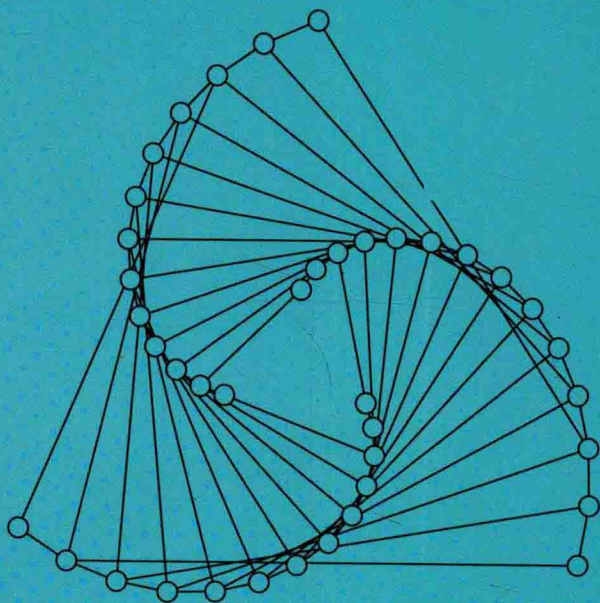


数学建模竞赛

优秀论文选评

SHUXUE JIANMO JINGSAI
YOUXIU LUNWEN XUANPING

李海燕 主编



科学出版社

数学建模竞赛优秀论文选评

李海燕 主编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书精选了2010~2014年全国大学生数学建模竞赛A、B题中的9篇论文,这些论文也是从云南大学近5年100多支参赛队伍中精选出来且获得国家一、二等奖的作品。选用论文具有鲜明的特点,如模型新颖、解题思路符合出题者意图、仿真方法巧妙等。本书知识点涵盖高等数学、概率论与数理统计、运筹学、图论、数据拟合、随机过程等内容。具体内容包括“嫦娥三号”软着陆轨道设计与控制策略、创意平板折叠桌的模型设计、碎纸片的拼接复原、葡萄酒的评价、对太阳能小屋的研究、城市表层土壤重金属污染分析、交巡警服务平台的设置与调度优化模型、储油罐的变位识别与罐容表标定方案的探讨、上海世博会对环境保护的影响等。每篇论文后由编者给出了简要的评析。

本书是计算机和电子类本科生《系统建模》教材和学生参加数学建模竞赛的指导书,同时本书也可以为缺乏竞赛指导条件的地区或高校的学生提供帮助。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模竞赛优秀论文选评 / 李海燕主编. —北京:科学出版社, 2016.3

ISBN 978-7-03-045700-4

I. ①数… II. ①李… III. ①数学模型-文集 IV. ①O22-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第220712号

责任编辑:杨 岭 朱小刚/封面设计:墨创文化

责任校对:邓利娜/责任印刷:余少力

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

成都创新包装印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2016年3月第一次印刷 印张:11

字数:210千字

定价:38.00元

前 言

自 1992 年全国大学生数学建模竞赛(简称数学建模竞赛)创办以来,云南大学信息学院参加该项比赛已经 15 个年头。赛事规模已从 1992 年开始举办这项竞赛时有 74 所高校的 314 支参赛队参赛,到 2014 年有 1338 所高校的 25 341 支参赛队参赛,参赛学生达 7 万多人。该项比赛不仅是我国高校规模最大的学科性竞赛活动,而且成功地推动了数学教学的改革。许多同学都用“一次参赛,终生受益”来表达他们的切身体会。

数学建模竞赛是提高高等教育质量及学生实践创新能力的重要举措,也是激励学生学习数学的积极性、提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力的重要平台。它不仅可以鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动,开拓知识面,培养创造精神及合作意识,还能推动大学数学教学体系、教学内容和数学方法的改革。数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一,每年吸引几万名在校大学生参加,因此关于数学建模的书籍也大量涌现。但是,对于初次参加数学建模的大学生来说,除了分门别类培训各种方法以外,最需要的学习是:针对特定的问题,可以用什么方法建模,用什么方法求解,以及如何对结果进行分析和评价等;此外还需掌握数学建模竞赛论文写作的基本要领,包括论文的基本结构、写作方法、论文格式等。而本书正是为了满足这种需要而编写。

