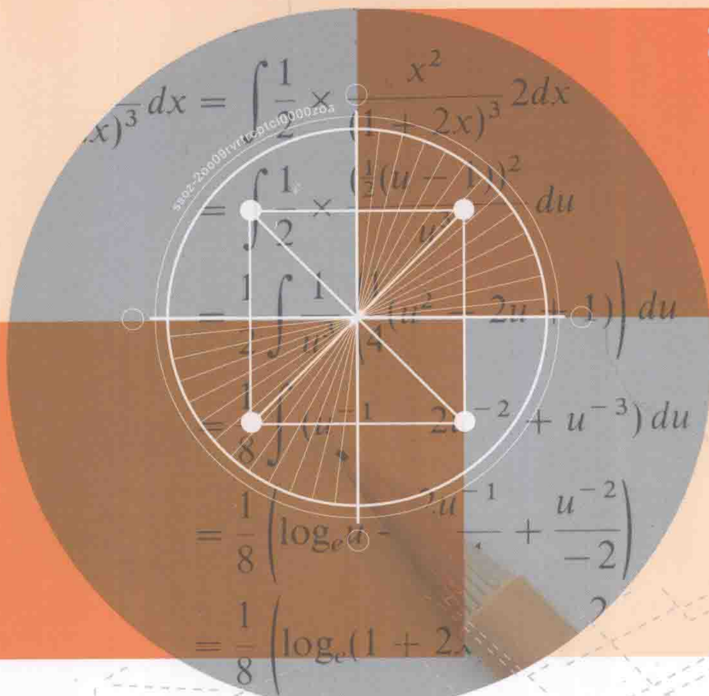
21世纪高等院校规划教材

高等数学

（下册）

主　编　何春江
副主编　牛　莉　张钦礼



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等数学

（下册）

21世纪高等院校规划教材

高 等 数 学

（下册）

主　编　何春江

副主编　牛　莉　张钦礼

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是依据教育部最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合应用型高等院校工科类各专业学生对学习高等数学的需要编写的。

本书分上、下两册，内容覆盖工科类本科各专业对高等数学的需求。上册（第1～7章）内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程；下册（第8～12章）内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数。本书强调理论联系实际，结构简练、合理，每章都给出学习目标、学习重点，还安排了大量的例题和习题；每章都有本章小结、复习题和自测题；书末还附有积分表与习题参考答案。

本书适合高等院校工科类本科各专业的学生学习使用，也适合高校教师和科技工作者使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 何春江主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.9
21世纪高等院校规划教材
ISBN 978-7-5170-3594-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①何… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第208909号

策划编辑：雷顺加　责任编辑：宋俊娥　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李　佳

书　　名	21世纪高等院校规划教材 高等数学（下册）
作　　者	主　编　何春江 副主编　牛　莉　张钦礼
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　15印张　302千字
版　　次	2015年9月第1版　2015年9月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	26.00元

前　　言

我国高等教育正在快速发展，教材建设也要与之适应，特别是教育部关于“高等教育面向21世纪内容与课程改革”计划的实施，对教材建设提出了新的要求。本书的编写目的就是为了适应高等教育的快速发展，满足教学改革和课程建设的需求，体现工科类教育教学的特点。

本书是编者依据教育部颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，根据多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神编写的。全书贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则，精心选择了教材的内容，从实际应用的需要（实例）出发，加强数学思想和数学概念与工程实际结合的特点，淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明，每章都有学习目标、小结、复习题、自测题等，便于学生总结学习内容和学习方法，巩固所学知识。

本书分上、下两册出版，内容覆盖工科类本科各专业对高等数学的需求。上册（第1～7章）内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程；下册（第8～12章）内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数。书后附有积分表与习题参考答案。

本书可作为高等院校工科类本科高等数学的教材。本书若讲授全部内容，参考学时为160学时；若只讲授基本内容，参考学时为130学时，打*号的为相关专业选用的内容。

根据我国高等教育从精英教育向大众化教育转变以及现代化教育技术手段在教学中广泛应用的现状，我们对这套教材进行了立体化设计，除了提供电子教案，将尽快推出与教材配套的典型例题分析与习题解答。希望能更好地满足高校教师课堂教学和学生自主学习及考研的需要，对教和学起到良好的作用。

