中学数学解题方法500招丛书

ZHONGXUESHUXUEJIETIFANGFAWULINGZHAOCONGSHU

解析几何

编写组 编

哈尔滨出版社

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$$

500

招

·中学数学解题方法500招丛书·

解析几何

本书编写组

主　编　　佩　捷

副主编　高宇　高琴

（黑）新登字12号

书　　名：解析几何
主　　编：佩　捷
选题策划：刘培杰
责任编辑：刘培杰
封面设计：卞秉利
插图绘制：董　欣
版式设计：刘培杰
校　　对：高　琴
出版发行：哈尔滨出版社
经　　销：全国各地新华书店
激光照排：哈尔滨出版社排版中心
印　　刷：哈尔滨工业大学印刷厂

开本：850×1168mm　1/32　印张：14.25　字数：353.13千字
1994年10月第1版　1995年6月第1次印刷　印数：0—10,000
ISBN7－80557－802－8/G.178　定价：12.00元

《中学数学解题方法500招丛书》

总　序

刘培杰

俗话说："自古华山一条路"，如果将学数学比做爬山，那么精通之道也只有一条，那就是作题，作大量的习题。

华罗庚曾将光看书不作习题比做"入宝山而空返"。

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分，光是不定积分题就作了近万道。近年来，参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们，则更是因为遍解难题，才得以屡获金牌。正所谓"踏遍坎坷成大路"。

然而解数学题却不是一件容易的事，世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说："解题同钓鱼术一样永远不会学会"。但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学，至少是可模仿的。华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会："相对于问题似欲爆炸，题型不断更新，方法是较少也较稳定，如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法，将使我们如乘快艇，得以优游

于题海之上，达到数学王国的彼岸”。

近年来，由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯（*Halmos, Paul Richard*）一句“问题是数学的心脏”的惊人之语，将解题运动推向高潮。1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上，美国南伊利诺斯大学的*J. P*贝克（*Baker*）教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出：“如果说确有一股贯穿八十年代初期的潮流的话，那就是强调解题（*Problem Solving*）的潮流”。

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现。光是著名的斯普林格出版社（*Springer Verlug*）从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就已出版了二十多种。我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希各大书局大量编印中学解题参考用书”。最近几年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》（13册），北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书。

哈尔滨出版社做为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖。

最后编者有二点忠告：一是本《丛书》是一套入门书，不能包解百题，本《丛书》在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”。然而这实在是不可能的，也是不必要的。正所谓“有法法有尽，无法法无穷”。况且即使是已有的方法也不能生搬硬套。我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳（1835—1902）曾指出：解题要随

机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效。数学家惠特霍斯(*Whitworth*)说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”。

二是读者读本《丛书》一定要亲自动手解题。正如陕西师大罗增儒副教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握。

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆（1850～1941，*Pring sheim*，*Alfred*）的名言

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度。

愿读完本《丛书》后，解题对你不再是难事。

一九九四年夏，序于松花江畔

目　录

怎样求关于直线的对称点

在本节将介绍定点P关于直线l：$\begin{cases}x=h+t\cos\theta\\y=k+t\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为直线$l$的倾角，$(h,k)\in l$，$t$为参数）对称点$P'$的坐标计算公式. 此公式易记，计算简便，推导明快. 由于在一些问题上三角运算优于代数运算，加上直线的普通方程极易化成参数方程，所以利用直线的参数方程解决对称性的问题有着可取之处.

定理　平面上已知点$P(x_0,y_0)$关于已知直线l：$\begin{cases}x=h+t\cos\theta\\y=k+t\sin\theta\end{cases}$（$t$为参数）的对称点$P'$的坐标是：$((x_0-h)\cos2\theta+(y_0-k)\sin2\theta+h,(x_0-h)\sin2\theta-(y_0-k)\cos2\theta+k)$.

证明　过$P(x_0,y_0)$与直线l垂直的直线l'为：

$$\begin{cases}x=x_0+t'\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=x_0-t'\sin\theta,\\[2ex]y=y_0+t'\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=y_0+t'\cos\theta.\end{cases}$$

设l与l'相交于$P_0'(x_0',y_0')$.