云南大学信息学院 2000 年组织 1 个队参赛,获得了全国二等奖的好成绩,为我校本科生参加该项竞赛奠定了坚实的基础和信心。之后,学院成立了通信工程系、电子工程系、信息与电子科学系指导教师团队。自 2000 年以来,该教师团队共组织 3 个系的学生 200 余队 600 余人次参加全国大学生数学建模竞赛,共获得全国一等奖 12 项、二等奖 21 项,以及省级奖 80 余项。15 年来,学生的受益面和获奖面不断扩大,产生了广泛的社会影响。很多获奖同学被免试推荐到清华大学、北京大学深圳分校、中国科学院、北京邮电大学、南京理工大学等知名学校就读硕士研究生。而指导教师团队还主持了云南省级教改项目“以数学建模竞赛为平台的《数学实验》课程改革与实践”及校级精品课程“数学实验”。

本书精选了 2010~2014 年全国大学生数学建模竞赛 A、B 题中的 9 篇论文。这些论文也是从云南大学信息学院近 5 年来 140 多支参赛队伍中精选出来且获得国家一、二等奖的作品,具有一定代表性。选用的论文具有鲜明的特点,如模型新颖、解题思路符合出题者意图、仿真方法巧妙等。本书知识点涵盖高等数学、概率论与数理统计、运筹学、图论、数据拟合、随机过程等内容,涉及的计算机应用技能有 Word (或 Science Word)、MATLAB、Mathematica、LINGO、LINDO

等建模所需的数学软件，对常用的预测算法、评价算法、分类算法、优化算法均有介绍。本书从学生的角度去思考，选用的论文几乎完整地保持了参赛论文的原貌，并在每篇论文后由编者给出了简要的评析。每一篇论文包含论文摘要、问题重述、问题分析、模型假设与符号说明、模型的建立与求解、模型的评价与推广等内容。

本书是云南大学计算机和电子类专业本科生的“系统建模与仿真”的教材，也是“数学建模与数学实验”课程的实验指导书和学生参加数学建模竞赛的指导书，同时也可以为缺乏竞赛指导条件的地区或高校的学生提供帮助。

本书受云南大学信息学院经费和云南大学“第二批中青年骨干教师”基金资助。云南大学信息学院各级领导对本书的出版给予大力支持；云南大学数学建模指导团队各位老师，尤其是收录本书论文的指导老师——宗容、施继红、蔡光卉、谭明川等，为本书的出版作出了无私奉献，在此，一并致以诚挚的感谢。

由于编者才疏学浅，书中难免有不妥之处，尤其是评析部分不一定恰当，敬请广大读者不吝批评指正！

目 录

第 1 篇	“嫦娥三号”软着陆轨道设计与控制策略.....	1
1.1	问题重述.....	2
1.2	问题分析.....	2
1.3	模型假设.....	3
1.4	符号说明.....	3
1.5	模型的建立与求解.....	4
1.6	模型评价.....	12
	参考文献.....	12
	点评.....	13
第 2 篇	创意平板折叠桌的模型设计.....	15
2.1	问题重述.....	16
2.2	模型假设与符号说明.....	16
2.3	问题一的分析与求解.....	18
2.4	问题二的分析与求解.....	24
2.5	问题三的分析与求解.....	31
2.6	模型优缺点及改进方向.....	35
	参考文献.....	36
	点评.....	36
第 3 篇	碎纸片的拼接复原.....	38
3.1	问题重述.....	39
3.2	问题分析.....	40
3.3	模型假设.....	40
3.4	符号说明.....	41
3.5	模型的建立与求解.....	41
3.6	模型的优缺点.....	49
3.7	模型的推广.....	50
	参考文献.....	50
	点评.....	50
第 4 篇	葡萄酒的评价.....	52
4.1	问题重述.....	53
4.2	问题分析.....	54
4.3	模型假设.....	55
4.4	符号说明.....	55
4.5	模型的建立与求解.....	55
4.6	模型的评价与推广.....	72
	参 考 文 献.....	72