本书由何春江主编，牛莉、张钦礼担任副主编。各章编写分工为：张翠莲编写附录1；何春江编写第8章；张钦礼编写第9章、第10章；牛莉编写第11章、第12章。本书框架结构、编写大纲及最终审稿定稿由何春江完成。参加本书编写及大纲讨论工作的还有郭照庄、曾大有、岳雅璠、毕亚军、邓凤茹、张京轩、赵艳、毕晓华、江志超、张静、孙月芳、陈博海、聂铭伟、戴江涛、霍东升等。

在本书的编写过程中，编者参考了很多相关的书籍和资料，采用了一些相关内容，汲取了很多同仁的宝贵经验，在此谨表谢意。

由于时间仓促及作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2015 年 7 月

目　　录

前言
第 8 章　空间解析几何与向量代数 …… 1
本章学习目标 …… 1
8.1　空间直角坐标系与向量的概念 …… 1
8.1.1　空间直角坐标系 …… 1
8.1.2　向量的概念及其线性运算 …… 4
8.1.3　向量的坐标表示 …… 6
习题 8.1 …… 9
8.2　向量的数量积与向量积 …… 9
8.2.1　向量的数量积 …… 9
8.2.2　两向量的向量积 …… 11
习题 8.2 …… 13
8.3　平面及其方程 …… 13
8.3.1　平面的点法式方程 …… 13
8.3.2　平面的一般式方程 …… 15
8.3.3　平面的截距式方程 …… 17
习题 8.3 …… 18
8.4　空间直线及其方程 …… 18
8.4.1　直线的一般式方程 …… 18
8.4.2　直线的点向式方程与参数方程 …… 18
8.4.3　平面、直线的位置关系 …… 21
8.4.4　综合举例 …… 23
习题 8.4 …… 24
8.5　曲面及其方程 …… 25
8.5.1　曲面方程的概念 …… 25
8.5.2　球面 …… 25
8.5.3　柱面 …… 26
8.5.4　旋转曲面 …… 28
8.5.5　几种常见的二次曲面 …… 29
习题 8.5 …… 34
8.6　空间曲线 …… 35
8.6.1　空间曲线的一般方程 …… 35

8.6.2 空间曲线的参数方程 ······ 35
8.6.3 空间曲线在坐标面上的投影 ······ 37
习题 8.6 ······ 38
本章小结 ······ 38
复习题 8 ······ 38
自测题 8 ······ 39
第 9 章 多元函数微分学及其应用 ······ 41
本章学习目标 ······ 41
9.1 多元函数的概念、极限及连续 ······ 41
9.1.1 平面点集及区域 ······ 41
9.1.2 多元函数的概念 ······ 42
9.1.3 多元函数的极限 ······ 44
9.1.4 多元函数的连续 ······ 45
习题 9.1 ······ 47
9.2 偏导数 ······ 47
9.2.1 偏导数的概念及其计算方法 ······ 48
9.2.2 高阶偏导数 ······ 50
习题 9.2 ······ 52
9.3 全微分 ······ 52
习题 9.3 ······ 54
9.4 多元复合函数求导法则 ······ 54
习题 9.4 ······ 58
9.5 隐函数的求导公式 ······ 58
9.5.1 一元隐函数的求导公式 ······ 58
9.5.2 二元隐函数的求导公式 ······ 59
习题 9.5 ······ 59
9.6 多元函数微分学在几何上的应用 ······ 60
9.6.1 空间曲线的切线与法平面 ······ 60
9.6.2 曲面的切平面与法线 ······ 63
习题 9.6 ······ 65
9.7 多元函数的极值与最值 ······ 65
9.7.1 多元函数的极值 ······ 65
9.7.2 多元函数的最值 ······ 67
9.7.3 条件极值 拉格朗日乘数法 ······ 69
习题 9.7 ······ 71
本章小结 ······ 72
复习题 9 ······ 72

