中国高等教育学会医学教育专业委员会规划教材

全国高等医学院校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

主编　李　霞　贺东奇　姜　伟

Medical Advanced Mathematics

北京大学医学出版社

中国高等教育学会医学教育专业委员会规划教材
全国高等医学院校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

Medical Advanced Mathematics

主　编　李　霞　贺东奇　姜　伟

副主编　彭继世　何　兰　原　杰

编　者　（按姓名汉语拼音排序）

何　兰（齐齐哈尔医学院）
贺东奇（北京大学医学部）
姜　伟（哈尔滨医科大学）
李　霞（哈尔滨医科大学）
李　林（首都医科大学）
李冬果（首都医科大学）
彭继世（贵阳医学院）
宋运娜（齐齐哈尔医学院）
滕　辉（齐齐哈尔医学院）
王艳秋（哈尔滨医科大学）
夏　蔚（牡丹江医学院）
杨　晶（天津医科大学）
原　杰（哈尔滨医科大学大庆校区）

秘　书　王世缘（哈尔滨医科大学）

北京大学医学出版社

YIYONG GAODENG SHUXUE

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学 / 李霞，贺东奇，姜伟主编.
—北京：北京大学医学出版社，2013. 12

ISBN 978-7-5659-0690-9

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①李… ②贺… ③姜… Ⅲ. ①医用数学 - 高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 268663 号

医用高等数学

主　　编： 李　霞　贺东奇　姜　伟
出版发行： 北京大学医学出版社（电话：010-82802230）
地　　址：（100191）北京市海淀区学院路 38 号　北京大学医学部院内
网　　址： http: //www.pumpress.com.cn
E-mail： booksale@bjmu.edu.cn
印　　刷： 北京东方圣雅印刷有限公司
经　　销： 新华书店
责任编辑： 罗德刚　　**责任校对：** 金彤文　　**责任印制：** 张京生
开　　本： 850mm × 1168mm　1/16　　**印张：** 15.75　　**字数：** 442 千字
版　　次： 2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN　978-7-5659-0690-9
定　　价： 29.00 元

全国高等医学院校临床专业本科教材评审委员会

序

北京大学医学出版社组织编写的全国高等医学院校临床医学专业本科教材（第2套）于2008年出版，共32种，获得了广大医学院校师生的欢迎，并被评为教育部“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。这是在教育部教育改革、提倡教材多元化的精神指导下，我国高等医学教材建设的一个重要成果。为配合《国家中长期教育改革和发展纲要（2010－2020年）》，培养符合时代要求的医学专业人才，并配合教育部“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材建设，北京大学医学出版社于2013年正式启动全国高等医学院校临床医学专业（本科）第3套教材的修订及编写工作。本套教材近六十种，其中新启动教材二十余种。

本套教材的编写以“符合人才培养需求，体现教育改革成果，确保教材质量，形式新颖创新”为指导思想，配合教育部、国家卫生和计划生育委员会在医药卫生体制改革意见中指出的，要逐步建立“5 + 3”（五年医学院校本科教育加三年住院医师规范化培训）为主体的临床医学人才培养体系。我们广泛收集了对上版教材的反馈意见。同时，在教材编写过程中，我们将与更多的院校合作，尤其是新启动的二十余种教材，吸收了更多富有一线教学经验的老师参加编写，为本套教材注入了新鲜的活力。

新版教材在继承和发扬原教材结构优点的基础上，修改不足之处，从而更加层次分明、逻辑性强、结构严谨、文字简洁流畅。除了内容新颖、严谨以外，在版式、印刷和装帧方面，我们做了一些新的尝试，力求做到既有启发性又引起学生的兴趣，使本套教材的内容和形式再次跃上一个新的台阶。为此，我们还建立了数字化平台，在这个平台上，为适应我国数字化教学、为教材立体化建设作出尝试。

在编写第3套教材时，一些曾担任第2套教材的主编由于年事已高，此次不再担任主编，但他们对改版工作提出了很多宝贵的意见。前两套教材的作者为本套教材的日臻完善打下了坚实的基础。对他们所作出的贡献，我们表示衷心的感谢。

