国家级精品课程配套辅导教材

振动理论及工程应用辅导与习题解答

◎ 刘习军　张素侠　主编

VIBRATION THEORY AND ENGINEERING APPLICATION

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国家级精品课程配套辅导教材

振动理论及工程应用辅导与习题解答

主编 刘习军 张素侠

参编 刘 鹏 霍 冰 施睿智

袁 博 刘天翼

主审 李欣业

机械工业出版社

本书为振动理论及工程应用课程教学与自学的辅导教材，包含了本课程的“主要内容”“基本要求”“重点讨论”“例题分析”和“习题解答”五个部分，在文字上力求准确、精炼，强调分析问题和解决问题的正确思路，阐述了解题的方法和技巧，对《振动理论及工程应用》的全部习题进行了解答，并增加了部分例题，且对部分习题同时给出了多种解题方法，加强了自学指导的内容和力度。

本书内容丰富，通俗易懂，以务实与应用为根本，既可作为高等院校工科各专业的本科生、硕士研究生的学习指导书和参考书，也可作为报考硕士或博士研究生读者的复习参考书，对于从事与机械和结构振动有关工作的工程人员也有重要的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

振动理论及工程应用辅导与习题解答/刘习军，张素侠主编. —北京：机械工业出版社，2015.12

国家级精品课程配套辅导教材

ISBN 978-7-111-52169-3

Ⅰ.①振… Ⅱ.①刘… ②张… Ⅲ.①工程振动学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①TB123

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第270766号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：姜 凤 责任编辑：姜 凤 熊海丽

版式设计：霍永明 责任校对：肖 琳

封面设计：张 静 责任印制：乔 宇

唐山丰电印务有限公司印刷

2016年2月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 14.25印张 · 293千字

标准书号：ISBN 978-7-111-52169-3

定价：34.80元

前　言

振动理论及工程应用是高等院校工科各专业重要的技术基础课。对多数工科专业的学生来说，振动理论又是理论与工程技术紧密结合的一门课程。因此能应用振动理论中的方法，恰当地将工程中的振动问题用运动微分方程来描述，再利用振动理论中的方法求解，是工程技术人员的基本功，在工作中十分重要。这些能力的培养，主要是通过分析一定的习题来实现的。振动理论课程的习题，绝大多数都是从工程实际中简化而来的，或者习题本身就是一个简单的工程实际问题。为了帮助读者学好振动理论课程，我们编写了本书，希望为广大学生的振动理论课程的学习及考研提供帮助，为工程技术人员提供技术指导。

教育部爱课程网的开通，“工程振动与测试”国家资源共享课的上网（http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2244.html），极大地方便了广大群众对此课程的自主学习，适应了在职人员终生教育的需求。本书可配合上述网站进行学习。为满足广大学习群体的自学需要，在编写过程中，在力求文字准确的基础上，强调了分析问题和解决问题的正确思路，力求通俗易懂，以务实与应用为根本，形成了本书的编写风格。

本书与刘习军、贾启芬、张素侠主编的《振动理论及工程应用》教材同步使用，包含课程的“主要内容”、教学“基本要求”、本章“重点讨论”、典型“例题分析”和“习题解答”五个部分。对《振动理论及工程应用》的习题进行了解答，还增加了部分习题，详细阐述了解题的正确思路、方法和技巧，且对部分习题同时给出了多种解题方法，加强了对自学指导的内容和力度。

本书既可作为高等院校工科各专业的本科生、硕士研究生及高职高专各专业的学生学习振动理论及工程应用时的指导书和考试参考书，也可作为报考硕士或博士研究生读者的复习参考书。

本书的编写得到了天津大学力学系全体教师的支持。本书的第1、2、3、5章的“主要内容”“基本要求”“重点讨论”和“例题分析”由张素侠编写，第4、6~10章的“主要内容”“基本要求”“重点讨论”和“例题分析”由刘习军编写。“习题解答”部分中，第1、2章由刘鹏解答编写，第3~6、9章由施睿智解答编写，第8章由袁博解答编写，第10章由霍冰、刘天翼共同解答编写。全书由刘习军、张素侠统稿。刘鹏、施睿智、黄元英、曹梦澜、张缨、刘今朝、李向东、钟顺等参加了全书的校对工作。李欣业教授进行了详细审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

限于水平，如有错误和不妥之处，望读者不吝指正。

编　者

于天津大学

目　录

第 1 章
振动的基本知识

周期运动的最简单形式是简谐振动。一般的周期振动利用傅里叶级数做谐波分析，非周期振动利用傅里叶积分做谐波分析。

1.1 主要内容

1.1.1 振动激励函数

由于振动激励函数种类繁多，下面就常见的几种振动激励函数进行简单介绍。

1. 连续函数与离散函数

在连续时间范围内（$-\infty < t < \infty$）有定义的函数称为**连续时间函数**，简称**连续函数**。仅在一些离散的瞬间有定义的函数称为**离散时间函数**，简称**离散函数**。