	点评.....	73
第 5 篇	对太阳能小屋的研究.....	75
	5.1 问题重述.....	76
	5.2 符号说明.....	76
	5.3 模型的建立与求解.....	77
	5.4 模型评价.....	88
	参考文献.....	89
	点评.....	89
第 6 篇	城市表层土壤重金属污染分析.....	91
	6.1 问题重述.....	92
	6.2 模型假设.....	93
	6.3 符号说明.....	93
	6.4 问题分析.....	93
	6.5 模型的建立与求解.....	94
	6.6 模型的评价与推广.....	106
	参考文献.....	106
	点评.....	107
第 7 篇	交巡警服务平台的设置与调度优化模型.....	109
	7.1 问题重述.....	110
	7.2 问题分析.....	110
	7.3 模型假设.....	111
	7.4 符号说明.....	111
	7.5 模型的建立与求解.....	111
	7.6 模型评价与分析.....	126
	7.7 模型推广.....	126
	参考文献.....	127
	点评.....	127
第 8 篇	储油罐的变位识别与罐容表标定方案的探讨.....	129
	8.1 问题重述.....	130
	8.2 问题分析.....	130
	8.3 基本假设.....	131
	8.4 符号说明.....	131
	8.5 模型的建立与求解.....	132
	8.6 模型的分析与评价.....	142
	8.7 模型的优化.....	142
	8.8 模型的推广.....	144
	参考文献.....	144
	点评.....	144
第 9 篇	上海世博会对环境环保的影响.....	146
	9.1 问题重述.....	147
	9.2 模型假设.....	147
	9.3 符号说明.....	147

9.4 模型的建立与求解.....	149
9.5 模型的优点和缺点.....	163
9.6 相关建议.....	164
参考文献.....	164
点评.....	164

第 1 篇 “嫦娥三号”软着陆轨道设计与控制策略¹

队员：张启平，罗龙宝，段宏坤

指导教师：李海燕

摘要 2013 年 12 月 14 日 21 时 11 分 18.695 秒，“嫦娥三号”次级卫星平稳地降落在月球表面(以下简称月面)虹湾区，成功实现软着陆，使中国成为了继美国和苏联之后第三个在月球表面实现软着陆的国家，标志着我国的探月工程再次向前迈出一大步；与此同时，“嫦娥三号”的轨道设计与控制也成为了世界关注的焦点。本文通过研究“嫦娥三号”在近月点、远月点以及着陆过程中的运动情况和燃料消耗情况，给出“嫦娥三号”软着陆的轨道设计和控制的最优策略。

在问题一中，我们将“嫦娥三号”整个运行轨道及月球投影到月球表面近月点方向的一个平面上，以月球的零度经线和零度纬线的投影建立坐标轴，根据题目中给定的“嫦娥三号”着陆点的经纬度，确定了“嫦娥三号”的轨道和月球赤道的夹角为 66.14° 。由于“嫦娥三号”在近月点可看做是匀速圆周运动，所以从 15 km 到月球表面(约距降落点 3 km)这段过程中“嫦娥三号”的水平位移和竖直距离是相等的。经过计算可得出，近月点在月球表面 19.67°W , 44.48°N 的上空 15 km 处，远月点在月球表面 161.33°E , 44.48°S 的上空 100km 处。再根据万有引力公式 $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ 可算出，近月点的速度为 1.673798 km/s，远月点的速度为 1.633215 km/s。