尽管本套教材的编者都是多年工作在教学第一线的教师，但基于现有的水平，书中难免存在不当之处，欢迎广大师生和读者批评指正。

王德炳　柯杨

2013年11月

前　　言

生物医学的飞速发展使得相关的数据产生了爆炸性增长，目前，无论是基础医学、临床医学、药学还是预防医学等领域都迫切需要利用数学的方法来进行研究，这也要求我们的医学人才应当具备更高的数学素养。为了适应这种发展需求，北京大学医学出版社组织全国八所高校的一线教师和学者共同编写了这本《医用高等数学》教材。

本书共分九章，主要包括：一元微积分、多元微积分、常微分方程基础、线性代数基础与概率论基础，可作为高等医学院校中各专业的高等数学教材使用，也可供医学研究人员学习和参考。本书在总结编者多年来的教学经验和教学成果的基础上，注重基础知识和医学实例的紧密结合，通过大量的具体医学问题，使学生能够将相对枯燥的数学理论融入到医学应用中去。此外，本书在每章中还提供了知识扩展与知识链接，这不仅有助于扩大学生的数学知识面，同时也有利于提高其学习数学的兴趣。最后，本书在第九章中介绍了计算机软件 MATLAB 的基本操作以及前面各章典型例题的求解，以期使学生掌握一种工具，能够更加方便地实现一些数学方法并应用到实际问题中。这些都体现了本书的科学性、系统性、实用性和先进性的特点。

本书可满足 48~70 学时的医用高等数学课程的教学需要。针对不同医学院校、不同专业的具体情况，教师可适当删减学习内容以适应教学目标的要求。由于本书增加了计算机软件 MATLAB 的内容，建议在讲授该课程时应适当安排学生的上机实验。

本书在编写过程中，得到了哈尔滨医科大学、北京大学医学部等八所高校的大力支持，在此表示衷心的感谢。

尽管本书作者多年来一直从事医用高等数学的教学与研究，但是限于水平和时间，本书难免存在不当和错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2013 年 10 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

案例	糖尿病患者每隔时间 τ 注射一次胰岛素，剂量为 D_0。第 n 次注射后到第 $n+1$ 次注射前的时间里，体内胰岛素含量与时间 t 的关系为 $$D_n(t)=\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}D_0e^{-kt}\quad(k>0\text{ 为常数})$$ 问题：糖尿病患者体内最终的胰岛素含量 $D(t)$ 与时间 t 的关系式是什么?

函数是高等数学中最基本的研究对象，它刻画的是变量之间的关系。极限刻画的是变量的变化趋势，是深入研究函数的重要方法。用极限方法研究函数是高等数学与初等数学的本质区别。函数与极限的初步知识在中学已经学过，这里仅作必要的复习和补充。本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念、性质及计算。

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某一研究过程中保持不变的量称为**常量**(constant)。在某一研究过程中可以改变的量称为**变量**(variable)。常量通常用字母 a、b、c 表示，变量通常用字母 x、y、z 表示。

一个量是常量还是变量不是绝对的，而是相对的。例如，儿童服药的剂量决定于儿童的体重。如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量。若治疗时间长达数年，其体重就是一个变量。常量可以看作特殊的变量。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。邻域也是常用的一种区间概念。设 x_0 是一定点，δ 是任一正数，则称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**(neighbourhood)，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}。$$

点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $U^{\circ}(x_0,\delta)$，即

$$U^{\circ}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}。$$

2. 函数的概念

定义 1-1　设在同一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 所能取的每一个值，按照一定的对应关系，变量 y 总有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function)，记为 $y=f(x)$。变量 x 称为**自变量**(independent variable)，变量 y 称为**因变量**(dependent variable)。

自变量 x 的所有可以取值的集合，称为函数的**定义域**(domain)，记为 D。因变量 y 的所有对应值的集合，称为函数的**值域**(range)，记为 R。

函数的表示法通常有三种：解析法、列表法和图像法。

例 1-1 在自由落体运动中，设物体下落的高度为 h，物体运动路程 s 和下落的时间 t 之间的函数为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，g 为重力加速度，求函数 s 的定义域。

解 只从解析式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 看，t 可以取全体实数。但考虑到实际意义，应有 $t\geqslant0$ 且 $0\leqslant s\leqslant h$，当 $s=h$ 时，$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，故函数 s 的定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$。

例 1-2 在恒温条件下，每克蛋白质的药物吸收量 y 与血浆浓度 x 的关系，如表 1-1 所示。

表 1-1 药物吸收量与血浆浓度的函数关系

血浆浓度 x	12.7	21.2	51.7	77.2	212.4	9.5	22.5	42.3	67.8	234.8
药物吸收量 y	0.103	0.466	0.767	1.573	2.462	0.083	0.399	0.899	1.735	2.260