P_0'在l'上，则$\begin{cases}x_0'=x_0-t'\sin\theta\\y_0'=y_0+t'\cos\theta\end{cases}$　　(1)

P_0在l上，则$\begin{cases}x_0'=h+t\cos\theta\\y_0'=k+t\sin\theta\end{cases}$　　(2)

将(1)代入(2)并整理得：

$$t'=\frac{(x_0-h)tg\theta+(k-y_0)}{\sin\theta tg\theta+\cos\theta}.\qquad(3)$$

设$P(x_0,y_0)$关于直线l的对称点是$P'(x',y')$，则

$$\begin{cases}x'=x_0-2t'\sin\theta\\y'=y_0+2t'\cos\theta\end{cases}$$

将(3)式的 t' 代入上式并利用二倍角公式化简得：

$x'=(x_0-h)\cos2\theta+(y_0-k)\sin2\theta+h$

$y'=(x_0-h)\sin2\theta-(y_0-k)\cos2\theta+k$.

定理的证明充分利用了直线参数方程中参数的几何意义.据此不难得到如下的一些结论：

1° 平面上已知 $P(x_0,y_0)$ 关于过原点的直线 $y=tg\theta x$ 的对称点 P' 的坐标：$(x_0\cos2\theta+y_0\sin2\theta,x_0\sin2\theta-y_0\cos2\theta)$.

2° 平面上已知点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $x=m(m\in R)$ 的对称点 P' 的坐标是：$(-x_0+2m,y_0)$.

3° 平面上已知点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 l：$y=\pm x+c(c\in R)$ 的对称点 P' 的坐标是：$(\pm(y_0-c),\pm x_0+c)$.

特别地，当 $c=0$ 时，点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 l：$y=\pm x$ 的对称点分别为 (y_0,x_0)，$(-y_0,-x_0)$.

4° 平面上已知曲线 C：$f(x,y)=0$ 关于已知直线 l：$\begin{cases}x=h+t\cos\theta\\y=k+t\sin\theta\end{cases}$ 的对称曲线 C' 的方程是：$f(x',y')=0$

其中：$x'=(x-h)\cos2\theta+(y-k)\sin2\theta+h$，

$y'=(x-h)\sin2\theta-(y-k)\cos2\theta+k$.

下面举例谈谈定理的应用.

例 1 求抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称曲线方程.

解法一∵直线的斜率 $tg\theta=2$，

由万能公式得：$\sin2\theta=\frac{4}{5}$，$\cos2\theta=-\frac{3}{5}$.

据上述讨论可得所求曲线方程为：

$$\left(\frac{4x+3y}{5}\right)^2=2P\left(\frac{-3x+4y}{5}\right),$$

即　$16x^2+24xy+9y^2+30px-40py=0.$

解法二

据1°知：抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称点 F' 为 $(-\frac{3}{10}p,\frac{2}{5}p)$.

据4°得：抛物线 $y^2=2px$ 的准线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 关于直线 $y=2x$ 的对称直线 l' 为：$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{p}{2}=0.$

因为抛物线关于直线对称的曲线仍为抛物线，且知 F'、l' 就是所求抛物线的焦点、准线，故由抛物线的定义得所求的曲线方程为：

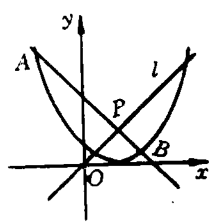
$$\frac{\sqrt{(x+\frac{3}{10}p)^2+(y-\frac{2}{5}p)^2}}{\left|-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{p}{2}\right|}=1.$$

化简即得：$16x^2+24xy+9y^2+30px-40py=0.$

以上两种解法是求对称曲线方程常用的方法.

例2　已知抛物线 $y=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ 和直线 $l:y=tg\theta x$（θ 为直线的倾角），为使抛物线上存在关于直线的对称点，求角 θ 的取值范围.