在问题二中，在主减速阶段，我们将燃料消耗作为目标变量，假设发动机产生的推力恒定，根据卫星在着陆轨道上的初始条件和终端约束条件，通过线性规划，利用 LINGO 求出在最省燃料的情况下发动机产生的最佳推动力。粗避障阶段，用 MATLAB 读取题目中提供的 $2300\text{m} \times 2300\text{m}$ 的高程图，将数据导入 Excel，按每 $100\text{m} \times 100\text{m}$ 划分成一块块区域，分别算出每 $100\text{m} \times 100\text{m}$ 范围内海拔的方差（本文视方差小于 4m 的区域为适合降落的平坦区），由于此时“嫦娥三号”位于整片区域中心的正上方，考虑到节省燃料的需要，选择最接近中心位置的区域进行降落。精避障阶段，将题目中给出的 $100\text{m} \times 100\text{m}$ 的区域按 $10\text{m} \times 10\text{m}$ 划分为 100 个区域，采用与粗避障阶段相同的方法，选出方差最小的区域作为着陆区。

1 此题为 2014 年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛 A 题(CUMCM2014-A)，此论文获该年全国二等奖。

在问题三中,我们先对之前计算所产生的误差进行系统的分析,首先在计算近、远月点位置时,分析姿态发动机工作对计算结果产生的影响,经过一系列的分析 and 论证,得出姿态发动机工作对计算近、远月点位置影响不大的结论;其次在计算近、远地点速度时,考虑了地球引力对“嫦娥三号”卫星运行速度的影响,经过计算发现地球引力会使卫星在近、远月点的运行速度均减缓 0.002m/s ;最后在求解最优控制时,先计算出推力恒定的情况下燃料消耗的总量,再在推力可调的情况下选取五个线性的推力,假定五个力作用的时间相同,根据反向加速度和速度改变量的关系,计算出推力可调时消耗的总燃料,与推力恒定时相比较,有 71.4kg 的误差。

再用 LINGO 软件对问题二中主减速阶段线性规划的最优解进行敏感度分析,得出结论:能耗将增加 1616.995 个单位,所以速度的变化量对燃料消耗的影响最大。

关键词 匀速圆周运动 线性规划 方差分析 敏感度分析

1.1 问题重述

“嫦娥三号”在着陆准备轨道上的运行质量为 2.4t ,其安装在下部的主减速发动机能够产生 $1500\sim 7500\text{N}$ 的可调节推力,比冲(即单位质量的推进剂产生的推力)为 2940m/s ,可以满足调整速度的控制要求。在四周安装的姿态调整发动机,在给定主减速发动机的推力方向后,能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。“嫦娥三号”的预定着陆点为 19.51°W , 44.12°N ,海拔为 -2641m 。

要保证卫星能够准确地月球预定区域内实现软着陆,关键在于着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求:着陆准备轨道为近月点 15km 、远月点 100km 的椭圆形轨道;着陆轨道为从近月点至着陆点,其软着陆过程共分为 6 个阶段,要求满足每个阶段在关键点所处的状态并且尽量减少软着陆过程中的燃料消耗。

根据基本要求,我们建立数学模型解决下面的问题:

(1)确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置,以及“嫦娥三号”相应速度的大小与方向。

(2)确定“嫦娥三号”的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。

(3)对设计的着陆轨道和控制策略作相应的误差分析和敏感性分析。

1.2 问题分析

问题一,主要分析和确定着陆准备轨道近月点与远月点的位置,直观上可以根据预定着陆点位置来推出近月点与远月点的位置。由于“嫦娥三号”的环月轨道是未知的,因此我们假定“嫦娥三号”的绕月轨道是与赤道斜交的。在月球表面建立坐标系,近月点的位置在着陆准备轨道为 15km 的椭圆形轨道上,将近月点投影到坐

标轴上。在准备着陆阶段的轨道处,“嫦娥三号”可近似看成做匀速圆周运动,由匀速圆周运动的一般规律和相应的数学推导即可求出近月点的位置。因为近月点与远月点的连线必过圆心,因此由近月点的位置即可求得远月点的位置,即远月点的位置的纬度值与近月点相同,其经度值为 180° 减近月点经度值。忽略月球自转、太阳等其他星体的引力,“嫦娥三号”在近月点与远月点的速度可由万有引力公式求得。