例 1-3 心电图描述了电流活动随时间的变化情况，是时间的函数。虽然可以拟合一个心电图函数的近似公式，但是必要性不大。医生只需要根据心电图的图形诊断更方便，所以这个函数用图像法表示更合适。图 1-1 和图 1-2 分别为正常人和心脏病患者的心电图。

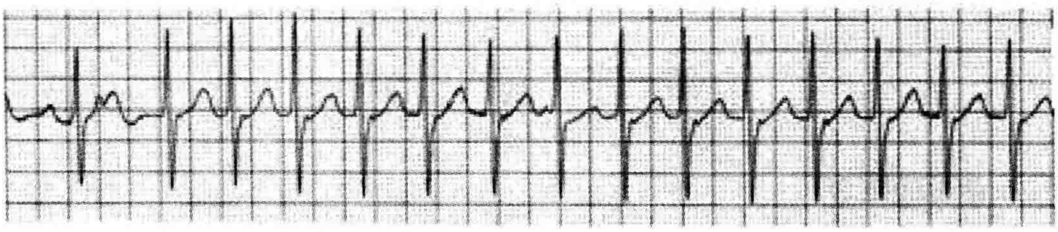

图 1-1 正常人的心电图

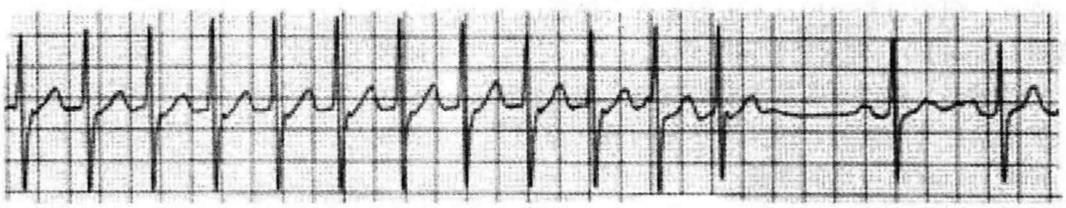

图 1-2 心脏病患者的心电图

二、函数的特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(monotone function)。

2. 函数的奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 定义域 D 内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**(even function)。如果对于函数 $f(x)$ 定义域 D 内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function)。

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。如果存在一个正数 T，使得对每一个 $x\in D$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)。正数 T 称为这个函数的周期。满足此关系式的最小正数称为函数的最小正周期，通常所说的周期是指最小正周期。

许多生物节律近似地以 12 小时或 24 小时为周期。心电图曲线也可看作周期函数。

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $X\subseteq D$。如果存在正数 M，使得对一切 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**(bounded)。如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**(unbounded)。

例如，函数 $y=\cos x$ 在 R 上有界。函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界。函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界,在 $(1,+\infty)$ 上有界。

三、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**(basic elementary function)。

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

（2）指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$；

（3）对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；

（4）三角函数：$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$。

$y=\sin x$、$y=\cos x$ 和 $y=\tan x$ 的图像和性质在中学都系统学过，下面简要介绍另外三个三角函数。

1）余切函数：$y=\cot x=\frac{1}{\tan x}$。定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in Z$，值域为 R。它是奇函数，周期函数，周期为 π（图 1-3）。

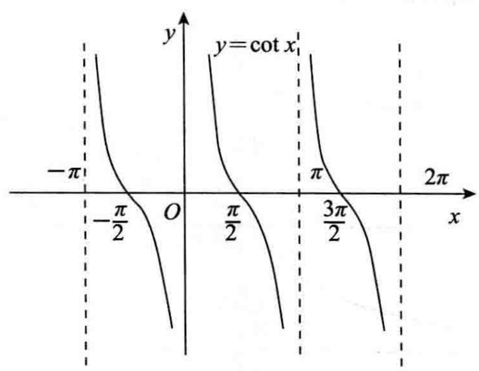

图 1-3

2）正割函数：$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$。定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，值域为 $|y|\geqslant 1$。它是偶函数，周期函数，周期为 2π。

3）余割函数：$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$。定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in Z$，值域为 $|y|\geqslant 1$。它是奇函数，周期函数，周期为 2π。

