



JIAZHONGSHIJI
JIAZHONGSHIJI

sina 新浪考试 特别合作
edu.sina.com.cn

中学数学

课本大讲解

华东师大版★

9 年级数学 上

学法指导·课本答疑
知识点详解·易错点归纳
热点题型荟萃·中考真题解析
跟踪强化训练·答案全解全析

ketangbanli
课堂伴侣

总主编 刘强



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

中学数学

课本大讲解

华东师大版★

9 年级数学 上

总主编 刘 强
主 编 唐绍刚
编 者 唐绍刚 徐 明
 李晓英 张 伟

ketangbanli
课堂伴侣



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

中学数学课本大讲解:华东师大版.9 年级数学/刘强主编.

—北京:北京教育出版社,2008.4

ISBN 978-7-5303-6359-1

I. 中... II. 刘... III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 046250 号

中学数学课本大讲解

ZHONGXUE SHUXUE KEBEN DAJIANGJIE

9 年级数学(上)

JUNIANJI SHUXUE(SHANG)

华东师大版

总主编 刘强

*

北京出版社出版集团 出版
北京教育出版社
(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

全国各地书店经销

九州财鑫印刷有限公司印刷

*

880 × 1230 32 开本 10.25 印张 252000 字

2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5303-6359-1/G·6278

定价:16.80 元

版权所有 翻印必究

如发现质量问题,请与我们联系

地址:北京市海淀区彩和坊路 8 号天创科技大厦 8 层 邮编:100080 网址:www.qqbook.cn
质量投诉电话:(010)62698883 62380997 58572393 邮购电话:(010)51286111-6986

目 录

第 22 章 二次根式

问题情景导入	1
本章整体感知	1
本章学法指导	1
22.1 二次根式	1
核心提示	1
课本答疑	2
要点突破	2
易错点透析	4
题型荟萃	5
新课标新中考	9
强化训练题	10
答案专区	11
22.2 二次根式的乘除法	14
核心提示	14
课本答疑	14
要点突破	15
易错点透析	18
题型荟萃	19
新课标新中考	22
强化训练题	23
答案专区	24

22.3 二次根式的加减法	27
核心提示	27
课本答疑	27
要点突破	28
易错点透析	30
题型荟萃	31
新课标新中考	34
强化训练题	35
答案专区	35
章末总结	40
本章知识结构	40
本章专题讲解	40
本章综合运用创新题集萃	41
中考命题方向探究	42
第 22 章综合检测题	44

第 23 章 一元二次方程

问题情景导入	46
本章整体感知	46
本章学法指导	46
23.1 一元二次方程	47
核心提示	47
课本答疑	47
要点突破	47



易错点透析	49
题型荟萃	49
新课标新中考	52
强化训练题	52
答案专区	53
23.2 一元二次方程的解法	55
核心提示	55
课本答疑	55
要点突破	56
易错点透析	61
题型荟萃	62
新课标新中考	65
强化训练题	66
答案专区	67
23.3 实践与探索	72
核心提示	72
课本答疑	72
要点突破	74
易错点透析	76
题型荟萃	77
新课标新中考	80
强化训练题	82
答案专区	84
章末总结	90
本章知识结构	90
本章专题讲解	90
本章综合运用创新题集萃	91
中考命题方向探究	94

第 23 章综合检测题	95
第 24 章 图形的相似	
问题情景导入	97
本章整体感知	97
本章学法指导	97
24.1 相似的图形	97
核心提示	97
课本答疑	97
要点突破	98
易错点透析	100
题型荟萃	100
新课标新中考	102
强化训练题	103
答案专区	104
24.2 相似图形的性质	106
核心提示	106
课本答疑	106
要点突破	106
易错点透析	110
题型荟萃	111
新课标新中考	113
强化训练题	113
答案专区	115
24.3 相似三角形	118
核心提示	118
课本答疑	118
要点突破	119