问题二,需要在满足软着陆6个阶段要求的前提下,求得最优控制。经分析可知,最优控制即如何着陆才能使“嫦娥三号”燃料消耗最少及着陆位置满足“嫦娥三号”着陆的需求。我们将燃耗作为目标变量,根据卫星在着陆轨道上的初始条件和终端约束条件,通过线性规划,求得最小燃耗。由题目中的题目、4所给的表格内容及题目中的附图5、6可知,粗避障阶段与精避障阶段的数字高程的水平分辨率不同,然后分别将两表所给内容按附图划分区域,算得每块区域的方差。根据方差分析可以知道,方差越小,着陆高程距离越小,也就是说着陆区域越平坦越适合着陆。

问题三,对问题一和问题二所建立的模型进行分析。由于在建模的过程中,忽略了月球自转等影响,假定了推力幅值恒定等,如果在模型的求解过程中加入这些影响变量,会对模型的求解造成很大的困难。这些影响实际上是确实存在的,也会对卫星的着陆产生影响,从而产生误差。利用LINGO进行敏感性分析,在LINGO菜单下选择Options子菜单,再选择General Solver下的Dual Computations,然后选择Prices & Range,最后选择LINGO菜单下的Range命令即可进行灵敏度分析。

1.3 模型假设

- (1)假设“嫦娥三号”卫星在近月点和远月点均做匀速圆周运动。
- (2)假设月球的自转对卫星的降落不产生影响。
- (3)假设题目中的题目所给的数字高程图中的数据都是准确的。
- (4)假设在卫星降落的主减速阶段,主发动机产生恒定的推力。
- (5)假设主减速阶段,姿态发动机不工作,对卫星不产生影响。
- (6)假设其他行星对“嫦娥三号”产生的引力为零。

1.4 符号说明

G ——引力常量,单位为 $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

$M_{\text{月}}$ ——月球质量,单位为 kg

$m_{\text{月}}$ ——“嫦娥三号”卫星的质量,单位为 kg

- r ——卫星到月心的距离, 单位为 km
 v ——卫星做匀速圆周运动的速度, 单位为 km/s
 Δx ——一个经度的跨距, 单位为 km
 Δy ——一个纬度的跨距, 单位为 km
 θ ——卫星轨道与月球赤道的夹角, 单位为度($^{\circ}$)
 R ——月球半径, 单位为 km
 R_f ——地球与月球之间的距离, 单位为 km
 h_1 ——近月点到月球表面的距离, 单位为 km
 h_2 ——远月点到月球表面的距离, 单位为 km
 α ——极角, 单位为度($^{\circ}$)
 β ——推力方向角, 单位为度($^{\circ}$)
 $v_{\text{近}}$ ——卫星在近月点的运行速度, 单位为 km/s
 $v_{\text{远}}$ ——卫星在远月点的运行速度, 单位为 km/s
 v_r ——法向速度, 单位为 km/s
 v_a ——横向速度, 单位为 km/s
 r_{ref} ——归一化常量, 单位为 km
 d ——推力加速度, 单位为 km/s^2
 F_{trust} ——主发动机推力, 单位为 N
 m_0 ——卫星初始质量, 单位为 kg
 Δm ——燃料消耗速率, 单位为 km/s
 Δv ——速度差, 单位为 km/s
 $\bar{r}_k$ ——开普勒轨道近月点半径, 单位为 km
 v_g ——比冲, 单位为 m/s
 t ——软着陆完成时间, 单位为 s
 p ——燃料消耗量, 单位为 kg
 $S(x)$ ——方差
 X_i ——第 i 个点海拔, 单位为 m
 $\bar{X}_i$ ——每个区域平均海拔, 单位为 m
 n ——每个区域样本数

1.5 模型的建立与求解

1.5.1 着陆准备轨道近月点和远月点的位置, 以及“嫦娥三号”卫星相应速度的大小与方向

1.5.1.1 近月点和远月点位置

以月球接近近月点表面(以平均半径为基准)为参考平面, 这里将“嫦娥三号”