根据这些三角函数的定义，还可以得到以下常用三角函数关系式：

$\tan x\cot x=1$，$\sin x\csc x=1$，$\cos x\sec x=1$，

$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，$\sec^2 x=1+\tan^2 x$，$\csc^2 x=1+\cot^2 x$。

（5）反三角函数：$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$ 和 $y=\text{arccot}\, x$ 等。

1）反正弦函数：正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$。$y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。它在定义域上是单调增

加的，奇函数（图 1-4）。

2）反余弦函数：余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$。$y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$。它在定义域上是单调减少的，非奇非偶函数（图 1-5）。

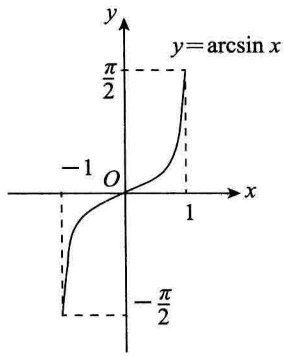

图 1-4

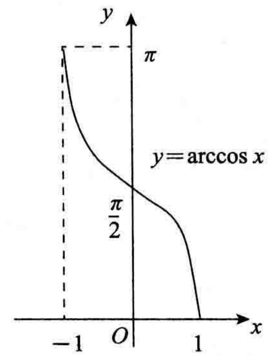

图 1-5

3）反正切函数：正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$。$y=\arctan x$ 的定义域为 R，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。它在定义域上是单调递增的，奇函数（图 1-6）。

4）反余切函数：余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数，称为反余切函数，记作 $y=\mathrm{arccot}\, x$。$y=\mathrm{arccot}\, x$ 的定义域为 R，值域为 $(0,\pi)$。它在定义域上是单调递减的，非奇非偶函数（图 1-7）。

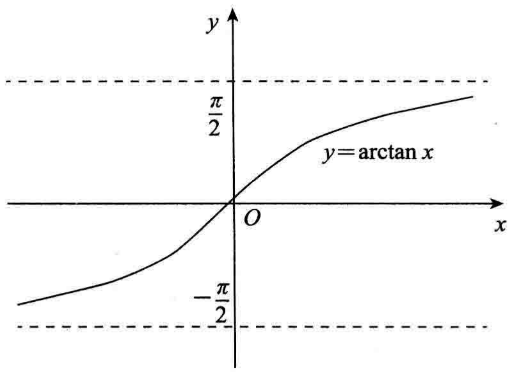

图 1-6

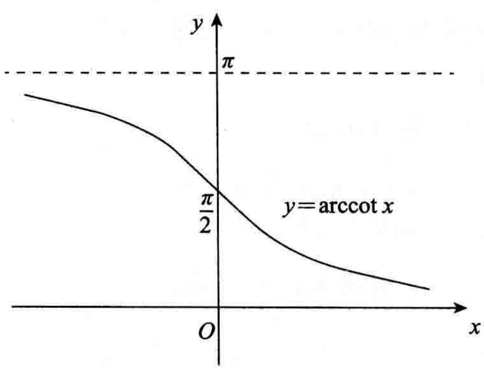

图 1-7

2. 复合函数

定义 1-2 若变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 是变量 x 的函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x)。$$

当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的子集上取值时，所对应的 u 值使函数 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**(compound function)，记作 $y=f[\varphi(x)]$。其中，称 u 为中间变量，x 为自变量，y 为因变量。

并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 不能复合成一个函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$，它们的交集为空集。

复合函数的定义可以推广到多个函数的情形。例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 可以复合成

函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，其中 u 和 v 都是中间变量。

把一个复合函数分解成若干个简单函数，对下一章学习导数和微分的运算非常重要。所谓简单函数，是指由常数和基本初等函数经过四则运算所构成的函数。

例 1－4　将下列复合函数分解为简单函数。

(1) $y=e^{\arctan 3x}$；　(2) $y=\sin^2(2x+3)$；　(3) $y=\ln(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$。

解 (1) $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=3x$；

(2) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+3$；

(3) $y=\ln u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+w^2$，$w=\cos x$。

3. 初等函数

定义 1－3　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**(elementary function)。例如，

$$y=\sqrt{1+2x-x^2}、y=\ln^2 x+\cos x、y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

