Birkhoff 系统的全局分析

◆陈向炜　著

河南大学出版社

前　言

1927 年美国著名数学家 Birkhoff G D. 在其名著《动力系统》中给出比 Hamilton 方程更为普遍的一类新型动力学方程，并给出比 Hamilton 原理更为普遍的一类新型积分变分原理. 1978 年美国物理学家 Santilli R M. 建议将这个新方程命名为 Birkhoff 方程，这个新原理可称为 Pfaff-Birkhoff 原理. 1989 年前苏联学者 Гапиуллин А С. 认为，对 Birkhoff 方程研究是近代分析力学的一个重要发展方向. 1992 年以来，我国数学力学家梅凤翔先生等研究了非完整系统动力学方面的 Birkhoff 表示及其积分方法，给出了 Birkhoff 系统的对称性和守恒律、Birkhoff 系统的动力学稳定性、Birkhoff 方程的几何描述，构造了 Birkhoff 系统动力学的理论框架，出版了专著《Birkhoff 系统动力学》，宣告了一门新力学的诞生，被学术界称为经典力学的又一次飞跃.

近年来，Birkhoff 系统动力学已成为国内外数学力学界的一个热门研究课题，并且已取得一系列丰富的成果. 但是，对 Birkhoff 系统尚缺乏全局性的了解. 对 Birkhoff 系统的全局稳定性、分岔和混沌的研究具有重要的理论和实际意义. 本书在 Birkhoff 系统全局分析方面做些尝试，得到了一些有意义的结果.

本书包括绪论和八章正文. 绪论概述 Birkhoff 系统动力学研究的历史与现状，第一章介绍 Birkhoff 系统动力学的基本内容，第二章讨论 Birkhoff 系统的的降阶法与积分不变量的构造，第三章到第五章侧重 Birkhoff 系统的对称性研究，包括形式不变性、Lie 对称性、Noether 对称性以及对称性摄动等，第六章到第八章侧重 Birkhoff 系统的全局稳定性、分岔与混沌的研究.

本书是在作者博士论文基础上扩充整理而成的，作者衷心感谢导

师梅风翔先生的无限关爱和精心指导，感谢罗绍凯教授提出的诸多建议与帮助，感谢傅景礼博士的有益讨论与支持，感谢河南省高校青年骨干教师资助计划的大力资助. 限于水平，书中疏漏之处恳请读者指正.

作　者

2002 年春

目　　录

绪　论

§0.1　经典力学从 Newton 到 Birkhoff

几千年来人类对物质机械运动的认识，即对力学规律的认识，经历了由浅入深、由表及里的过程. 人们对物质世界的认识总是在原先积累的基础上进一步得到深化[1].

Newton 于 1687 年发表《自然哲学的数学原理》，奠定了经典力学的基础. 300 年来，经典力学经历了 Newton 力学到 Lagrange 力学，Lagrange 力学到 Hamilton 力学，Hamilton 力学到 Birkhoff 力学的漫长发展过程. 促进这个发展过程的原因主要有二：一是生产和技术发展的需要，二是学科和科学自身发展的规律. 在一个时期技术走在前面，在另一时期科学走在前面，科学和技术总是互相交融、互相促进的. 经典力学与近代力学、现代力学一样，自身总是不断向前发展的，而人们对经典力学的认识也在不断深化.

0.1.1　Newton 力学

1. Newton 力学的内容

Newton 力学以 Newton 运动定律和万有引力定律为基础，研究速度远远小于光速的宏观物体的运动规律. Newton 在《自然哲学的数学原理》中提出了物体运动的三条基本规律，即 Newton 三定律.

Newton 第一定律即惯性定律. 它指出：任何一个物体将保持它的静止状态或作匀速直线运动，除非有施加于它的力迫使它改变此状态.

Newton 第二定律即运动定律. 它指出：物体运动量的改变与所施加的力成正比，并发生于该力的作用线方向上. 这里“运动量的改变”就是质点动量的变化率. 这个定律表为公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}, \tag{0.1.1}$$

式中，m 为质点的质量，$\boldsymbol{v}$ 为质点的速度，$m\boldsymbol{v}$ 为质点的动量，$\boldsymbol{F}$ 为所施加的力.

Newton 第三定律即作用与反作用定律. 它指出：对于任何一个作用力，必有一个大小相等而方向相反的反作用力.