易错点透析	123	题型荟萃	161
题型荟萃	124	新课标新中考	163
新课标新中考	127	强化训练题	164
强化训练题	129	答案专区	166
答案专区	131	章末总结	171
24.4 中位线	136	本章知识结构	171
核心提示	136	本章专题讲解	171
课本答疑	136	本章综合运用创新题集萃	172
要点突破	136	中考命题方向探究	175
易错点透析	138	第24章综合检测题	178
题型荟萃	139	期中测试题(一)	182
新课标新中考	141	期中测试题(二)	185
强化训练题	142	第25章 解直角三角形	
答案专区	144	问题情景导入	192
24.5 画相似图形	147	本章整体感知	192
核心提示	147	本章学法指导	192
课本答疑	147	25.1 测 量	192
要点突破	147	核心提示	192
易错点透析	149	课本答疑	193
题型荟萃	150	要点突破	193
新课标新中考	152	易错点透析	194
强化训练题	153	题型荟萃	195
答案专区	155	新课标新中考	198
24.6 图形与坐标	157	强化训练题	199
核心提示	157	答案专区	201
课本答疑	158	25.2 锐角三角函数	203
要点突破	158	核心提示	203
易错点透析	160		



课本答疑·····	203	26.1 概率的预测 ·····	248
要点突破·····	204	核心提示·····	248
易错点透析·····	208	课本答疑·····	249
题型荟萃·····	209	要点突破·····	249
新课标新中考·····	212	易错点透析·····	251
强化训练题·····	213	题型荟萃·····	252
答案专区·····	214	新课标新中考·····	256
25.3 解直角三角形 ·····	217	强化训练题·····	257
核心提示·····	217	答案专区·····	259
要点突破·····	217	26.2 模拟实验 ·····	263
易错点透析·····	220	核心提示·····	263
题型荟萃·····	222	课本答疑·····	263
新课标新中考·····	226	要点突破·····	263
强化训练题·····	227	易错点透析·····	265
答案专区·····	230	题型荟萃·····	265
章末总结·····	236	新课标新中考·····	269
本章知识结构·····	236	强化训练题·····	270
本章专题讲解·····	236	答案专区·····	271
本章综合运用创新题集萃·····	238	章末总结·····	274
中考命题方向探究·····	241	本章知识结构·····	274
第 25 章综合检测题·····	245	本章专题讲解·····	274
第 26 章 随机事件的概率		本章综合运用创新题集萃·····	275
问题情景导入·····	248	中考命题方向探究·····	278
本章整体感知·····	248	第 26 章综合检测题·····	280
本章学法指导·····	248	期末测试题(一)·····	283
		期末测试题(二)·····	287
		综合检测题答案·····	293

第 22 章 二次根式

问题情景导入

图 22-0-1 为一正方体形状的木盒,棱长为 4 cm,小亮要将一个直木条放入其中,并且不露出,那么这个木盒能放入的直木条的最大长度是多少呢?你能算出来吗?这就是本章将要学习的内容.

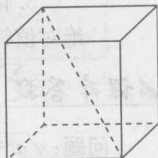


图 22-0-1

本章是在“实数”的基础上,进一步研究二次根式的概念、性质和运算.主要内容分为三节,第一节主要学习二次根式的概念和性质;第二节是二次根式的乘除运算;第三节是二次根式的加减运算.本章的重点是二次根式的化简与运算.本章的难点是:(1)正确区分两个重要的式子,即 $(\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$ 和 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$;(2)能正确识别最简二次根式.本章内容与已学的“实数”、“整式”、“勾股定理”等内容联系紧密,同时也是以后将要学习的“一元二次方程”、“解直角三角形”和“函数”等内容的重要基础,并为学习高中数学中不等式、函数以及解析几何等知识做好了准备.

本章学法指导

1. 本章的学习中要注意两个概念的学习,即二次根式及最简二次根式,在理解这两个概念时,要特别注意它们的限制条件.
2. 在学习二次根式乘、除法法则时要与平方根相关内容相结合.
3. 注意数形结合、分类讨论、转化等数学思想方法在本章中的应用,在自主探索的基础上进行合作学习.

22.1 二次根式

核心提示

关键概念	二次根式、算术平方根的意义 $\sqrt{a} (a \geq 0)$
关键性质	二次根式的性质



学法指导: 1. 二次根式的意义及性质要结合以前所学知识,采用联系、类比的方法.

2. 数轴、绝对值与二次根式结合在一起的题型是重点题型,解此类题的关键是掌握绝对值的性质.

3. 化简 $\sqrt{a^2}$ 的一般步骤:(1)确定 a 的符号;(2)根据 a 的正负决定去掉绝对值符号后是 a 本身还是 a 的相反数 $-a$.