自测题 9 ······73
第 10 章　重积分 ······74
本章学习目标······74
10.1　二重积分的概念与性质 ······74
10.1.1　二重积分的概念 ······74
10.1.2　二重积分的性质 ······78
习题 10.1 ······79
10.2　二重积分的计算 ······80
10.2.1　直角坐标系下二重积分的计算 ······80
10.2.2　二重积分在极坐标系下的计算 ······86
习题 10.2 ······89
10.3　三重积分 ······91
10.3.1　引例 ······91
10.3.2　三重积分的概念 ······91
10.3.3　三重积分的计算 ······92
习题 10.3 ······98
10.4　重积分的应用 ······99
10.4.1　立体的体积 ······99
10.4.2　曲面的面积 ······101
10.4.3　质心 ······102
10.4.4　转动惯量 ······103
习题 10.4 ······104
本章小结······104
复习题 10 ······105
自测题 10 ······105
第 11 章　曲线积分与曲面积分 ······107
本章学习目标······107
11.1　对弧长的曲线积分 ······107
11.1.1　对弧长的曲线积分的概念与性质 ······107
11.1.2　对弧长的曲线积分的计算法 ······109
习题 11.1 ······112
11.2　对坐标的曲线积分 ······113
11.2.1　对坐标的曲线积分的概念与性质 ······113
11.2.2　对坐标的曲线积分的计算法 ······116
11.2.3　两类曲线积分之间的联系 ······119
习题 11.2 ······120
11.3　格林公式及其应用 ······121

11.3.1 格林公式 …… 121
11.3.2 平面曲线积分与路径无关的定义与条件 …… 127
习题 11.3 …… 133
*11.4 对面积的曲面积分 …… 135
11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质 …… 135
11.4.2 对面积的曲面积分的计算法 …… 136
习题 11.4 …… 139
*11.5 对坐标的曲面积分 …… 139
11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质 …… 139
11.5.2 对坐标的曲面积分的计算法 …… 144
11.5.3 两类曲面积分之间的联系 …… 146
习题 11.5 …… 148
*11.6 高斯公式 …… 148
11.6.1 高斯公式 …… 148
11.6.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 …… 150
习题 11.6 …… 151
*11.7 斯托克斯公式 …… 152
11.7.1 斯托克斯公式 …… 152
11.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件 …… 154
习题 11.7 …… 155
本章小结 …… 156
复习题 11 …… 157
自测题 11 …… 158
第 12 章 级数 …… 160
本章学习目标 …… 160
12.1 常数项级数的概念与性质 …… 160
12.1.1 常数项级数的概念 …… 160
12.1.2 常数项级数的性质 …… 162
习题 12.1 …… 164
12.2 常数项级数的敛散性 …… 165
12.2.1 正项级数及其审敛法 …… 165
12.2.2 交错级数及其审敛法 …… 170
12.2.3 绝对收敛与条件收敛 …… 170
习题 12.2 …… 172
12.3 幂级数 …… 173
12.3.1 函数项级数的概念 …… 173
12.3.2 幂级数及其收敛性 …… 174

12.3.3 幂级数的运算 ······ 177
习题 12.3 ······ 179
12.4 函数展开成幂级数 ······ 180
12.4.1 泰勒级数 ······ 180
12.4.2 函数展开成幂级数 ······ 182
习题 12.4 ······ 186
*12.5 傅里叶级数 ······ 186
12.5.1 三角级数 ······ 187
12.5.2 函数展开成傅里叶级数 ······ 187
12.5.3 正弦级数与余弦级数 ······ 192
12.5.4 周期为 $2l$ 的周期函数展开成傅里叶级数 ······ 197
习题 12.5 ······ 199
本章小结 ······ 200
复习题 12 ······ 202
自测题 12 ······ 204
附录 1 积分表 ······ 207
附录 2 习题参考答案 ······ 215
参考文献 ······ 230

第 8 章　空间解析几何与向量代数

本章学习目标

- 了解空间直角坐标系、空间点的直角坐标
- 掌握向量的概念和运算，了解向量的模和方向余弦的坐标表示
- 掌握平面方程与空间直线方程及其求法，了解它们之间的位置关系
- 了解常用的二次曲面的标准方程及其图形，了解以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程
- 了解空间曲线的参数方程和一般方程及在坐标面上的投影

8.1　空间直角坐标系与向量的概念

8.1.1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在空间任取一点 O，过 O 点作三条两两互相垂直且具有相同长度单位的数轴，分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴；点 O 称为坐标原点；任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，即 xOy，yOz 和 zOx 坐标面.