Newton 第一定律在 Galilei 的著作《关于两门新科学的谈话和数学证明》(1638 年)中已有叙述，Descartes 在形式上又作过改进(1644 年). Newton 第三定律是 Newton 总结 Wallis 和 Huygens 等人的结果而得出的.

Newton 万有引力定律是 Newton 在行星运动的 Kepler 定律以及他人成果上用数学方法导出的.

Newton 力学强调力、动量等具有矢量性质的量，因此 Newton 力学可称为矢量力学.

2. Newton 力学的意义

Newton 三定律为力学奠定了坚实的基础，并对其他学科的发展产生了巨大影响. Newton 三定律和万有引力定律把地球上的力学和天体力学统一到一个基本力学体系中，创立了经典力学的理论体系，实现了自然科学的第一次大统一.

Newton 运动定律是就单个自由质点而言的. D'Alembert 在著作《动力学》(1743 年)中指出，Newton 第二定律也适用于非自由质点. 将 Newton 第二定律(0.1.1)应用于质点系，有近代的形式

$$m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_i^a+\boldsymbol{F}_i^c \quad (i=1,\cdots,N). \tag{0.1.2}$$

式中，m_i 为系统第 i 个质点的质量，$\boldsymbol{v}_i$ 是它的速度，$\boldsymbol{F}_i^a$ 是对它施加的主动力，$\boldsymbol{F}_i^c$ 是它所受的约束力. Newton 第二定律(0.1.2)可表为 D'Alembert 原理的形式

$$-m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{F}_i^a+\boldsymbol{F}_i^c=0 \quad (i=1,\cdots,N). \tag{0.1.3}$$

今天，Newton 第二定律(0.1.2)作为大学本科理论力学课程的内容已成为学习和研究经典力学的基础. 由 Newton 第二定律可以导出

质点系动力学普遍定理，进而可以导出刚体和刚体系统的动力学方程. 以三条基本定律为基础的 Newton 力学不仅在天体力学中、物理学中，而且在现代工程技术中有十分重要的价值.

Newton 根据运动定律导出的万有引力定律是动力学逆问题中最经典的问题. 根据 Newton 这一思想发展起来的新学科"动力学逆问题"，近 20 年取得了重要进展[2].

尽管 20 世纪的三件大事——相对论、量子力学和混沌对 Newton 力学产生了极大冲击，但 Newton 力学今天仍然是研究宏观运动不可缺少的基础和原则.

0.1.2 Lagrange 力学

1. Lagrange 力学的内容

由 Newton 第二定律(0.1.2)可以看出，它特别适合单个自由质点在已知主动力作用下的运动. 对有两个质点或三个质点的系统在万有引力作用下的运动(二体问题或三体问题)，该定律也显示优越性. 然而，当组成系统的质点数目 N 很大时，或者系统的诸坐标受到约束时，方程(0.1.2)的应用便显得不方便. 为此，从学科发展和科技进步中要求提出并要求解决受约束力学系统的动力学问题，于是出现了分析力学.

Lagrange 是分析力学的奠基人. Lagrange 继 D'Alembert 之后进一步研究了受约束质点的运动. Lagrange 在著作《分析力学》(1788 年)中，应用数学分析的方法解决了质点和质点系的力学问题. 对于有约束的力学系统，他采用广义坐标，提出虚位移原理并与 D'Alembert 原理(0.1.3)结合而得到动力学普遍方程，即 D'Alembert-Lagrange 原理. 这个原理的矢量形式为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0. \tag{0.1.4}$$

广义坐标形式为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0. \tag{0.1.5}$$

这里 q_s 为广义坐标，T 为系统的动能，Q_s 为广义力. 对于受有双面理想完整约束的力学系统，由原理(0.1.5)中 δq_s 的独立而得到第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n). \tag{0.1.6}$$

对于完整保守系统，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,\cdots,n). \tag{0.1.7}$$

式中，$L=T-V$ 为 Lagrange 函数或动势，V 为系统势能.

D'Alembert-Lagrange 原理(0.1.4)和 Lagrange 方程(0.1.6)是 Lagrange 力学的核心.

现在人们用近代数学描述 Lagrange 力学. 基本思想是：Lagrange 力学用位形空间描述力学系统. 力学系统的位形空间具有微分流形结构，其同胚群作用在此结构上，Lagrange 力学的基本概念和定理相对此群是不变的. 一个 Lagrange 力学系统用一个流形(位形空间)和在流形切丛上的函数(Lagrange 函数)给出. 所有使 Lagrange 函数不变的位形空间中单参数同胚群定义一个守恒律[3].