课本答疑

问题: $\sqrt{a^2}$ 等于什么?(课本 P₃)

解答: $\sqrt{a^2} = |a|$.

要点突破

知识点 1: 二次根式(★★)

【知识提炼】形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式. 如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{32}, \sqrt{0}$ 等式子,都是二次根式. 二次根式实际上是非负数的算术平方根.

警示: (1)从形式上来看,二次根式必须含有根号“ $\sqrt{\quad}$ ”,如 $\sqrt{3}, \sqrt{a^2+1}, \sqrt{3m}(m \geq 0)$ 等都是二次根式,像 $\sqrt{4}, \sqrt{g}(g \geq 0)$ 等,也是二次根式.

(2)被开方数 a 可以是数,也可以是代数式, a 如果是数,必须是非负数; a 如果是代数式,则这个代数式的值必须是非负数,否则 \sqrt{a} 无意义.

(3)式子 \sqrt{a} 包含两个非负数:①被开方数 a ,即 $a \geq 0$ (这是使 \sqrt{a} 有意义的条件);② \sqrt{a} 本身,即 $\sqrt{a} \geq 0$ (这是由算术平方根的意义所决定的).

【实例解读】判断下列各式,哪些是二次根式.

(1) $\sqrt{6}$; (2) $\sqrt{-18}$; (3) $\sqrt{x^2+1}$; (4) $\sqrt[3]{-8}$; (5) $\sqrt{x^2+2x+1}$;

(6) $\sqrt{-(2x-1)^2}$; (7) $\sqrt{|x|}$; (8) $\sqrt{11+2x}(x < -\frac{11}{2})$.

分析:根据二次根式的意义,(1)、(3)、(5)、(7)是二次根式,因为它们都含二次根号,被开方数都是非负数;(2)不是二次根式,因为(2)的被开方数为负数;(4)不是二次根式,因为(4)的根指数为3,不符合二次根式的定义;当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,(6)是二次根式;

(8)在 $x < -\frac{11}{2}$ 的条件下, $11+2x < 0$,因此不是二次根式,只有在 $x \geq -\frac{11}{2}$ 时,

(8)才是二次根式.

解:(1)、(3)、(5)、(7)是二次根式.

点拨:判断一个式子是不是二次根式,一定要紧扣定义,看所给的式子是否同时

具备二次根式的两个特征:(1)带二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”;(2)被开方数不小于0.

【活学活用】

1. 下列各式中,哪些是二次根式?哪些不是二次根式?

- (1) $\sqrt{5}$; (2) $\sqrt{-5}$; (3) $\sqrt{(-5)^2}$; (4) $\sqrt[3]{10}$; (5) $\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$; (6) $\sqrt{3-x}$ ($x \leq 3$); (7) $\sqrt{-x}$ ($x > 0$); (8) $\sqrt{(a-1)^2}$; (9) $\sqrt{-x^2-5}$; (10) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ($ab > 0$).

知识点2:确定二次根式中被开方数所含字母的取值范围(★★)

【知识提炼】若一个式子是二次根式,则它的被开方数一定是非负数,利用这一条件能确定二次根式中被开方数所含字母的取值范围.

警示:含有分母的二次根式取值时易忽略分母不能为零这一条件.

【实例解读】当 x 取何值时,下列各式在实数范围内有意义?

- (1) $\sqrt{-x}$; (2) $\sqrt{2-3x}$; (3) $\sqrt{(x-3)^2}$; (4) $\sqrt{\frac{1}{3x-6}}$; (5) $\frac{\sqrt{x+4}}{x-3}$; (6) $\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$.

解:(1)由 $-x \geq 0$, 得 $x \leq 0$, 所以当 $x \leq 0$ 时, $\sqrt{-x}$ 在实数范围内有意义.

(2)由 $2-3x \geq 0$, 得 $x \leq \frac{2}{3}$, 所以当 $x \leq \frac{2}{3}$ 时, $\sqrt{2-3x}$ 在实数范围内有意义.

(3)因为 $(x-3)^2 \geq 0$, 所以 x 为任意实数时, $\sqrt{(x-3)^2}$ 在实数范围内都有意义.