分析　设 A 为抛物线上任意一点，关于直线 l 对称点为 B，若 B 在抛物线上，则可得到题目所求的结论. 但从 A、B 两点在抛物线上列出关于 x（或 y）的一元二次方程时，计算繁难，不如下法较为简便.



解　设 $P(x_0,y_0)$ 是 l 上任意一点，过 P 与 l 垂直的直线 AB 方程为（如图）：

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=x_0-t\sin\theta, \\ y=y_0+t\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=y_0+t\cos\theta. \end{cases}$$

代入抛物线方程并整理得：

$$(\sin^2\theta)t^2-(2x_0\sin\theta-\frac{3}{2}\sin\theta+\cos\theta)t+(x_0-\frac{3}{4})^2-y_0=0$$

$$\therefore t_1+t_2=\frac{1}{\sin^2\theta}(2x_0\sin\theta-\frac{3}{4}\sin\theta+\cos\theta).$$

$$t_1\cdot t_2=\frac{1}{\sin^2\theta}[(x_0-\frac{3}{4})^2-y_0]=\frac{1}{\sin^2\theta}[(x_0-\frac{3}{4})^2-tg\theta\cdot x_0].$$

若抛物线上存在 A、B 关于直线 l 对称，

$$\text{那么:}\begin{cases} 2x_0\sin\theta-\frac{3}{2}\sin\theta+\cos\theta=0, & (1) \\ \frac{1}{\sin^2\theta}[(x_0-\frac{3}{4})^2-tg\theta\cdot x_0]<0 & (2) \end{cases}$$

从(1)中求出 x_0 代入(2)并化简得：$3tg^3\theta-2tg^2\theta-1>0$

即 $(tg\theta-1)(3tg^2\theta+tg\theta+1)>0$.

$\because \triangle=1^2-4\times3\times1<0$，$\therefore 3tg^2\theta+tg\theta+1>0$，

$\therefore tg>1$，又 $0\leqslant\theta<\pi$.

$\therefore \quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

例 2 的解法紧紧扣住了点 P 特有的性质，应用了直线的参数、韦达定理、二次函数和三角函数单调性等方面的知识，是一个较好的综合题. 据此思路，作进一步浓缩，还可得到下面一种更为简便的解法.

别解 由于直线 $l: y=tg\theta\cdot x$ 的斜率为 $tg\theta$.

所以关于它对称的两个点连线的斜率为 $-\frac{1}{tg\theta}$.

易知斜率为 $-\frac{1}{tg\theta}$ 的抛物线的平行弦中点轨迹为射线

l' :$x=\frac{3}{4}-\frac{1}{2tg\theta}$.

因 l 与 l' 的交点$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2tg\theta},\frac{3}{4}tg\theta-\frac{1}{2}\right)$须在抛物线内,则:

$\frac{3}{4}tg\theta-\frac{1}{2}>\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2tg\theta}\right)-\frac{3}{4}\right]^2$,

$$即:3tg^3\theta-2tg^2\theta-1>0.$$

(以下与前一解法相同,从略)

怎样解有关轴对称问题

已知圆锥曲线 C 上存在关于直线系 l_λ 对称的两点，求参变量 λ 的范围，是解析几何中一类较难的习题.

$$A:\begin{cases} f_c(x_1,y_1)=0, & [f_c(x,y)=0 \text{ 为 } C \text{ 的方程}] \\ f_c(x_2,y_2)=0, & \\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot k_1=-1, & \\ g_l\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=0. & [g_l(x,y)=0 \text{ 为 } l_\lambda \text{ 的方程}] \end{cases}$$

对这类习题，传统的解法大体是这样的：设 C 上关于 l_λ 对称的两点为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，于是根据这两点连线为 l 所垂直且平分，而列出四个方程组成的方程组：

用消元法消 x_1、x_2、y_1、y_2 中的三个，得到含参变量 λ 的一个二次方程，再依判别式或韦达定理，求出 λ 的范围. 这种方法的复杂性主要表现为解四元二次方程组 A.