2. Lagrange 力学的意义

首先，Lagrange 力学比 Newton 力学更进步，主要表现在：Lagrange 方程(0.1.6)的个数比 Newton 方程(0.1.2)的个数少，微分方程组的阶数较低；在理想约束下，Lagrange 方程(0.1.6)不出现约束反力，Newton 方程(0.1.2)则有许多约束反力；Lagrange 力学强调标量 T, Q_s，Newton 力学强调矢量，而标量比矢量更易表达；对于完整保守系统，Lagrange 力学可只用一个标量 $L=T-V$ 来表达，而 Newton 力学做不到.

其次，D'Alembert-Lagrange 原理(0.1.4)或(0.1.5)适用于具有双面理想约束的力学系统，不论所受约束是否完整，是否定常，也不论所受主动力是否保守. 引进动力学函数 $\dot{T}=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$，原理(0.1.5)可表为 Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + 2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0. \qquad (0.1.8)$$

引进动力学函数 $S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i$，原理(0.1.5)可表为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right)\delta q_s = 0. \qquad (0.1.9)$$

这样，原理(0.1.5)、(0.1.8)、(0.1.9)可作为非完整力学的基础.

最后，方程(0.1.7)促成 Hamilton 力学的发生以及 Lagrange 力学逆问题的发展[4].

0.1.3 Hamilton 力学

1. Hamilton 力学的内容

Hamilton 发展了分析力学. 他在两篇长论文《论动力学中的一个普遍方法》(1834 年)和《再论动力学中的普遍方法》(1835 年)中提出了一个积分变分原理和一种以广义坐标与广义动量为独立变量的动力学方程. 这个原理称为 Hamilton 原理，有形式

$$\left.\begin{aligned}&\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0,\\ &\mathrm{d}\delta q_s = \delta\mathrm{d}q_s,\\ &\delta q_s|_{t=t_1} = \delta q_s|_{t=t_2} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (0.1.10)$$

由原理(0.1.10)容易导出 Lagrange 方程(0.1.7). Hamilton 给出的动力学方程称为正则方程，有形式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_s},\\ &\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}. \quad (s=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \qquad (0.1.11)$$

式中，q_s 为广义坐标，p_s 为广义动量，$H = H(q,p,t) = \sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - L$ 为 Hamilton 函数. 正则方程(0.1.11)在正则变换下保持形式不变. 正则方程(0.1.11)的求解归结为寻求 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0 \qquad (0.1.12)$$

的完全积分.令人惊奇的是,这种将一个简单问题归结为一个更复杂问题的办法却是一种非常有效的解法.

Hamilton 原理(0.1.10)和 Hamilton 正则方程(0.1.11)是Hamilton 力学的核心.

用近代数学语言可以说,没有微分形式就不能说明 Hamilton 力学.微分形式的信息包括外积、外微分、积分和 Stokes 公式.流形上的辛结构是一个闭的非蜕化的微分 2-形式.力学系统的相空间具有自然辛结构.在辛流形上,矢量场和 1-形式之间存在自然同构.辛流形上一个矢量场对应一个函数的微分,称为 Hamilton 矢量场.流形上一个矢量场确定一个相流,即单参数同胚群.辛流形上 Hamilton 矢量场保持相空间的辛结构.流形上的矢量场形成 Lie 代数,辛流形上的 Hamilton 矢量场也形成 Lie 代数.此类代数中的运算称为 Poisson 括号[3].

2. Hamilton 力学的意义

首先,Hamilton 力学比 Lagrange 力学更进步,主要表现在:原理(0.1.10)具有高度概括性,只用一个泛函极值就可以表示完整保守系统的运动规律;原理(0.1.10)可应用于力学以外的光学、电磁学等领域,并可用做近似计算;正则方程(0.1.11)的求解比 Lagrange 方程(0.1.7)的求解容易;正则方程(0.1.11)是动量空间的一阶方程组,具有自然辛结构,在数学描述上比 Lagrange 方程(0.1.7)更容易.

其次,Hamilton 力学在非线性科学中扮演重要角色.KAM 定理成为混沌理论的开端[5].Hamilton 力学促成广义 Hamilton 力学的形成和发展[6].

最后,Hamilton 力学促成辛几何这一新数学分支的建立.

0.1.4 非完整力学

1. 非完整力学的内容

在 Lagrange 时代人们还不知道非完整约束,Lagrange 本人以为他的方程适合于任何约束力学系统.19 世纪末和 20 世纪初是非完整