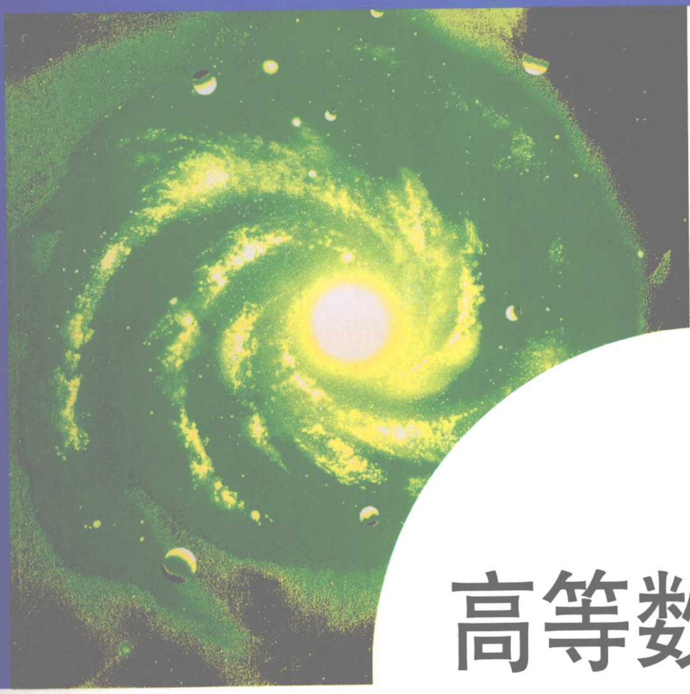
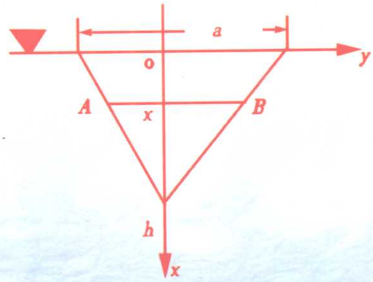


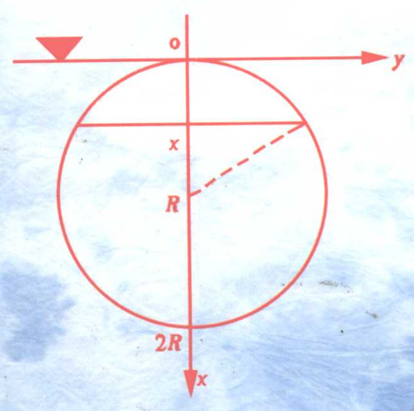
高等数学学习指导及习题解答

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO JI XITI JIEDA

淮南工业学院数学教研室 编

安徽大学出版社





高等数学学习指导及习题解答

淮南工业学院
数学教研室 编

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导及习题解答/淮南工业学院数学教研室编.—合肥:安徽大学出版社,2001.8

ISBN 7-81052-446-1

Ⅰ.高...　Ⅱ.淮...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 047256 号

高等数学学习指导及习题解答　　淮南工业学院数学教研室 编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	中国科技大学印刷厂
联系电话	总编室 0551-5107719 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×1092　1/16
E-mail:	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**印　张**	7.25
责任编辑	路　静	**字　数**	163 千
封面设计	孟献辉	**版　次**	2001 年 8 月第 1 版
经　　销	新华书店	**印　次**	2001 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7-81052-446-1/O·28　　**定价 10.00 元**

前　言

新的世纪已经开始，人类正处在从工业社会向信息社会转变的历史时期，在这样的关键时期，数学教育改革的呼声震天动地，提出的方案和模式成百上千，有的模式经过实践已显威力，但就高等数学的内容而言，变化不大。

为了使工科院校一年级大学生更好地学习高等数学课程，深入理解本课程的基本概念和基本理论，加强基本运算能力的培养，特别是培养学生灵活运用所学知识、综合分析问题和解决问题的能力，我们编写了《高等数学学习指导及习题解答》一书。