为了简化求 λ 的过程，这里提出一种新的解法——中点法. 即将条件中的垂直平分推进为 $(x_1、y_1)$、$(x_2、y_2)$ 关于其连线的中点成中心对称，再由中点存在的范围求出 λ 的范围. 而在求中点时，要用上 l_λ 的斜率 k_l. 为了求中点，先给出预备知识.

一、圆锥曲线的弦和共轭直径

圆锥曲线上任二点的连线，叫弦. 一条弦与其所有平行弦中点的集合，叫这弦的共轭直径. 所以，中点可由弦与其共轭直径相交而取得.

上述共轭关系的解析意义表现在它们的斜率上：当弦不与圆锥曲线的对称轴垂直时（圆锥曲线取标准状态），弦与其共轭直径的斜率分别为 k_1、k_2，则

在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中，

$$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}; \tag{1}$$

在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，

$$k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}; \tag{2}$$

在抛物线 $y^2=2px$ 中，k_2 恒为 0，共轭直径为一条与 x 轴平行的直线：

$$y=\frac{p}{k_1}. \tag{3}$$

当弦与圆锥曲线的对称轴垂直时，共轭直径就是那条对称轴.

以上的(1)、(2)、(3)三式，很易证，这里不赘述.

二、解法举例

例 1　如果椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上存在关于直线 $l: y=4x+m$对称的两点，试求 m 的范围.

解　设 A、B 为 C 上关于 l 对称的两点，则

$k_{AB}=-\frac{1}{k_l}=-\frac{1}{4}$，

取 AB 中点 M，由(1)有

$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{3}{4}$，　　($O$ 为椭圆中心)

即　$k_{ON}=3$，OM 直线为 $y=3x$，又 $M\in l$，

$\therefore$　$M(x,y)$：$\begin{cases}y=3x\\y=4x+m\end{cases}\Rightarrow M(-m,-3m)$，

$\because\quad M\in\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}<1\right\}$，也就是 M 在椭圆内，

$\therefore\quad \frac{(-m)^2}{4}+\frac{(-3m)^2}{3}<1$，解之得 $m\in\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

例 2 已知抛物线 $C:(y+1)^2=x+1$ 上有关于直线 $l:y=kx$ 对称的两点，求 k 的范围.

解 设 A、B 两点在抛物线 C 上且关于 l 对称，则 $k_{AB}=-\frac{1}{k}$，取 AB 中点 M，则由(3)和 C 中的 $p=\frac{1}{2}$，得 M 的纵坐标 y_M+1

$=\frac{p}{k_{AB}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{k}}=-\frac{k}{2}$，从而得

$$y_M=-\frac{k+2}{2},\ x_M=-\frac{k+2}{2k}，即\ M\left(-\frac{k+2}{2k},-\frac{k+2}{2}\right)，$$

而 M 在 C 的右边，即 $(y_M+1)^2<x_M+1$，

代入为 $\left(-\frac{k+2}{2}+1\right)^2<-\frac{k+2}{2k}+1$，

即 $\left(-\frac{k}{2}\right)^2<\frac{k-2}{2k}$，　$\frac{k^2}{4}-\frac{k-2}{2k}<0$，

$\frac{(k+2)(k^2-2k+2)}{2k}<0$，

$\because\quad k^2-2k+2>0$，

$\therefore\quad k\in(-2,0)$.

例 3 若双曲线 $x^2-y^2=1$ 上存在关于直线 $l:y=k(x+4)$ 对称的两点，试求 k 的范围.

解 设 A、B 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的两点，A、B 关于 $l:y=k(x+4)$ 对称，则 $k_{AB}=-\frac{1}{k}$，取 AB 中点 M，由(2)得 $k_{OM}\cdot k_{AB}=1$，所以 $k_{OM}=-k$. 于是

$$M:\begin{cases}y=-kx\\ y=k(x+4)\end{cases}\Rightarrow M(-2,2k).$$