点难点疑点问答及水平反馈丛书

修订本

初三数学

主编：崔孟明　编著：张家驹　孙玉卯　徐望根

三环出版社

重点难点疑点问答与水平反馈丛书

初三数学

编者：梁子木　赵兴业　孙玉卯
陈泰康　张家驹

三环出版社

（琼）新登字03号

重点难点疑点问答与水平反馈丛书
初三数学
梁子木　赵兴业　孙玉卯　编著
海南（三环）出版社出版
（海口市滨海大道花园新村20号　邮编：570001）
责任编辑：刘文武　朱作霖　　封面设计：张　戈
国家教委图书馆工作委员会装备用书
河北乐亭县印刷厂印刷
787×1092mm　　32开本　　8.5印张　175千字
1991年2月第1版　　1995年6月第4次印刷
ISBN 7－80564－329－6/G199　　定价：6.8元

《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》编委会

前言

学生学习，既要学习科学知识，又要通过学习知识培养良好的品德素质，提高分析问题和解决问题的能力。能力的核心是思维能力。设疑解疑是发展思维、提高能力的重要途径。

学生在学习过程中，只有掌握基础知识、基本概念和基本技能，才能顺利解疑，提高学习效果。由于学生各自的基础不同，对应该掌握的知识理解深度不同，因而需要帮助他们加深对重点、难点知识的理解。为此，我们组织了北京市及全国重点中学的特、高级教师和教学研究人员编写了这套《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》，它包括语文、数学、物理、化学和英语等主要学科，与中学各科教材相对应。

该丛书有如下特点：

一、全面贯彻“依纲扣本”的原则。该丛书自 1991 年出版问世以来，曾连续再版四次，深受读者欢迎。但由于出版时间较长，教材改动比较频繁，使这套书远远不能满足读者的需要。鉴此，我们组织作者在原书基础上依据新版《教学大纲》和新教材进行了全面修订，力图做到与教学进程相对应，从而更好地满足读者的需要。

二、有较高的理论水平。该丛书是作者总结多年的教学经验和教研成果，广泛吸收和借鉴国内外先进的教育理论，针对青少年的性格特点和学习心理而精心编写出来的，具有较高的理论指导意义。

三、针对性强。该丛书针对学生在学习过程中可能遇到的重点、难点、疑点知识，进行多层次、多角度地解析，以使学生深入浅出融汇贯通，举一反三。

四、及时水平反馈。反馈是提高学习积极性，促进求知欲的有力手段。学习知识的反馈，越及时越好。因此，在解析每一个知识点之后，都附有水平反馈练习，以检验学习效果，使读者做到心中有数。

五、开拓知识视野。该丛书的内容，略高于课本知识，选用与课本有关的知识，课堂内外结合，使读者提高兴趣，增长知识，扩大视野。

该丛书在编写时，得到海南省教委的大力支持和关怀，并给以具体指导，在此表示衷心感谢。

在编写过程中，虽经努力，但由于时间和水平所限，难免有不足之处，敬请广大读者和同行不吝赐教。

编者

1994年10月

目　录

第一章　一元二次方程

【问题与解答】

一、怎样解一元二次方程?

从一元二次方程的定义可知:"只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程."任何一个关于 x 的一元二次方程,经过整理,都可以化成 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的形式. 这种形式叫做一元二次方程的一般形式.(当 $a=1$ 时,叫做一元二次方程的标准形式),其中 a 为二次项的系数,b 为一次项的系数,c 为常数项. 这里 a、b、c 可以是数字,也可以是用来表示已知数的字母. 只是 a 不能为零. 因为 a 为零时,方程就不是二次方程了.

另外,我们再作一点补充说明:严格地说,一个整式方程的"元数"和"次数"都是在将这个方程化成最简形式后才能判定. 例如,$2x^2+9=3x+2x^2$ 在形式上是一元二次方程,但这个方程经过化简后,未知数的最高次数不是二次,而是一次. 所以,实际上是一次方程. 又,虽然在教材中避免了二次项系数为零的情况,但在方程的解的讨论中,却是避免不了的. 把一个方程化成一般式是我们判别这个方程是不是一元二次方程的必要步骤.

例　把下面的一元二次方程化成一般式,并写出方程中的二次项系数,一次项系数和常数项.

$$(1-3x)(x+3)=2x^2+1$$

解：经整理得：$-5x^2-8x+2=0$，

$$5x^2+8x-2=0$$

∴此方程的二次项系数是 5，一次项系数是 8，常数项是 -2.

一般地说，如果一般式中二次项系数是负数时，就把方程的两边都乘以 -1，使二次项系数变成正数. 这样，对以后解一元二次方程可以减少错误.

等式的基本性质是解方程的重要依据，这些性质有：

(1) **如果** $a=b$，**那么** $a+c=b+c$

等式两边都加上（或减去）同一个数，所得的结果仍是等式.

(2) **如果** $a=b$，**那么** $ac=bc$

等式的两边都乘以（或除以）同一个数（除数不能是零），所得的结果仍是等式.

为了解无理方程，常需要将方程两边平方这实际上是依据如下性质：

如果 $a=b$，那么 $a^2=b^2$

它的正确性可以根据基本性质证出

∵$a=b$

∴$a^2=ab$，$ab=b^2$（根据性质 2）

∴$a^2=b^2$

其中 a、b、c 都是数.