都是初等函数。本课程中讨论的函数绝大多数都是初等函数。

四、分段函数

在生物学、医学和工程技术中，经常会遇到一类函数，这类函数在自变量的不同变化范围中，对应关系用不同式子表示，这样的函数称为**分段函数**(piecewise function)。求分段函数的函数值时要注意根据自变量的值选择相应的解析式。

例 1－5　某药物的每天服用剂量 y（克）与服药者的年龄 x（岁）之间的函数关系如下：

$$y=\begin{cases}0.125x, & 0<x<16,\\ 2, & x\geqslant 16,\end{cases}$$

求 4 岁、12 岁和 20 岁的患者每天服药剂量。

解　将 $x=4$、$x=12$ 和 $x=20$ 分别代入相应的解析式，可得 4 岁、12 岁和 20 岁的患者每天服药剂量分别为 0.5 克、1.5 克和 2 克。

例 1－6　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$。例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-1.5]=-2$。函数 $y=[x]$ 称为取整函数，它的定义域为 R，是一个分段函数。它的图形是阶梯状的，称为阶梯曲线（图 1－8）。

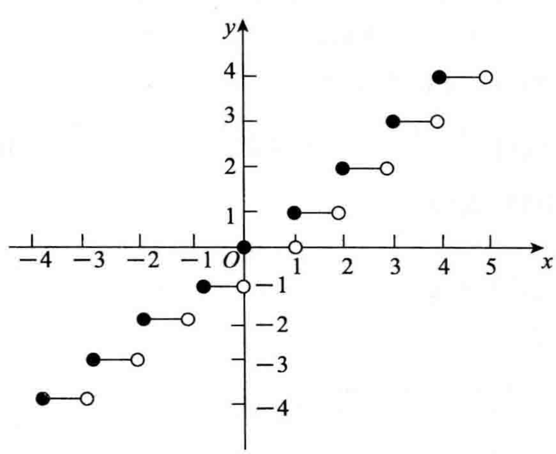

图 1－8　阶梯曲线

知识链接

几种特殊的分段函数

(1) 符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0。\end{cases}$

(2) 狄利克雷 (Dirichlet) 函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\ 0, x\text{ 为无理数}。\end{cases}$

(3) 黎曼 (Riemann) 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\right),\\ 0,\ x=0,1\text{ 及}(0,1)\text{ 内的无理数}。\end{cases}$$

第二节 极　　限

函数 $y=f(x)$ 描述的是变量 x 和 y 之间的静态关系。而当自变量 x 不断变化时，因变量 y 相应的变化趋势如何，反映的是 y 和 x 之间的动态关系，这正是极限描述的问题。极限方法是高等数学的重要方法，是学习微积分知识必备的基础。

一、极限的概念

1. 数列的极限

如果按照某一法则，对于每一个 $n\in N^*$，对应着一个确定的常数 x_n，按 n 从小到大排列得到的一列实数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**(sequence of number)，简记为 $\{x_n\}$。

定义 1-4 如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**(limit)，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\text{ 或 }x_n\to A(\text{当 }n\to\infty)。$$

如果不存在这样的常数 A，则称该数列 $\{x_n\}$ 发散，习惯上说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。

例如，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为 1，数列 $\{2^n\}$ 的极限不存在。当 $n\to\infty$ 时，2^n 是无限增大的，可以写成 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$。

例 1-7 见章前案例。

解 依题意，参数 $\tau>0$ 为常数，$0\leqslant t\leqslant\tau$，当 $n\to\infty$ 时，$e^{-kn\tau}\to 0$，于是这位患者体内最终的胰岛素含量与时间的关系式为

$$D(t)=\lim_{n\to\infty}D_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}D_0e^{-kt}=D_0\frac{e^{-kt}}{1-e^{-k\tau}}。$$

知识链接

割圆术 战国时期庄子在《天下篇》中引用过惠施的一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"也就是说一根长为一尺的木棒，每天截去一半，这样的过程可以无限制地进行下去。这就是我国古代极限思想的萌芽。

到了魏晋时期（公元前3世纪），我国古代数学家刘徽创立了著名的"割圆术"。割圆术的具体方法：首先，作一圆的内接正六边形，它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，面积记为 A_2；循此下去，每次边数加倍，A_n 则表示内接正 3×2^n 边形的面积。这样就得到一数列：