在画空间直角坐标系时，习惯上常把 x 轴、y 轴置于水平面上，而 z 轴置于铅垂线上，各坐标轴正向及顺序符合右手法则，即用右手握住 z 轴，且拇指指向 z 轴的正向，则其余四指从 x 轴正向以 90°转向 y 轴正向（如图 8.1 所示）.

三个坐标平面将整个空间分成八个部分，称为八个卦限．它们的顺序规定如图 8.2 所示.

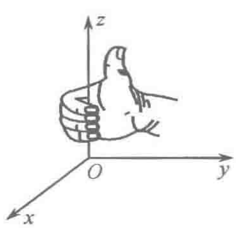


图 8.1

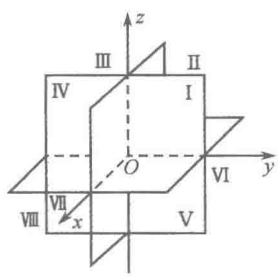


图 8.2

建立了空间直角坐标系，我们来建立空间的点和三元有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间一个定点，过点 M 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂线，垂足依次为 P,Q,R（如图 8.3 所示），这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z．则空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)．反之，设给定一个有序数组 (x,y,z)，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R，过 P,Q,R 三点，分别作平面垂直于所在坐标轴，这三个平面的交点就是有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的一点 M. 这样，空间一点就与一组有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系．有序数组 x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

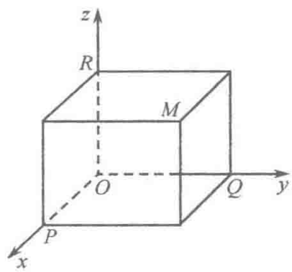


图 8.3

显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，坐标轴上的点至少有两个坐标为 0，例如，若点 M 在 x 轴上，则 $y=0$，$z=0$；若在 y 轴上，则 $x=0$，$z=0$；若在 z 轴上，则 $x=0$，$y=0$. 坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如，若 M 在 xOy 面上，则 $z=0$；在 yOz 面上，则 $x=0$；在 zOx 面上，则 $y=0$.

在各卦限中点的坐标情况如下（坐标面是卦限的界面，不算在卦限内）：

卦限	点的坐标 (x, y, z)	卦限	点的坐标 (x, y, z)
Ⅰ	$x>0,\ y>0,\ z>0$	Ⅴ	$x>0,\ y>0,\ z<0$
Ⅱ	$x<0,\ y>0,\ z>0$	Ⅵ	$x<0,\ y>0,\ z<0$
Ⅲ	$x<0,\ y<0,\ z>0$	Ⅶ	$x<0,\ y<0,\ z<0$
Ⅳ	$x>0,\ y<0,\ z>0$	Ⅷ	$x>0,\ y<0,\ z<0$

2. 空间两点间的距离

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$．过点 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 8.4 所示）．显然

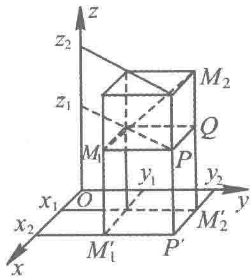


图 8.4

$$
\begin{aligned}
d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 \quad (\triangle M_1QM_2 \text{ 是直角三角形}) \\
&= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 \quad (\triangle M_1PQ \text{ 是直角三角形}) \\
&= |M_1'P'|^2 + |P'M_2'|^2 + |QM_2|^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .
\end{aligned}
$$

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \tag{8.1.1}$$

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \tag{8.1.2}$$

例 1 已知两点 $A(3,2,5)$ 与 $B(-1,-3,6)$，在 x 轴上求一点 M，使 $|AM| = |BM|$.