(4)由 $\frac{1}{3x-6} \geq 0$, 即 $3x-6 > 0$, 得 $x > 2$, 所以当 $x > 2$ 时, $\sqrt{\frac{1}{3x-6}}$ 在实数范围内有意义.

(5)由 $x+4 \geq 0$, 得 $x \geq -4$, 且由 $x-3 \neq 0$, 得 $x \neq 3$, 所以 $x \geq -4$ 且 $x \neq 3$ 时, $\frac{\sqrt{x+4}}{x-3}$ 在实数范围内有意义.

(6)由 $1-x \geq 0$, 得 $x \leq 1$ ①, 由 $2-|x| \neq 0$, 得 $x \neq \pm 2$ ②, 同时满足①、②的 x 的取值范围是 $x \leq 1$, 且 $x \neq -2$, 所以当 $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$ 时, $\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$ 在实数范围内有意义.

点拨:若给出的代数式只是单个二次根式,则只需考虑被开方数是非负数即可;若被开方数的分母中含有字母,还应考虑分母不能为零.

【活学活用】

2. 当 x 取何值时,下列各式在实数范围内有意义?

- (1) $\sqrt{2x-3}$; (2) $\sqrt{\frac{1}{3x+7}}$; (3) $\sqrt{-4x^2-4x-1}$; (4) $\sqrt{x^2-2x+2}$.

3. 求使下列各式有意义的 x 的取值范围.

- (1) $\sqrt{-\frac{1}{2x-5}}$; (2) $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$; (3) $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$; (4) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.



知识点 3:二次根式的性质(★★★)

【知识提炼】二次根式具有如下性质:① $\sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0)$, 即一个非负数的算术平方根是一个非负数. ② $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$, 即一个非负数的算术平方根的平方等于这个非负数. ③ $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0), \end{cases}$ 即非负数的平方的算术平方根是这个数本身, 负数的平方的算术平方根是这个数的相反数.

警示:(1) 因为 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 表示 a 的算术平方根, 所以 $\sqrt{a} \geq 0$, 这个性质也是非负数算术平方根的性质, 这个性质在解答题目时应用较多, 如 $2\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$, 则 $a = 0, b = 0$. (2) $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 可以正用, 也可以逆用, 正用时去掉根号, 起到化简的作用, 逆用可以把一个非负数写成完全平方的形式. (3) $(\sqrt{a})^2$ 中 a 的取值范围是非负数, 而 $\sqrt{a^2}$ 中 a 的取值范围是全体实数.

【实例解读】计算: (1) $(\sqrt{7})^2 - \sqrt{(-7)^2}$; (2) $-(-\sqrt{11})^2 + (-2\sqrt{5})^2$.

分析:运用二次根式性质来进行计算.

解: (1) $(\sqrt{7})^2 - \sqrt{(-7)^2} = 7 - |-7| = 7 - 7 = 0$.

(2) $-(-\sqrt{11})^2 + (-2\sqrt{5})^2 = -11 + (-2)^2 \times (\sqrt{5})^2 = -11 + 20 = 9$.

点拨:本题主要考查 $\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ 的化简.

【活学活用】

4. 计算: (1) $(\sqrt{\frac{2}{5}})^2$; (2) $(3\sqrt{2})^2$; (3) $(-2\sqrt{\frac{1}{3}})^2$; (4) $(\sqrt{x^2 + y^2})^2$.

5. 计算: (1) $\sqrt{25}$; (2) $\sqrt{(-1.5)^2}$; (3) $\sqrt{(a-3)^2} (a < 3)$; (4) $\sqrt{(2x-3)^2} (x < \frac{3}{2})$.

易错点透析

易错点展示: $\sqrt{(5-x)^2} = 5-x (x > 5)$.

易错点破解:在含有字母的二次根式的计算、化简中, 一定要按照公式 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0) \end{cases}$ 来解答, 有时所含字母给定范围, 计算易出错, 平时应牢固掌握二次根式性质的实质.

【例 1】计算: $\sqrt{a^2} (a < 0)$.

错解: $\sqrt{a^2} = a$.

错解分析: a 是负数, 而非负数的算术平方根不可能是负数.

正确解法: $\sqrt{a^2} = -a (a < 0)$.

【例 2】计算: $\sqrt{(3-x)^2} (x > 3)$.

错解: $\sqrt{(3-x)^2} = 3-x$.