本书以同济大学所编《高等数学》为主要线索，分十二章编排。内容包括函数与极限、一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程等。每章分四部分，第一部分列出原国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》中对本章的基本要求，第二部分给出本章内容提要，第三部分为典型例题分析，第四部分为习题。其中例题分析透彻，读者通过举一反三，可以提高解题能力。在习题中，配备了一定数量的填空题和选择题，它们中的大部分来自于原国家教委发行的《高等数学试题库》，以及我们在教学实践中提炼出来的习题，具有较强的针对性，对帮助读者正确理解有关概念、澄清模糊认识颇有裨益。需要提出的是，希望读者正确使用习题的参考答案和提示，应把它视为做习题遇到困难时的指导，而不应该纯粹地看成一种读物。即使是阅读，也必须动手边读边算，以求彻底理解，熟练掌握。本书可作为各类大学本科生、专科生、报考研究生的读者参考使用。

本书得到安徽省重点课程《高等数学》建设经费的资助，课程组的成员许志才、李勇、王强、殷志祥、许峰参加了编写工作，数学教研室的部分老教师在编写和使用《讲义》的过程中提出了许多建设性意见。本书曾以《讲义》形式在淮南工业学院用过数次，效果较好。本书作者们自提笔至今，历经数年，几易其稿，终于撰成全书，呈献于读者。但限于水平，错误难免，恳请读者惠予指正。

编者

2001 年 3 月

目　　次

第一章　函数、极限、连续

一、内容提要

理解函数与复合函数的概念，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性及反函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图形。理解极限概念(对极限的 $\varepsilon-N,\varepsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求)，掌握极限四则运算法则，了解夹逼准则和单调有界准则与无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用两个重要极限及等价无穷小求极限。理解函数在一点连续的概念，了解间断点的概念，并会判别间断点的类型，了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质。

1. **函数定义**：设 A、B 均为非空数集，如果对数集 A 中的每一个数 x，按照对应关系 f 都有数集 B 中的惟一确定的数 y 与之对应，则称 f 是定义在数集 A 上的函数(y 为 x 的函数)，记为 $y=f(x),x\in A$。

2. **基本初等函数**：常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

3. **数列极限**：设有数列 $\{a_n\}$，若存在实数 a，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N,|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 极限存在(或收敛)，且极限是(或收敛于)a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

4. **函数极限**：设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 有定义，若存在实数 A，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\ni 0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且极限是 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

5. **极限运算法则**：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

① $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$。

② $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$。

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B},(B\neq 0)$。

6. **两个重要极限**：①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。　②$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$。

7. **等价无穷小代换**：设 $x\to x_0$ 时，$f(x)\sim F(x)$，$g(x)\sim G(x)$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)}{G(x)}$。

8. **几个常用的等价无穷小**：$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

$\ln(1+x)\sim x,a^x-1\sim x\ln a,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$。

9. **连续与间断**：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，x_0 称为 $f(x)$

的连续点；否则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，x_0 称为 $f(x)$ 的间断点。

10. 间断点类型：

①若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。

②若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在且相等，但不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的可去间断点(第一类间断点)。

③若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点。

11. 零点定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

二、例题分析

例 1. 判断 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ 的奇偶性。

解：本题要求对函数以及分段函数的概念有准确的理解。

$$f(-x)=\begin{cases} -x-1 & -x>0 \\ 0 & -x=0 \\ -x+1 & -x<0 \end{cases} = -\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases} = -f(x)$$

即 $f(x)$ 为奇函数。

例 2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x^3\sin\frac{1}{x^3}}$，求 C。

解：本题要求熟悉两个重要极限以及无穷小的有关性质。

左式极限为 1^∞ 型，属典型的第二个重要极限。

$$左=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2C}{x-C}\right)^{\frac{x-C}{2C}}\right]^{\frac{2C}{x-C}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2Cx}{x-C}}=e^{2C}$$

在右式中，$x\to 0$ 时，x^3 为无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x^3}$ 有界。

由无穷小性质知，$x^3\sin\dfrac{1}{x^3}$ 仍为无穷小。即 $\lim\limits_{x\to 0}e^{x^3\sin\frac{1}{x^3}}=1$

切不可将 $x^3\sin\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{\sin\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$ 误认为是第一重要极限。