解 因为 M 在 x 轴上，所以设 M 点的坐标为 $(x,0,0)$．由公式（8.1.1）得

$$|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 38} ,$$

$$|BM| = \sqrt{(x+1)^2 + (0+3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 46} .$$

由题设 $|AM| = |BM|$，于是得

$$\sqrt{x^2 - 6x + 38} = \sqrt{x^2 + 2x + 46} ,$$

解得 $x = -1$．所求点为 $M(-1,0,0)$．

例 2 证明以 $A(10,-1,6)$， $B(4,1,9)$， $C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为

$$|AB| = \sqrt{(4-10)^2 + (1+1)^2 + (9-6)^2} = 7 ,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2} ,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7 ,$$

所以三角形 ABC 为等腰三角形.

8.1.2 向量的概念及其线性运算

1. 向量的概念

在现实生活中遇到过两种量：一种是只有大小的量，称为数量（或标量），例如，时间、温度、质量、体重等；另一种是既有大小又有方向的量称为向量（或矢量），例如，力、位移、速度、加速度等. 向量一般用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示，在几何上，向量用有向线段表示，起点为 A，终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$（如图 8.5 所示）.

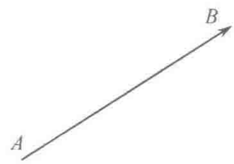


图 8.5

向量的大小（有向线段的长度）称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$（或 $|\overrightarrow{AB}|$）；模为 1 的向量称为单位向量；与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$；模为 0 的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，其方向任意.

在数学上一般只关心向量的大小和方向，不关心其位置. 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称这两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

即经平行移动后，两向量完全重合. 这种允许平行移动的向量称为自由向量. 本书所讨论的向量均为自由向量.

2. 向量的线性运算

（1）向量的加法

定义 1 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相连，并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 8.6），称为向量加法的平行四边形法则.

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移至与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，从向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点至向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量（见图 8.7），称为向量加法的三角形法则. 此法则也适用于两向量平行的情形（平行四边形法则失效），并便于推广到有限个向量的加法.

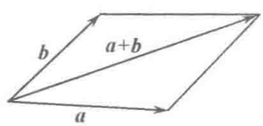


图 8.6

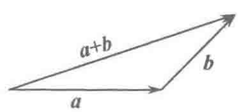


图 8.7

例如，求四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的和，从图 8.8 中可以看出，只需把这四个向量首

尾相连，则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是这四个向量的和向量，这种加法又称为多边形加法或折线法.

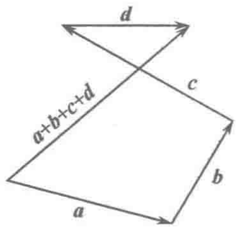


图 8.8

（2）数与向量的乘积（数乘向量）

定义 2 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且

1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：

$$\begin{cases}\text{当}\lambda>0\text{时，与}\boldsymbol{a}\text{同向，}\\ \text{当}\lambda<0\text{时，与}\boldsymbol{a}\text{反向.}\end{cases}$$

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

如果存在一个常数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$），则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行（或共线），记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反，称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（见图 8.9）.

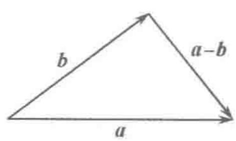


图 8.9

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

向量的线性运算满足下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

（3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

（4）$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

（5）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（6）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

（7）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（8）$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

8.1.3 向量的坐标表示

1．向径及其坐标表示

径在空间直角坐标系中，起点在原点 O，终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，称为点 P 的向径．记为 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{OP}$（见图 8.10）.

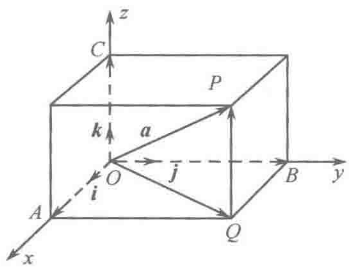


图 8.10

沿 x 轴、y 轴、z 轴正向分别取单位向量，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O，终点为 $P(x,y,z)$．过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $P(x,y,z)$ 分别作垂直于三条坐标轴的平面，设垂足依次为 A,B,C（见图 8.10），则点 A 在 x 轴上的坐标为 x，根据数与向量的乘法，有 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，同理 $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，于是，由向量的加法，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称上式为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$．其中 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

2．向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式

设两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，由图 8.11 可知，以 M_1 为起点，M_2 为终点的向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称上式为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式.

数组(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

或称 a_x,a_y,a_z 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴上的投影.