错解分析:计算的结果即算术平方根不能是负数.

正确解法: $\sqrt{(3-x)^2} = -(3-x) = x-3 (x>3)$.

易忽略点:判断二次根式中字母的取值范围时,易忽略分母不能为零这一限制条件.

易忽略点导析:分母不能为零在实数范围内仍适用,在判断取值范围时,把限制条件考虑全面.

【例 3】当 x 取何值时,下列各式在实数范围内有意义?

$$(1) \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}; \quad (2) \frac{4}{1-\sqrt{x}}$$

错解:(1)因为 $x-4 \geq 0$,所以 $x \geq 4$; (2) $x \geq 0$.

错解分析:(1)没有考虑 $x-5=0$ 时该式无意义; (2)没有限制 $1-\sqrt{x} \neq 0$ 这种情况. (1)、(2)都忽略了分母不能为零的限制条件,限制条件没有考虑全面.

正确解法:(1)要使原式有意义,则需 $\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x-5 \neq 0, \end{cases}$ 解得 x 的取值范围是 $x \geq 4$ 且 $x \neq 5$.

(2)要使原式有意义,则需 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 1-\sqrt{x} \neq 0, \end{cases}$ 解得 x 的取值范围是 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$.

题型荟萃

经典题型一

基础知识应用题

【例 1】当 x 为何值时,下列各式有意义?

$$(1) \sqrt{3x} + \sqrt{-x}; \quad (2) \sqrt{-2x} + \frac{x}{x+2}; \quad (3) \sqrt{(x-1)^2}; \quad (4) \sqrt{\frac{1}{2-3x}}$$

$$(5) \frac{\sqrt{2x+4}}{x-2}; \quad (6) \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}; \quad (7) \frac{\sqrt{1-2x}}{|x|-1}; \quad (8) \sqrt{2-a} + \frac{2a}{a+1}$$

分析:本题主要考查二次根式有意义的条件,要使各式有意义,则被开方数必须是非负数.如果分母中有根式,那么必须满足被开方数为正数,因为零不能作分母.

解:(1)要使 $\sqrt{3x}$ 有意义,则 $3x \geq 0$,即 $x \geq 0$,

要使 $\sqrt{-x}$ 有意义,则 $-x \geq 0$,即 $x \leq 0$,

由 $x \geq 0$,且 $x \leq 0$,得 $x=0$,

\therefore 当 $x=0$ 时, $\sqrt{3x} + \sqrt{-x}$ 有意义.

(2)要使 $\sqrt{-2x}$ 有意义,则 $-2x \geq 0$,即 $x \leq 0$,

要使 $\frac{x}{x+2}$ 有意义,则 $x+2 \neq 0$,即 $x \neq -2$.

\therefore 当 $x \leq 0$,且 $x \neq -2$ 时, $\sqrt{-2x} + \frac{x}{x+2}$ 有意义.

(3) $\because (x-1)^2 \geq 0$, \therefore 无论 x 取任何实数, $\sqrt{(x-1)^2}$ 都有意义.

(4)要使 $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 有意义,则 $2-3x > 0$,即 $x < \frac{2}{3}$.



∴当 $x < \frac{2}{3}$ 时, $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 有意义.

(5) 要使 $\frac{\sqrt{2x+4}}{x-2}$ 有意义, 则 $2x+4 \geq 0$, 且 $x-2 \neq 0$.

∴当 $x \geq -2$ 且 $x \neq 2$ 时, $\frac{\sqrt{2x+4}}{x-2}$ 有意义.

(6) 要使 $\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}$ 有意义, 则 $x-3 \geq 0$, 且 $x^2-3 \neq 0$, 解得它们的公共解集为 $x \geq 3$,

∴当 $x \geq 3$ 时, $\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}$ 有意义.

(7) 要使 $\frac{\sqrt{1-2x}}{|x|-1}$ 有意义, 则 $1-2x \geq 0$, 且 $|x|-1 \neq 0$, 解得它们的公共解集为 $x \leq \frac{1}{2}$, 且 $x \neq -1$, ∴当 $x \leq \frac{1}{2}$, 且 $x \neq -1$ 时, $\frac{\sqrt{1-2x}}{|x|-1}$ 有意义.