故有 $e^{2C}=1$，从而 $C=0$。

例 3. 求下列极限。

① $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln x-\ln(1+x)]$　　④ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin x}-1}{e^x-1}$

解:本题要求熟练运用求$\dfrac{0}{0}$,$0\cdot\infty$型极限简洁有效的方法——等价无穷小代换。

①原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$　(不存在)

②原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x\cdot3x}=\dfrac{2}{3}$

③原式$=-\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+\dfrac{1}{x})]=-\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=-1$

④原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\arcsin x}{x}=\dfrac{1}{2}$

例 4. 根据 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$的图形讨论其连续性,如有间断点,请指明类型。

解:本题的关键是根据常用极限$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 求出$f(x)$的一般表达式

$$因\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 不存在 & x=-1\\ 1 & x=1\\ \infty & |x|>1\end{cases}$$

$$故\ f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 无定义 & x=-1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

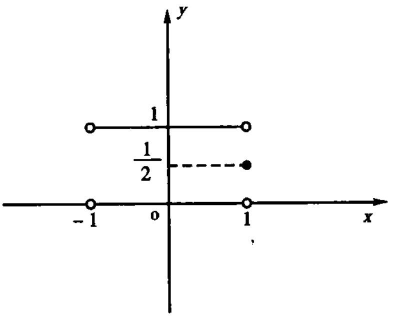


图 1

由图 1 易见,$f(x)$在 $x=\pm1$ 处有跳跃间断点,而在其他点处连续。

例 5. 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$的连续性。

解:在本题中要特别注意 $x\to0^-$ 与 $x\to0^+$ 时,$2^{\frac{1}{x}}$的不同极限状态,在 $x\neq0$ 处,$f(x)$为初等函数,故连续。

在 $x=0$ 处,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

$(x\to0^-$ 时,$\dfrac{1}{x}\to-\infty,2^{\frac{1}{x}}\to0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1$$

$$(x\to 0^+\text{时},\frac{1}{x}\to+\infty,2^{\frac{1}{x}}\to+\infty,2^{-\frac{1}{x}}\to 0)$$

$\therefore$ $x=0$ 为 $f(x)$的第一类间断点(跳跃间断点)。

故 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续,在其他点连续。

例 6. 设 $f(x)\in C[0,1]$,且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,$x\in[0,1]$,证明至少存在一点 $\xi\in[0,1]$,使 $f(\xi)=\xi$。

证:在本题中要注意零点定理中的 $f(a)\cdot f(b)$要严格小于零。

设 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)\in C[0,1]$,$F(0)=f(0)\geqslant 0$,$F(1)=f(1)-1\leqslant 0$

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$,则 $\xi=0$ 或 1,使 $f(\xi)=\xi$

若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$,由零点定理,至少有一点 $\xi\in(0,1)$使 $F(\xi)=0$

总之,至少存在一点 $\xi\in[0,1]$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$。

三、习题

Ⅰ. 填空题

1. $f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3-x} & 0<x<2\end{cases}$的定义域是__________。

2. 设 $f(x)$为偶函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$,则当 $a<0$ 时,$f(a)=$__________。

3. 当 $y=f(x)$的图形关于__________对称时,$y=f(x)$的反函数即为本身。

4. 若 $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$__________。

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100\sin(n!)}{2n-1}=$__________。

6. $\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)^{\frac{1}{x}}=e^a$,则 $b=$__________。

7. 当 $x\to 0^+$ 时,$e^{\sqrt{x}}-1$ 是 x 的__________阶无穷小。

8. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x<0\\ k & x=0\\ x\sin\frac{1}{x} & x>0\end{cases}$,使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续的常数 k __________。

9. $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$,$g(x)=\sin x$,则 $f[g(x)]$的连续区间为__________。

10. $f(x)=\frac{e^x-a}{x(x-1)}$有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$,则 $a=$__________。

Ⅱ.选择题

1. $y=C,(-\infty<x<+\infty)$的反函数(　　)。

(A)不存在　　(B)存在,但不确定

(C)$x=C$　　(D)$y=C-x$

2. $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\0 & x\text{为无理数}\end{cases}$,则 $D(x)$是(　　)。