运行轨道及月球投影到该平面上,以月球零度经线为 y 轴和零度纬线为 x 轴建立平面直角坐标系。

如图 1 所示, o 为坐标原点, eg 为轨道投影, f 为着陆点投影, e 为近地点投影, g 为远地点投影, ef 为水平位移。月球平均半径 $R=1737.013\text{km}$, 赤道上每个经度之间的平均距离

$$\Delta x = \frac{2\pi R}{360} = 30.32\text{km} \quad (1)$$

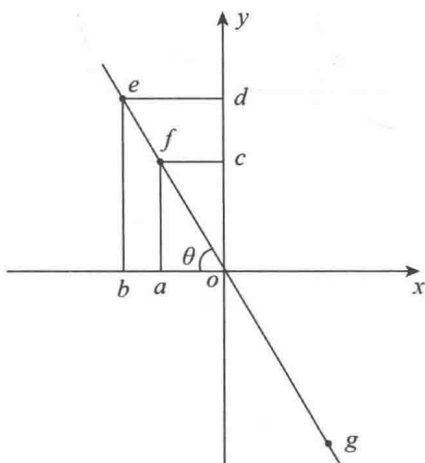


图 1 轨道投影坐标图

每个纬度之间的距离

$$\Delta y = \frac{\pi R}{180} = 30.32\text{km} \quad (2)$$

由于 f 点为 19.51°W , 44.12°N , 可得出 f 点坐标为 $(591.54, 1337.72)$, 得

$$\theta = \arctan \frac{1337.72}{591.54} = 66.14^\circ \quad (3)$$

$$of = \sqrt{1337.72^2 + 591.54^2} = 1462.67\text{km} \quad (4)$$

卫星在近月点做匀速圆周运动, 所以在下落过程中水平位移和竖直位移相等。在主减速阶段, 竖直位移为 $15-3=12\text{km}$, 即 $ef=12\text{km}$, 由此可知

$$oe = of + ef = 1474.67\text{km} \quad (5)$$

接下来根据三角函数计算得

$$ob = oe \times \cos 66.14^\circ = 596.51\text{km} \quad (6)$$

$$od = oe \times \sin 66.14^\circ = 1348.64\text{km} \quad (7)$$

所以 e 点坐标为 $(-596.51, 1348.64)$, 换算后的经度为 $\frac{596.51}{30.32} = 19.67^\circ$, 纬度为

$\frac{1348.64}{30.32} = 44.48^\circ$, 所以近月点的位置为 19.67°W , 44.48°N 的上方 15km 处, 由此推

出远月点的位置为 166.33°E , 44.48°S 的上方 100km 处。

1.5.1.2 “嫦娥三号”卫星在近月点和远月点的速度大小和方向

由于“嫦娥三号”在近月点和远月点做匀速圆周运动(如图 2 所示), 卫星距离近月点的高度 $h_1 = 15\text{km}$, 距离远月点的高度 $h_2 = 100\text{km}$, 根据万有引力定律

$$\frac{GM_{\text{月}}m_{\text{卫}}}{(R+h)^2} = \frac{m_{\text{卫}}v^2}{R+h} \quad (8)$$

可得近月点

$$v_{\text{近}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{月}}}{R+h_1}} = 1.673798 \text{ km/s} \quad (9)$$

远月点

$$v_{\text{远}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{月}}}{R+h_2}} = 1.633215 \text{ km/s} \quad (10)$$

速度方向为切线方向。

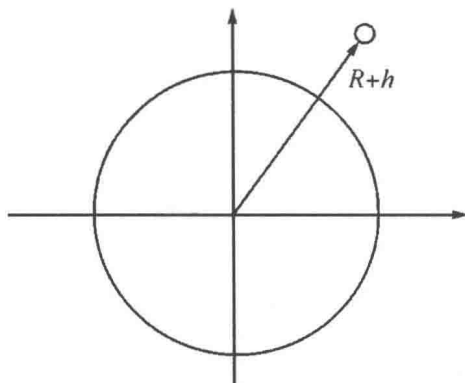


图 2 卫星运动图

1.5.2 “嫦娥三号”卫星着陆轨道 6 个阶段的最优控制策略

1.5.2.1 卫星燃耗最少

1. 系统模型

在惯性坐标系中, 以月心为原点的极坐标形式受控飞行器动力学方程为^[4-6]

