用水资源所要达到的目的。目标可以是定量的或定性的。定量目标可以用一定数值精确地度量并能以某种单位表示，如水力发电量。定性目标只能从顺序的或定性的意义上是可以度量的，如水质的改善。若两个目标可以用同一个单位来度量和描述，则称它们为可公度的目标。反之，则为不可公度的目标。

水资源开发的主要目标通常是使国家和地区福利最大化，然而这一目标可用许多分式表示，如最大经济效益、收益再分配，社会就业率、促进经济的持续增长以及达到某些无形的或非定量的目标。

### 2. 目标函数

系统的目标函数是系统目标的数学表达。它是评价和优选方案的一个准则，有时也称为设计准则。

一个系统模型至少包括一个目标函数，不管同一目标函数里有多少项，它们必须是可公度的，可用数值方法计算及同一单位表示。然而，由于水资源系统的极端复杂性，总是有一些不可公度的，乃至不可定量的目标需要考虑，不适用于用现行的数学方法求解。此外，水资源系统的多目标性使定义目标函数十分困难，从而构成多目标规划问题。

## 三、水资源系统分析的步骤与方法

水资源系统分析通常要经历五个阶段，即目标的鉴别和表述；将目标转换成设计准则，建立目标函数；系统模型的构造和可能方案的设计；各种方案效果的评价及最优方案的选择。

水资源系统中常用的系统分析方法有两类。一类是最优化方法，即数学规划和搜索技术。最优化方法使用一个包括目标函数和约束方程的简化的数学模型，直接求解最优决策。另一类是模拟技术，即在高速电子计算机上模拟系统的特征。通过分析各种方案对所模拟系统的反映，用搜索技术选择决策变量的最佳组合。

应当指出，系统分析方法并非万能，并不是所有的实际问题都能用系统分析的方法予以圆满解决。例如，目标函数仅能处理可定量和可公度的目标，而那些非定量的和无形的目标，如果不在约束条件中考虑的话，往往被忽略；在模型的建立过程中，为了求解及计算的方便，往往作了一些简化的假定，未免失真；有一些技术上，经济上和政治

上的不确定性因素，在模型中难予考虑。因此，任何数学模型只是现实水资源系统的一个近似描述，所谓最优解，也只是相对于某特定模型而言，而未必完全相应于真实系统。

此外，系统分析也并不是决策的机械工具，在整个决策过程中，决策者的实践经验，聪明才智和判断能力也是十分重要的。

## 第二章 线性规划

线性规划 (Linear programming, 缩写为 LP) 是研究在一组线性等式或不等式约束条件下线性目标函数极值问题的数学理论和方法，也是数学规划中的一项重要内容，目前已在水资源系统规划管理中得到广泛应用。本章重点介绍线性规划的矩阵描述、单纯形法、修正单纯形法、对偶单纯形法、多项式算法、灵敏度分析与参数线性规划及其在水资源系统规划管理中的应用。

### 第一节 线性规划的基本理论

#### 一、LP 问题的数学描述

##### (一) 问题的提出

在水资源系统规划管理中，经常会面临下述两类问题：一是如何在既定任务下寻求完成任务且使系统费用最小或净效益最大的水资源最优分配方案；二是如何在有限资源条件下寻求最有效的资源开发利用模式。

**例2-1** 有甲、乙两个水库同时向 A、B、C 三个城市供水，单位水费如表2-1所示。甲水库的日供水量为  $28 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$ ，乙水库的日供水量为  $35 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$ ，A、B、C 三个城市的日需水量分别不低于  $10 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$ ， $15 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$ ， $20 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{d}$ 。试确定满足三个城市用水需求条件下使输水费用最小的水资源分配方案。

表 2-1 水库单位输水费用

单位：元/ $\text{m}^3$ 

名称	城市 A	城市 B	城市 C
甲水库	0.32	0.87	0.54
乙水库	1.28	0.45	0.96

解 设甲水库向三城市日供水量分别为  $x_{11}$ 、 $x_{12}$ 、 $x_{13}$ ，乙水库向三城市日供水量分别为  $x_{21}$ 、 $x_{22}$ 、 $x_{23}$ ，则供水量需满足下述约束条件：

$$\text{城市供水量约束: } \begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 10 \\ x_{12} + x_{22} \geq 15 \\ x_{13} + x_{23} \geq 20 \end{cases} \quad (2-1)$$

$$\text{供水总量要小于水库的水资源总量: } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 28 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 35 \end{cases} \quad (2-2)$$

水库向各城市供水量应大于等于零，即

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \quad (2-3)$$

并使下列输水总费用最小

$$\min Z = 0.32 x_{11} + 0.87 x_{12} + 0.54 x_{13} + 1.28 x_{21} + 0.45 x_{22} + 0.96 x_{23} \quad (2-4)$$

**例2-2** 某大型灌区涉及A、B、C三个地区，计划种植三种不同的作物，假如各地区的耕作面积与可耕面积的比例相同，问该灌区应如何规划各地区的作物种植面积才能使整个灌区的总净收入最大。已知各地区的可耕面积和可供水量见表2-2所示，灌区各种作物的最大耕作面积、灌水定额及净收入如表2-3所示。

表 2-2 各地区的可耕面积和可供水量表

地 区	可耕面积 (亩)	可供水量 ( $\times 10^4 m^3$ )
A	2 400	75
B	3 600	100
C	1 800	45

表 2-3 各种作物的最大耕作面积、灌水定额及净收入表

作物种类	最大耕作面积 (亩)	灌溉水量 ( $m^3/亩$ )	净收入 (元/亩)
作物 1	3 600	400	170
作物 2	3 000	600	125
作物 3	1 950	200	45

**解** 以各地区分配的作物种植面积为决策变量，记为 $x_{ij}$ ，其中： $i$ 表示作物种类， $j$ 表示地区，则目标函数为下述灌区的总净收入最大：

$$\max Z = 170(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 125(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 45(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \quad (2-5)$$

满足于下述条件约束

$$(1) \text{ 可耕地面积约束} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 2400 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 3600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1800 \end{cases} \quad (2-6)$$