(A)偶函数　　(B)奇函数

(C)非奇非偶函数　　(D)最小正周期为1的周期函数

3. $x_n=(\sqrt{n})^{(-1)^n}$,当 $n\to\infty$时,下列结论中(　　)是正确的。

(A)x_n 有极限　　(B)x_n 有界　　(C)x_n 无界　　(D)x_n 为无穷大量

4. $x\to\infty$时,$\alpha=\dfrac{1}{x}$与$\beta=\dfrac{\sin x}{x}$都是无穷小,α 是β 的(　　)。

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小

(C)同阶无穷小　　(D)不能比较

5. $x\to+\infty$时,$f(x)=x\sin x$ 是(　　)。

(A)无穷大量　　(B)无穷小量

(C)无界变量　　(D)有界变量

6. $f(x)$在 x_0 处左、右极限存在并相等是 $f(x)$在 x_0 处连续的(　　)。

(A)充分条件　　(B)必要条件

(C)充要条件　　(D)以上均不对

7. $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$的(　　)。

(A)可去间断点　　(B)跳跃间断点

(C)无穷间断点　　(D)振荡间断点

8. $x=0$ 是 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$的(　　)间断点。

(A)可去　　(B)跳跃　　(C)无穷　　(D)振荡

9. $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}} & x<0\\x+a & x\geqslant 0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续,则 $a=$(　　)。

(A)0　　(B)e　　(C)$\dfrac{1}{e}$　　(D)1

10. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$的结果是(　　)。

(A)0　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C)∞　　(D)不存在

Ⅲ.计算与证明

1. 求 $y=\begin{cases}\arctan x & x<0\\e^x-1 & x\geqslant 0\end{cases}$的反函数。

2. 求下列极限。

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n!)(\frac{n^2-1}{3n^3+2})$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

⑤ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

⑦ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

⑧ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ （m,n 为自然数）

⑨ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ （$a\cdot b\neq0$）

⑩ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

⑪ $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan(\frac{\pi}{2}x)$

⑫ $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos x}$

3. $a_1>0,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n}),n=1,2,\cdots$,证明此数列有极限并求之。

4. 指出下列函数的间断点及类型。

① $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

② $f(x)=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$

③ $f(x)=\begin{cases}\ln x & x>0\\ x^2 & x\leqslant0\end{cases}$

5. 讨论 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 的连续性。

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$,求 λ,μ。

7. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数,求 a,b。

8. 若对任意 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,
试证 $f(x)$ 在任意 x 处连续。

9. 证明 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在 $(-1,1)$ 内至少有一个实根。

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a<c<d<b$,
试证有 $\xi\in(a,b)$ 使 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$,其中 m,n 为任意正数。

第二章　导数与微分

一、内容提要

理解导数与微分的概念及导数的几何意义，理解函数的可导性与连续性之间的关系，会用导数描述一些物理量。掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法以及基本初等函数的导数公式，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式不变性。了解高阶导数的概念，掌握初等函数一阶、二阶导数的求法，会求隐函数和参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数以及反函数的导数。

1. **导数定义**：设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，当在 x_0 处 x 的增量为 Δx 时，相应函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x)|_{x=x_0}$ 或 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$ 等。

2. **四则运算法则**：设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 可导，则

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$。

② $(u\cdot v)'=u'v+uv'$。

③ $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，$(v(x)\neq 0)$。

3. **复合函数**：若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，函数 $f(u)$ 在相应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 可导，且 $(f[\varphi(x)])'|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)$。

4. **隐函数**：若由方程 $F(x,y)=0$ 能确定可导函数（隐函数）$y=y(x)$，则导数 y' 可由方程 $\dfrac{d}{dx}F(x,y(x))=0$ 求出。

5. **参数方程**：若函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 可导，而 $x=\varphi(t)$ 的反函数存在且可导，则当 $\varphi'(t)\neq 0$ 时，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$。

6. **高阶导数**：设数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y'=f'(x)$，若函数 $f'(x)$ 在点 x_0 仍可导，则称 $(y')'|_{x=x_0}$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数，记为 $y''|_{x=x_0}$ 或 $f''(x_0)$ 等，即 $y''=(y')'$。