2. 周期函数

周期函数是每隔一定时间 T（或整数 N），按相同规律重复变化的函数。连续周期函数可表示为

$$f(t)=f(t+mT),\qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-1}$$

离散周期函数可表示为

$$f(k)=f(k+mT),\qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-2}$$

k 为离散值。

3. 实函数与复函数

函数（或序列）值为实数的函数称为**实函数**。函数（或序列）值为复数的函数称为**复函数**。连续时间的复指数函数可表示为

$$f(t)=e^{st},\ -\infty < t < \infty \tag{1-3}$$

式中，复变量 $s=\sigma+j\omega$，σ 是 s 的实部；ω 是 s 的虚部。根据欧拉公式，上式可展开为

$$f(t)=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}\cos(\omega t)+je^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

因此，一个复指数函数可分解为实、虚两部分，即

$$\mathrm{Re}[f(t)]=e^{\sigma t}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}[f(t)]=e^{\sigma t}\sin\omega t$$

两者均为实函数。

4. 冲激函数

冲激函数也称单位脉冲（unit impulse）函数，用$\delta(t)$表示，它具有以下性质

$$\delta(t)=\begin{cases}0,\ t\neq 0\\ \text{大于任何给定值，当 } t=0 \text{ 时；但有}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-4}$$

延时单位脉冲$\delta(t-t')$函数，其定义为

$$\delta(t-t')=\begin{cases}0,\ \text{当 } t\neq t' \text{ 时}\\ \text{大于任何给定值，当 } t=t' \text{ 时；但有}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t')\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-5}$$

单位脉冲函数有以下特性：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}p\delta(t)\mathrm{d}t=p\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=p$，$p$ 为常数时。

(2) 它的傅里叶变换：$F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 0}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$。这一特性表明，单位脉冲激振力的谱为白噪声谱。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\delta(t-t')\mathrm{d}t=y(t')$，$0<t'<\infty$，$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-y'(0)$，该式表明狄拉克函数的抽样特性。

(4) 尺度变换特性。设 a 为常数，则有

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\quad\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$$

5. 单位阶跃函数

单位阶跃函数也称阶跃函数，用$\varepsilon(t)$表示，即

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{2}, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}\tag{1-6}$$

单位阶跃函数有以下特性：

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t\\ \int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon'(t)y(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(t)y'(t)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{\infty}y'(t)\mathrm{d}t=y(0)\\ \int_{-\infty}^{t}\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t>0\end{cases}\end{cases}\tag{1-7}$$

冲激函数与阶跃函数的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t},\ \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x\tag{1-8}$$

1.1.2 简谐振动

1. 正弦函数表示法

用时间 t 的正弦（或余弦）函数表示的简谐振动。其一般表达式为

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-9}$$

式中，A、α、ω 分别称为振幅、初相位和圆频率，它们是表征简谐振动的三要素。

一次振动循环所需的时间 T 称为周期；单位时间内振动循环的次数 f 称为频率。它们与圆频率的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1-10}$$

式中，周期 T 的单位为 s；频率 f 的单位为 Hz；圆频率 ω 的单位为 rad/s。

2. 复数表示法

简谐振动也可以用复数表示。记 $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$，复数

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)} = \bar{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = A\cos(\omega t + \alpha) + \mathrm{j}A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-11}$$

式中

$$\bar{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$$

称为复振幅。复数 z 的实部和虚部可分别表示为

$$\mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\mathrm{Im}(z) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

因此，简谐振动的位移 x 与它的复数表示 z 的关系可写为

$$x = \mathrm{Im}(z) \tag{1-12}$$

3. 两个同频率振动的合成

两个同频率的简谐振动分别为

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$$

合成后得

$$x = A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega t + \alpha_2) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-13}$$

其中

$$A = \sqrt{(A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2 + (A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}\right) \tag{1-14}$$

即两个同频率简谐振动合成的结果仍然是简谐振动，其频率与原简谐振动的频率相同。

4. 两个不同频率振动的合成

两个不同频率的简谐振动分别为

$$x_1 = A_1\sin\omega_1 t, \quad x_2 = A_2\sin\omega_2 t$$

当频率比为有理数时，$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$，可合成为周期振动，但不是简谐振动，合成振动的周期是两个简谐振动周期的最小公倍数。当频率比是无理数时，其合成振动是非周期的。

若 $\omega_1 \cong \omega_2$，对于 $A_1 = A_2 = A$，则有

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \end{aligned}$$

$$= 2A\cos\frac{\delta\omega}{2}t\sin\omega t = A(t)\sin\omega t$$

这是一个圆频率为 ω 的变幅振动，振幅在 $2A$ 与零之间缓慢地周期性变化。这种特殊的振动现象称为“拍”，拍的现象在实验测量中经常见到。

1.1.3 周期振动的谐波分析

工程技术中，许多振动是周期性的。根据傅里叶级数理论，任何一个周期函数如果满足狄利克雷（Dirichlet）条件，则可以展成傅里叶级数，即

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned} \tag{1-15}$$

式中，$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$称为基频，系数 a_0、a_n、b_n 由下式确定