(8) 要使 $\sqrt{2-a} + \frac{2a}{a+1}$ 有意义, 则 $2-a \geq 0$, 且 $a+1 \neq 0$, 解得它们的公共解集为 $a \leq 2$ 且 $a \neq -1$, ∴当 $a \leq 2$, 且 $a \neq -1$ 时, $\sqrt{2-a} + \frac{2a}{a+1}$ 有意义.

点拨: 若给出的代数式是单个二次根式, 则只需考虑被开方数是非负数即可; 若被开方数的分母中含有字母, 还应考虑分母不能为零这一重要条件.

【例 2】化简下列各式:

(1) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$; (2) $\frac{2}{x-2} \sqrt{x^2-4x+4} (x < 2)$;

(3) $\sqrt{x^4+2x^2+1} - \sqrt{x^4+6x^2+9}$; (4) $\sqrt{-a^3-a^2}$.

分析: 本题主要考查的是公式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 的应用. 利用公式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 将形如 $\sqrt{a^2}$ 的式子化简.

解: (1) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}| - |2-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5} - (\sqrt{5}-2) = 3-\sqrt{5}-\sqrt{5}+2 = 5-2\sqrt{5}$.

(2) ∵ $x < 2$, ∴ $x-2 < 0$,

∴ $\frac{2}{x-2} \sqrt{x^2-4x+4} = \frac{2}{x-2} \sqrt{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} |x-2| = \frac{2}{x-2} \cdot (2-x) = -2$.

(3) $\sqrt{x^4+2x^2+1} - \sqrt{x^4+6x^2+9} = \sqrt{(x^2+1)^2} - \sqrt{(x^2+3)^2} = |x^2+1| - |x^2+3| = x^2+1 - (x^2+3) = -2$.

(4) $\sqrt{-a^3-a^2} = \sqrt{-a^2(a+1)}$,

由于 $-a^2(a+1) \geq 0$, 而 $-a^2 \leq 0$, ∴ $a+1 \leq 0$, ∴ $a \leq -1$,

∴ $\sqrt{-a^3-a^2} = |a| \sqrt{-a-1} = -a \sqrt{-a-1}$.

点拨: (4) 题中, $a \leq -1$ 时, $\sqrt{-a^2(a+1)} = |a| \sqrt{-(a+1)}$ 中被开方数的负号不要丢掉.

【例3】化简：(1) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-16x+64}(-1<x<8)$;

(2) $\frac{1}{m-2n}\sqrt{m^2-4mn+4n^2}(m\neq 2n)$;

(3) $\sqrt{x^2-4x+4}+2\sqrt{1+2x+x^2}$;

(4) $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-2(0<a<1)$.

分析：先根据算术平方根的定义将代数式写成绝对值的形式，再去掉绝对值符号，其中，正确去掉绝对值符号是化简的关键.若题中给出了字母的取值范围，则可直接化简；若题目中含有两个根号的形式，则应进行分别讨论.

解：(1)因为 $-1<x<8$,

所以 $x+1>0, x-8<0$, 故原式 $=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-8)^2}=|x+1|-|x-8|=x+1+x-8=2x-7$.

(2)原式 $=\frac{1}{m-2n}\sqrt{(m-2n)^2}=\frac{1}{m-2n}\cdot|m-2n|$.

当 $m>2n$ 时, 原式 $=\frac{1}{m-2n}\cdot(m-2n)=1$;

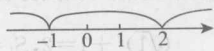
当 $m<2n$ 时, 原式 $=\frac{1}{m-2n}\cdot[-(m-2n)]=-1$.

(3)原式 $=\sqrt{(x-2)^2}+2\sqrt{(1+x)^2}=|x-2|+2|1+x|$.

令 $x-2=0$, 则 $x=2$;

令 $1+x=0$, 则 $x=-1$.

把 $x=2, x=-1$ 这两点标在数轴上(如图 22-1-1).



这时数轴被分成三段： $x\geq 2, -1\leq x<2, x<-1$.

当 $x\geq 2$ 时, $|x-2|+2|1+x|=x-2+2(1+x)=3x$;

图 22-1-1

当 $-1\leq x<2$ 时, $|x-2|+2|1+x|=-(x-2)+2(1+x)=x+4$;

当 $x<-1$ 时, $|x-2|+2|1+x|=-(x-2)-2(1+x)=-3x$.