解一元二次方程的基本思想是设法降次.

解一元二次方程一般采用以下方法.

(1) **因式分解法**

如果一个一元二次方程的一边是零，而另一边能够分解

成两个一次因式的积时，那么分别使两个因式等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程，就得到原一元二次方程的两个根.

例：解方程：$(1-3x)(x+3)=2x^2-1$

解：由原方程得 $5x^2+8x-4=0$，

即 $(5x-2)(x+2)=0$

$\therefore x_1=\frac{2}{5}$，$x_2=-2$ 是原方程的两个根.

(2) **配方法**

对于给定的一元二次方程，将其变形为一边是含有未知数的完全平方式，另一边是非负常数，然后两边开平方（根据方根的定义）求出方程的根.

例 解方程：$2x^2+4x+1=0$

解：由原方程得：$x^2+2x+\frac{1}{2}=0$，

$$(x+1)^2=\frac{1}{2}$$

配方，得 $x^2+2x+1-1+\frac{1}{2}=0$，

两边开方，得 $x+1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$是原方程的根.

(3) **公式法**

直接应用配方法得出的结论，就是公式法.

设方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$.

两边同除以 a 得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，

配成完全平方式：$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

移项，得$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，

两边开方，得$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a}$，

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

在应用求根公式时，应该注意：

(1)求根公式是针对一元二次方程的一般形式来说的，使用求根公式时，必须先把方程化成一般形式，才能更好地掌握各项系数，正确地使用公式；

(2) 有了求根公式，解方程的问题就转化为代数式求值的问题了．只要把 a、b、c 的值代入公式计算即可；

(3) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 有没有根的关键在于 b^2-4ac 的值是正、是负还是等于零．因此应用公式之前最好先计算出 b^2-4ac 的值．这样做一方面是可以简化运算过程，当系数的绝对值较大时更是如此；另一方面它也可以判定方程是否有解．如果没有实数根，就可以不再解这个方程了．

解方程： (1) $2\sqrt{3}x-3x^2=1$.

(2) $3y^2-2\sqrt{6}y+4=0$.

解：(1) 原方程变形为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times 3\times 1=0.$$

∴由求根公式得 $x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{0}}{2\times 3}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

∴$x_1=x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$是原方程的根．

(2) $\because b^2-4ac=(-2\sqrt{6})^2-4\times3\times4$

$=24-48<0$

$\therefore$原方程没有实数根.

另外，对于特殊的一元二次方程，如$ax^2+bx=0$和$ax^2+c=0$(不完全一元二次方程)分别直接应用因式分解法和开平方的方法，解法最简便.

二、一元二次方程根的判别式和根与系数关系的应用

1. 一元二次方程根的判别式

由解一元二次方程的求根公式可知，对于$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$有$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，根的情况完全取决于$b^2-4ac$的符号，因此

将b^2-4ac叫做方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的根的判别式. 记作$\triangle=b^2-4ac$.

(1) 如果$\triangle>0$，那么方程有两个不相等的实数根；

(2) 如果$\triangle=0$，那么方程有两个相等的实数根；

(3) 如果$\triangle<0$，那么方程没有实数根.

这里特别要注意：(1) 根的判别式是指$\triangle=b^2-4ac$，而不是$\triangle=\sqrt{b^2-4ac}$；(2) 如果说一元二次方程有实数根，那么是指有两个不相等的实数根和有两个相等的实数根两种情况，此时$b^2-4ac\geqslant0$不要丢掉等号；(3) 使用一元二次方程的判别式时，应先把方程整理成一般形式，才好确定a、b、c的值.

一元二次方程根的判别式有以下应用

(1) **不解一元二次方程，判别根的性质；**

(2) **根据含字母系数（即参数）的一元二次方程的根的**

性质，确定参数的范围；

（3）研究二次函数的图象及解一元二次不等式.

例 1. 证明方程 $x^2+2ax+a=4$ 总有两个不相等的实数根.

证明：将原方程整理为 $x^2+2ax+a-4=0$.

$$\because \triangle=(2a)^2-4(a-4)$$

$$=4(a^2-a+4)$$

$$=4\left[a^2-a+\left(\frac{1}{2}\right)^2+4-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=4\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right].$$

不论 a 取什么值，总有 $(a-\frac{1}{2})\geqslant 0$，

$$\therefore \left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{4}>0,$$

$$\therefore \triangle=4\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]>0,$$

∴原方程总有两个不相等的实数根.

例 2. 当 m 是什么实数时，方程

$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$：（1）有两个相等的实数根；（2）有两个不相等的实数根；（3）有一个根是零.

解：因为所给的方程要有两个根，所以它是一元二次方程. 因此必须 $m+1\neq 0$，即 $m\neq -1$. 这时，原方程的判别式

$$\triangle=(4m)^2-8(m+1)(3m-2)=-8(m^2+m-2)$$

（1）如果方程有两个相等的实数根，那么

$$-8(m^2+m-2)=0.$$

解这个方程，得 $m=-2$ 或 $m=1$

∴当 $m=-2$ 或 $m=1$ 时，原方程有两个相等的实数根.

（2）如果方程有两个不相等的实数根，那么