类似可定义：$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$　（$n>1$ 自然数）。

7. **切、法线方程**：设曲线方程为 $y=f(x)$，若 $f(x)$ 可导，则曲线在点 (x_0,y_0) 处

切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

法线方程为：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

8. **微分定义：**设 $y=f(x)$在 $U(x)$有定义，若 $\Delta y=A\Delta x+0(\Delta x)$，其中 A 为与Δx无关的常数，则称 $y=f(x)$在点 x 可微，并称 Δy 的线性主部$A\cdot\Delta x$ 为$f(x)$在点 x 的微分，记为 $dy=df(x)=A\cdot\Delta x$。

9. **可微与可导关系：**函数 $f(x)$在点 x 可微分的充要条件是函数$f(x)$在点 x 可导，且 $A=f'(x)$。(若记 $\Delta x=dx$，则有 $dy=f'(x)dx$)。

10. **基本初等函数的导数公式：**

① $(C')=0$。 ② $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$(μ 为任意实数)。

③ $(a^x)'=a^x lna(a>0,a\neq1)$，特别$(e^x)'=e^x$。

④ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$，特别$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$。

⑤ $(\sin x)'=\cos x$。 ⑥ $(\cos x)'=-\sin x$。

⑦ $(\tan x)'=\sec^2 x$。 ⑧ $(\cot x)'=-\csc^2 x$。

⑨ $(\sec x)'=\sec x\tan x$。 ⑩ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$。

⑪ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。 ⑫ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

⑬ $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$。 ⑭ $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$。

二、例题分析

例 1. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性，可导性？

解：本题较为典型，主要考察对连续性，可导性概念的理解。

$\because\quad \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续

又$\because\quad \Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\arctan\dfrac{1}{\Delta x}$

而$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\arctan\dfrac{1}{\Delta x}$不存在，故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导。

例 2. $f(x)=|\sin x|$，$0<x<2\pi$，求 $f'(x)$。

解：本题中要特别注意分段点处导数的求法。

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & 0<x\leqslant\pi \\ -\sin x & \pi<x<2\pi \end{cases}$$

当 $0<x<\pi$ 时，$f'(x)=\cos x$

当 $\pi<x<2\pi$ 时，$f'(x)=-\cos x$

当 $x=\pi$ 时，$f'_-(\pi)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(\pi+\Delta x)-f(\pi)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\sin(\pi+\Delta x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$
$=-1$

$$f'_{+}(\pi)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(\pi+\Delta x)-f(\pi)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{-\sin(\pi+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

即 $f(x)$在 $x=\pi$ 处不可导

故 $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & \pi<x<2\pi\end{cases}$

例 3. $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，$g(x)$在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$。

解: 本题条件不能保证 $f'(x)$存在，所以先求出 $f'(x)$，再求 $f'(a)$的作法是错误的。

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)g(x)$$

又 $g(x)$在 $x=a$ 处连续，即$\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

故 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}(x+a)g(x)=2ag(a)$

例 4. 导数的计算。

① $y=\ln\cos(e^{2x})$，求 y'。 ② $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\frac{dy}{dx}$。

③ $y=(\sin x)^{\cos x}$，求 y'。 ④ $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解: 本题罗列了常用的几种求导法。

①在用链式法则求复合函数导数时，要注意不要漏掉某一环，特别是最后一环。

$$y'=\frac{1}{\cos(e^{2x})}\cdot(-\sin(e^{2x}))\cdot e^{2x}\cdot 2=-2e^{2x}\cdot\tan(e^{2x})$$

②在求隐函数导数时，要切记此时的 y 为 x 的函数。

方程两边同时对 x 求导得:

$$\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}\qquad\therefore\quad y'=\frac{x+y}{x-y}$$

③在本题中切不可将$(\sin x)^{\cos x}$误认为幂函数，应采用取对数求导法。

方程两边取自然对数:

$\ln y=\cos x\ln\sin x$

式两边对 x 求导得:

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x$$

故 $y'=(\sin x)^{\cos x}[-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}]$

④本题要注意二阶导数的计算公式。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{(-\frac{b}{a})(-\csc^2 t)}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\csc^3 t$$

例 5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$,求 a 和 b,使 $f(x)$在 $x=1$ 处可导。