(4)因为 $0<a<1$, 所以 $a<\frac{1}{a}$, 则 $a-\frac{1}{a}<0$.

故原式 $=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}-a=\frac{1-a^2}{a}$.

点拨：当给出了字母的取值范围时，必须确定根号内 a^2 中 a (可以为代数式) 的正负.

【例4】在实数范围内分解因式：

(1) x^2-3 ; (2) $x^2(x-\sqrt{2})-2(x-\sqrt{2})$.

解：(1) $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

(2) $x^2(x-\sqrt{2})-2(x-\sqrt{2})=(x-\sqrt{2})(x^2+2)=(x-\sqrt{2})[x^2-(\sqrt{2})^2]=(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})$.



点拨: 解题的关键是能将一个非负数 a 写成一个数的平方的形式, 即逆用公式 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$, 这样可以在实数范围内分解因式, 并且原来在有理数范围内分解因式的方法和公式仍然适用.

经典题型三

实际应用题

【例 5】 学校准备在旗杆附近修建一个面积为 81 m^2 的草坪, 在草坪周围围上栅栏.

方案一: 建成正方形的.

方案二: 建成圆形的.

如果你请决策, 从节省工料的角度考虑, 你选择哪个? 请说明理由. (π 取 3.14)

分析: 从节省栅栏工料的角度考虑, 就是用料少, 即图形周长小, 因此只需要由已知条件算出各图形的周长, 然后比较大小就可以.

解: 设正方形的边长为 $a \text{ m}$, 由题意得 $a^2 = 81$, 则 $a = \pm \sqrt{81}$, 即 $a = \pm 9$. 又因为 $a > 0$, 所以 $a = 9$, $4a = 36$. 所以方案一建成正方形的草坪, 需要用料 36 m.

设圆的半径为 $r \text{ m}$, 由题意得 $\pi r^2 = 81$, 则 $r = \pm \sqrt{\frac{81}{\pi}}$, 即 $r \approx \pm 5.08$. 又因为 $r > 0$, 所以 $r \approx 5.08$, $2\pi r \approx 31.9$. 所以方案二建成圆形的草坪, 需要用料约 31.9 m.

由于 $31.9 < 36$, 显然方案二用料少一些, 因此应选用方案二.

点拨: 本题中运用根式知识求解生产中问题, 采用计算比较的方法确定哪种方案更合理.

经典题型四

创新探究题

【例 6】 如图 22-1-2, $\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \triangle OA_3A_4, \triangle OA_4A_5, \triangle OA_5A_6 \dots$ 都是直角三角形, 认真分析各式, 然后解答问题:

$$(\sqrt{1})^2 + 1 = 2, S_1 = \frac{\sqrt{1}}{2};$$

$$(\sqrt{2})^2 + 1 = 3, S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(\sqrt{3})^2 + 1 = 4, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$(\sqrt{4})^2 + 1 = 5, S_4 = \frac{\sqrt{4}}{2};$$

...

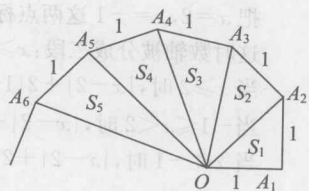


图 22-1-2

(1) 请用含有 n (n 是正整数) 的等式表示上述变化规律;

(2) 推算出 OA_{10} 的长;

(3) 求出 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_{10}^2$ 的值.

分析: 由图可以看出 $OA_1^2 + A_1A_2^2 = OA_2^2$,

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot A_1A_2 = \frac{\sqrt{1}}{2}$, 由此类推可以得到问题(1)的答案.

又由 $OA_1 = \sqrt{1}, OA_2 = \sqrt{2}, \dots$, 可得 $OA_{10} = \sqrt{10}$.

解:(1)通过类比,可推出 $(\sqrt{n})^2+1=n+1$,此时 $S_n=\frac{1}{2}\sqrt{n}\cdot 1=\frac{\sqrt{n}}{2}$.

$$(2)\because OA_1=\sqrt{1}, OA_2=\sqrt{2}, OA_3=\sqrt{3}, \dots$$

$$\therefore OA_{10}=\sqrt{10}.$$

$$(3)S_1^2+S_2^2+S_3^2+\dots+S_{10}^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\times(1+2+3+\dots+10)=\frac{55}{4}.$$

点拨:本题属于阅读理解型试题,通过阅读寻求规律,结合图形确定结果,通过类比找到解题方法.