$$\begin{cases} \bar{v} = -\frac{G}{\bar{r}^2} + \frac{\bar{v}_a}{\bar{r}} + \bar{d} \sin \beta \\ \bar{v}_a = -\frac{\bar{v}_r \bar{v}_a}{\bar{r}} + \bar{d} \cos \beta \\ \bar{r} = \bar{v}_r \\ \alpha = \frac{\bar{v}_a}{\bar{r}} \end{cases} \quad (11)$$

式中, G 为月球引力常数; $\bar{r}$ 为卫星到月心的距离; $\bar{v}_r$ 为卫星的法向速度; $\bar{v}_a$ 为卫星的横向速度; α 是极角; $\bar{d}$ 是推力加速度; β 是推力方向角, 即推力方向与当地的水平夹角。其中, 推力加速度 $\bar{d} = \frac{\bar{F}_{\text{trust}}}{m_0 - \Delta m t}$, $\bar{F}_{\text{trust}}$ 是主发动机推力, 其幅值恒定, 且有 $F_{\min} \leq F_{\text{trust}} \leq F_{\max}$, m_0 为卫星初始重量, Δm 是燃料消耗率。

卫星的初始条件为

$$\begin{cases} \bar{v}_{r0} = 0 \\ \bar{v}_{\alpha 0} = \frac{G}{\bar{r}_0} + \Delta v \\ \bar{r}_k = \bar{r}_0 + h \end{cases} \quad (12)$$

其中, 初始横向速度 $\bar{v}_{\alpha 0}$ 并不是当地的环绕速度, 而是开普勒轨道运行的卫星从远月点到近月点的速度, 其速度大于当地的环绕速度。 Δv 为这两个的速度差; $\bar{r}_k$ 为开普勒轨道近月点; $\bar{r}_0$ 为月球平均半径; h 为轨道高度。

卫星的终端约束条件为

$$\begin{cases} \bar{v}_{rf} = 0 \\ \bar{v}_{af} = 0 \\ \bar{r}_f = \bar{r}_0 \end{cases} \quad (13)$$

说明卫星降落到月球表面的速度为零。

对于推力幅值恒定的卫星, 其性能指标为燃料消耗最少, 即

$$\bar{P} = \int_0^{\bar{t}} m d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{F}_{\text{trust}}}{\bar{v}_g} d\bar{t} = \frac{\bar{F}_{\text{trust}}}{\bar{v}_g} \bar{t} = \min \quad (14)$$

其中, $\bar{F}_{\text{trust}}$ 为主发动机推力; $\bar{v}_g$ 为以米/秒为单位的比冲^[8]; m 为单位时间燃料消耗的千克数; $\bar{t}$ 为卫星软着陆的完成时刻。

2. 模型归一化

在优化过程中, 由于状态变量的量级相差较大, 在积分的过程中会导致有效位数的损失, 归一化处理^[9]可以克服这一缺点, 从而提高计算精度。因此作如下处理, 令

$$r_k = \frac{\bar{r}}{r_{\text{ref}}} \quad (15)$$

则相应的动力学方程可改写为

$$\begin{cases} \dot{v}_r = -\frac{1}{r^2} + \frac{v_a^2}{r} + d \sin \beta \\ \dot{v}_a = -\frac{v_r v_a}{r} + d \cos \beta \\ \dot{r} = v_r \\ \dot{\alpha} = \frac{v_{a0}}{r} \end{cases} \quad (16)$$

相应的初始条件和终端约束条件为

$$\begin{cases} \bar{r}_0 = \frac{\bar{r}_0}{r_{ref}} \\ \dot{v}_{r0} = 0 \\ \dot{v}_{a0} = \frac{\bar{v}_{a0}}{r_{ref}} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \bar{v}_{af} = 0 \\ \bar{r}_f = \frac{r_f}{r_{ref}} \\ \bar{v}_{rf} = 0 \\ F_{min} \leq F_{trust} \leq F_{max} \end{cases} \quad (18)$$