解:本题为较典型的常见题。

因可导必连续,故在 $x=1$ 处,$f(x)$的左,右极限与左,右导数分别相等,

即$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \end{cases}$

求得:$\begin{cases} 1=a+b \\ 2=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=a \end{cases}$　　故$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

三、习题

Ⅰ. 填空题

1. 设 $f(x)$在 x_0 处可导,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{5h}=$__________。

2. 设 $f(x)$为偶函数,且 $f'(0)$存在,则 $f'(0)=$__________。

3. 设 $f(x)=(x^{100}-1)g(x)$,$g(x)$在 $x=1$ 处连续,且 $g(1)=2$,则 $f'(1)=$__________。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,且 $g(0)=g'(0)=0$,则 $f'(0)=$__________。

5. 曲线 $y=\sqrt{x}$在 $x=1$ 处的法线与两坐标轴围成的三角形面积 $S=$__________。

6. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,$y'=$__________。

7. $y=x\sin(\ln x)$,$dy=$__________ $d\ln x$。

8. $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=$__________ $d\sqrt{1+x^2}$。

9. $\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\right)'=$__________。

10. $\left(\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)'=$__________。

Ⅱ. 选择题

1. 设 $y=|x|$,则(　　)。

(A)$y'=1$　　(B)$y'=-1$　　(C)$y'=\pm 1$　　(D)$y'=\dfrac{x}{|x|}$

2. 过点(2,0)且与 $y=\frac{1}{x}$ 相切的直线方程为(　　)。

(A) $y=-\frac{1}{4}(x-2)$　　(B) $y-1=-(x-1)$

(C) $y=4(x-2)$　　(D) $y-1=x-1$

3. $y=x^2|x|$ 在 $x=0$ 处(　　)。

(A)连续、可导　(B)不连续　(C)连续但不可导　(D)可导但不连续

4. 设一曲线在 (x,y) 处的切线斜率为 $-\frac{2x}{y}$,则这曲线是(　　)。

(A)直线　(B)椭圆　(C)双曲线　(D)圆

5. 设 $f(x)=max\{x,x^2\}, x\in(0,2)$,则 $f'(x)$ 等于(　　)。

(A) $max\{1,2x\}$　　(B) $2x$

(C) 1　　(D) $f'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,则(　　)。

(A) $\alpha=1$　(B) $0<\alpha<1$　(C) $\alpha>1$　(D) $\alpha<0$

7. 在 $t=2$ 处曲线 $\begin{cases}x=t^3-4\\ y=2t^2+1\end{cases}$ 对应点的切线方程是(　　)。

(A) $2x-3y-19=0$　　(B) $2x-3y+19=0$

(C) $3x-2y-6=0$　　(D) $3x+2y-6=0$

8. $y=x^3-x^2+1$ 在 $x=1, \Delta x=0.1$ 时增量与微分是(　　)。

(A) 0.121,　0.1　　(B) 0.121,　1

(C) 1.121,　0.1　　(D)以上均不对

Ⅲ. 计算与证明

1. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2000)$,求 $f'(0)$。
2. 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导,求 $f'(0)$。
3. 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 连续,讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性。
4. 证明 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,但不可导。
5. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性,可导性。
6. 设 $f(x)=\min\{x,x^2\}$,求 $f'(x)$。
7. 设 $f(x)=2^{|a-x|}$,求 $f'(x)$。
8. 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$。

① $y=2^{\tan(x^{\frac{1}{3}})}$　　② $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

③ $y=\arcsin(\cos x)$　　④ $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$,f 与 g 可导

⑤ $y=(\frac{x}{1+x})^x$　　⑥ $y=(\ln x)^x$

⑦ $xy=e^{x+y}$　　⑧ $(\cos x)^y=(\sin y)^x$

⑨ $\begin{cases}x=a\operatorname{ch}t\\y=b\operatorname{sh}t\end{cases}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$　　⑩ $\begin{cases}x=e^t\cos t\\y=e^t\sin t\end{cases}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$

9. 证明曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$上任一点处的切线在两坐标轴上的截距之和为定值。

10. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$,试讨论 $f(x)$的连续性,可导性。