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

当 n 越大，内接正 n 边形的面积与圆的面积就越接近。当 n 无限增大时，A_n 无限接近于一个确定的数值，这个确定的数值就是圆的面积。

正如刘徽所说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。"

2. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1-5 当自变量 x 的绝对值无限增大时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty)。$$

在定义 1-5 中，自变量 x 的绝对值无限增大是指 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形。但有时只考虑其中一种情形。例如，当 $x\to+\infty$ 时，$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$，当 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$。

容易理解，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

3. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1-6 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 x 以任意方式无限趋近于点 x_0 时，函数 $f(x)$ 都无限趋近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0)。$$

由定义 1-6 知，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关。

例 1-8 讨论函数 $f(x)=x+1$，当 $x\to 1$ 时的极限。

解 因为当 $x\to 1$ 时，$x+1\to 2$，所以

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2。$$

在定义 1-6 中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的，也就是 x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋近于 x_0。但有时只能或只需考虑 x 从一侧趋近于 x_0 的情形。

当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(left limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A。$$

类似地，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**(right limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A。$$

左极限和右极限统称为单侧极限。容易证明，函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限和右极限都存在且相等。即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\text{。}$$

例 1-9　验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

证　函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

即左极限和右极限都存在，但是不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

知识拓展

• **数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义**　设 $\{x_n\}$ 是一数列，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在某一正整数 N，使得 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，那么称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(当\ n\to\infty)\text{。}$$

• **函数极限的 $\varepsilon-X$ 定义**　如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在某一正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty)\text{。}$$

• **函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义**　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在某一正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0)\text{。}$$

二、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量的概念

定义 1-7　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称**无穷小**(infinitesimal)。

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小。而 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 2$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小。由此可见，一个变量是否为无穷小量与自变量的变化过程有关。

注意：①无穷小量是某一变化过程中的变量，不要把无穷小量与很小的数混淆。②零是可

以作为无穷小量的唯一的常数。

2. 无穷小量定理

定理 1-1　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是同一变化过程中的无穷小。

定理 1-1 也可表示为 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(\lim\alpha=0)$。

在上式中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，实际上对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的。以后遇到类似情况，极限符号下面的自变量变化过程也可省略。

定理 1-2　同一变化过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小。

定理 1-3　有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小。

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小。

3. 无穷大量

定义 1-8　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大量，简称**无穷大**(infinity)。

例如，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 为无穷大量。当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 也为无穷大量。

注意：无穷大量是变量，不能与很大的数混淆。

当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 为无穷大量，为了方便可以简记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty)。$$

但是按函数极限的定义来说，此时极限是不存在的。

定理 1-4　在同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

定理 1-4 说明无穷大与无穷小的倒数关系，因此关于无穷大的讨论，都可以归结为关于无穷小的讨论。

4. 无穷小的比较

在自变量的同一变化过程中，两个无穷小趋近于零的“快慢”程度可能不同。下面我们就两个无穷小之比的极限来说明无穷小之间的比较。

定义 1-9　设 α、β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，且 $\beta\neq 0$，则在这个变化过程中，

(1) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$。

(2) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小。

(3) 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小。特别地，当 $C=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$。

定理 1-5（无穷小替换定理）　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}。$$

定理 1-5 表明，求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来替换。如果用来替换的无穷小选择适当，可以使极限运算简化。

三、极限的四则运算

定理 1-6 在自变量的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) 如果 $B\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$。

推论 1 如果 $\lim f(x)$ 存在，C 为常数，则 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$。

推论 2 如果 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$。

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5}{x-3}$。

解 这里分母的极限不为零，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}5}{\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+5}{1-3}=\frac{1^2+5}{1-3}=-3。$$

例 1-11 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$。

解 当 $x\to 1$ 时，分子、分母的极限都是零，可将分子、分母因式分解后，约去无穷小因子 $x-1$，然后再求极限，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2。$$

例 1-12 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$。

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0$，但是 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0。$$

由无穷大与无穷小的关系，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty。$$

例 1-13 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^3-x^2+1}$。

解 当 $x\to\infty$ 时，分子和分母都为无穷大量，所以先用 x^3 去除分子和分母，可分出无穷小，再求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x-1}{2x^3-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{3}{2}。$$

一般地，当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & \text{当 } m<n \text{ 时},\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } m>n \text{ 时}。\end{cases} \tag{1-1}$$

例 1-14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$。

解 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 为有界函数。由定理 1-3 有