推力幅值约束为

$$F_{min} \leq F_{trust} \leq F_{max} \quad (19)$$

则性能指标为

$$P = \frac{F_{trust}}{\bar{v}_g} t = \min \quad (20)$$

3. 数值计算

由上述可知, 优化目标为卫星燃料消耗达最小值, 由卫星的初始条件和终端约束条件共同约束。同时, 各约束条件均为线性方程, 所以对燃料消耗进行线性规划。用 LINGO 进行有关程序的编写, 得推力的幅值 $F_{trust} = 1617\text{N}$, 卫星燃料消耗 1035.1kg , 此时最省燃料。

1.5.2.2 卫星着陆点的选取

在粗避障阶段, 卫星在距离月面 2400m 处对其下方的月面进行勘测后调整降落。为了节约燃料并且避开大的陨石坑, 对卫星在距月面 2400m 时拍摄的数字高程图所获得的数据进行处理, 在得出相应的控制策略后, 初步选定着陆区域。把数字高程图中 $2300\text{m} \times 2300\text{m}$ 的数据划分成为 529 个 $100\text{m} \times 100\text{m}$ 的数据块, 对应月球表面上 $100\text{m} \times 100\text{m}$ 的区域, 对其进行方差分析。方差计算公式为

$$S(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i)^2 \quad (21)$$

得到一个23m×23m的区域方差表,表中较小的方差值对应的区域即为较平坦(无陨石坑)的区域。对所得方差进行初步筛选,取出方差小于5的区域,共39个。为增加精确度,选取方差值小于4的18个区域。将这18个区域视为23m×23m的位置坐标系中的18个点,用MATLAB画出散点分布图(如图3所示)。图中(12,12)为坐标系中心点,且该点对应的区域方差值小于4,此时卫星恰好位于该点正上方。为减少能耗,卫星在2400m时可以竖直降落至100m处。

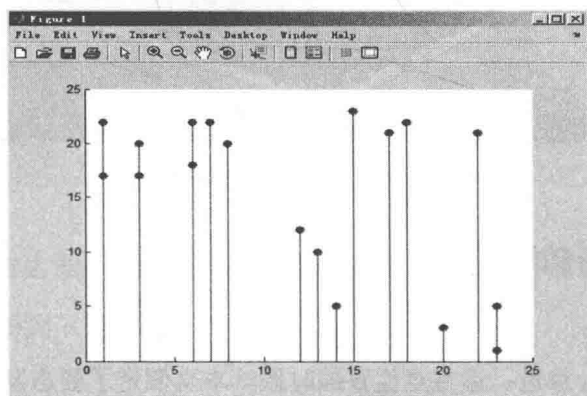


图3 粗避障阶段方差散点图

在精避障阶段,采用与上述相同的方法,将其划分为100个100m×100m的区域,对其进行方差分析,选取方差最小的区域作为卫星最终着陆点。

由图4可知卫星最终着陆在横轴为501~600,纵轴为1~100的区域内,如图5所示。

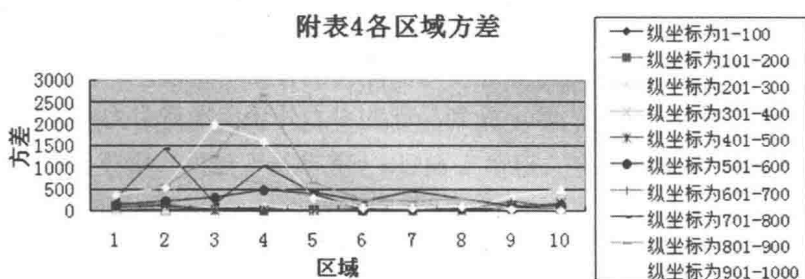


图4 精避障阶段方差折线图