【例7】设 x, y 都是正整数,且 $\sqrt{x-116}+\sqrt{x+100}=y$,求 y 的最小值.

分析:仔细分析题意, x, y 都是正整数,则 $\sqrt{x-116}, \sqrt{x+100}$ 也必为正整数,采用换元法,去掉根号,将原方程变为二元一次方程组,便可得解.

解: $\because x, y$ 都是正整数, $\therefore \sqrt{x-116}, \sqrt{x+100}$ 也都是正整数.

令 $m=\sqrt{x-116}, n=\sqrt{x+100}$ (m, n 都是正整数,则 $m<n$),

$$\text{则有} \begin{cases} m^2=x-116, \\ n^2=x+100. \end{cases}$$

消去 x 得 $n^2-m^2=216$,即 $(n+m)(n-m)=2^3\cdot 3^3$.

$\therefore n+m, n-m$ 都是正整数,且 $m<n$.

$$\therefore \begin{cases} n-m=2, \\ n+m=108 \end{cases} \text{或} \begin{cases} n-m=4, \\ n+m=54 \end{cases} \text{或} \begin{cases} n-m=6, \\ n+m=36 \end{cases} \text{或} \begin{cases} n-m=12, \\ n+m=18. \end{cases}$$

解方程组,得 $\begin{cases} n=55, \\ m=53 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n=29, \\ m=25 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n=21, \\ m=15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n=15, \\ m=3. \end{cases}$

$\therefore y$ 的最小值为 $15+3=18$.

点拨:本题采用了换元法,将一个无从下手的方程转化为一般形式的方程,利用题中所给条件,得到最后应求的结果.

新课标新中考

(一) 中考考点点击

本节知识是中考的必考内容,但是单独命题不多,常与其他知识结合,以填空题、选择题、解答题等形式出现,主要以基础题、中档题为主.

(二) 中考真题全解

【例1】(2007·黄冈市)计算: $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=$ _____.

分析:利用平方差公式得 $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5})^2-2^2=5-4=1$.



答案:1

评注:考查 $(\sqrt{a})^2=a(a \geq 0)$ 及平方差公式.

【例2】(2007·武汉市)化简 $\sqrt{16}$ 的值为()

- A. 4 B. -4 C. ± 4 D. 16

分析: $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=|4|=4$.

答案:A

评注:考查 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

【例3】(2007·宁波市) $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是()

- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

分析:由 $x-1 \geq 0$,得 $x \geq 1$.

答案:B

评注:考查二次根式中被开方数所含字母的取值范围.

强化训练题

一、选择题

- 已知 $x < 2$,则化简 $\sqrt{x^2-4x+4}$ 的结果是()
A. $x-2$ B. $x+2$ C. $-x-2$ D. $2-x$
- 若 $\sqrt{(x-3)^2}+(x-3)=0$,则 x 的取值范围是()
A. $x > 3$ B. $x < 3$ C. $x \geq 3$ D. $x \leq 3$
- 下列说法正确的是()
A. 若 $\sqrt{a^2}=-a$,则 $a < 0$ B. 若 $\sqrt{a^2}=a$,则 $a > 0$
C. $\sqrt{a^4 b^8}=a^2 b^4$ D. 5的平方根是 $\sqrt{5}$
- 下列各式中是二次根式的是()
A. $\sqrt{-7}$ B. $\sqrt[3]{2m}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

二、填空题

- 已知 $\sqrt{a^2}=1$, $|b|=2$,则 $\sqrt{(a+b)^2}$ 的值是_____.
- 使式子 $\frac{\sqrt{3m}}{3-|m|}$ 有意义的 m 的取值范围为_____.
- 式子 $\sqrt{b^2+1}$, \sqrt{x} , $\sqrt{100}$, $\sqrt{(x-1)^2}$ 中,不一定是二次根式的是_____.
- $\sqrt{(-9)^2}+(\sqrt{9})^2$ 化简的结果是_____.

三、解答题

9. 当 x 取何实数时,下列各式有意义?

- (1) $\sqrt{(x-5)^2}$; (2) $\sqrt{\frac{1}{2x-8}}$; (3) $\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$; (4) $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-2}$.