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \ \tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}, \ n = 1, 2, 3, \cdots$$

可见，一个周期振动可视为基频 ω_1 及整倍数简谐振动分量的合成振动，因此，在振动力学中将振动函数进行傅里叶展开称为谐波分析或频谱分析。频谱分析是将振动函数由时域转入频域进行分析的一种方法。

1.1.4 非周期函数的连续频谱

如果函数$f(t)$的周期 T 无限增大，则$f(t)$称为非周期函数。研究非周期函数的有效手段是傅里叶积分及傅里叶变换。其傅里叶变换对为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1-16}$$

在振动理论中，$G(\omega)$又称非周期函数$f(t)$的频谱函数，频谱函数的值一般是复数，与周期函数的频谱不同，非周期函数的频谱图形是圆频率 ω 的连续曲线，故称连续频谱。

1.1.5 拉普拉斯变换

已知函数$f(t)$，$t \geqslant 0$。下列积分所确定的函数

$$F(s) = \mathrm{L}[f(t)] \xlongequal{\text{def}} \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{1-17}$$

称函数$f(t)$的单边拉普拉斯变换。

$f(t)$称为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换，记为

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}[F(s)] \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}t, & t > 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

称 $f(t)$ 为因果信号，$F(s)$ 为象函数。

1.2　基本要求

1. 掌握连续函数、离散函数、周期函数、冲激函数、阶跃函数的定义及基本概念。

2. 掌握利用正弦函数和复数表示简谐振动的方法，熟悉简谐振动的合成和拍振物理概念，特别是利用复数表示振动后的计算方法。

3. 能将周期函数展成傅里叶函数并进行谐波分析，能画出频谱图。

4. 了解非周期函数的连续频谱的计算方法及物理意义，了解拉普拉斯变换和逆变换的计算方法。

1.3　重点讨论

利用傅里叶级数对周期振动进行谐波分析是处理振动问题的重要手段，复杂周期振动是由若干个简谐振动组合而成的，所以处理复杂周期振动首先想到的是进行谐波分析，由此判断组成复杂周期振动的主要成分，从而方便地解决振动问题。

利用复数计算振动问题是解决振动问题的一个重要手段，在应用过程中，首先利用复数计算，然后利用计算结果的虚部表示振动的结果，所以掌握复数与振动函数之间的关系非常重要。

1.4　例题分析

例 1-1　已知一周期性矩形波如图 1-1 所示，试对其做谐波分析。

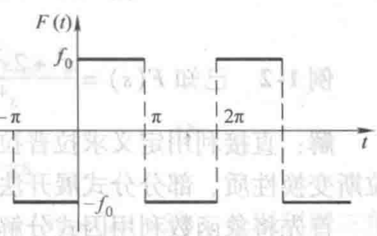

图　1-1

解：矩形波一个周期内的函数 $F(t)$ 可表示为

$$F(t)=\begin{cases} f_0, & 0<t<\pi \\ -f_0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

由式(1-15)得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\,\mathrm{d}t=0$$

它表示 $F(t)$ 的波形对于 t 轴对称，故其平均值为零。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=\frac{2f_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{4f_0}{n\pi},\ n=1,3,5,\cdots$$ 于是，

得 $F(t)$ 的傅里叶级数

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_1 t=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$

$$=\frac{4f_0}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$$

$F(t)$的幅值频谱如图 1-2 所示，结果表明，$F(t)$是奇函数，在它的傅里叶级数中也只含正弦函数项，根据精度要求，取有限项即可。

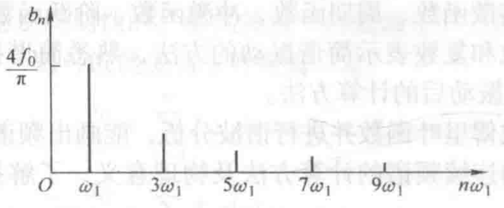

图 1-2

在傅里叶级数中各项的贡献可以用图形进行说明。如图 1-3 所示，其上图为原函数图，下图表明了第 1 项对此函数的贡献，它是主要项。如图 1-4 所示，其上图为前 2 项对此函数的贡献，下图为前 3 项对此函数的贡献，从贡献趋势上来看，后续的贡献越来越少。这也就是在保证精度要求的情况下取前有限项的原因。

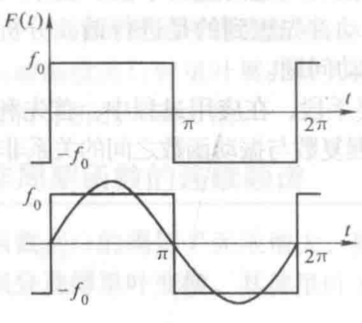

图 1-3

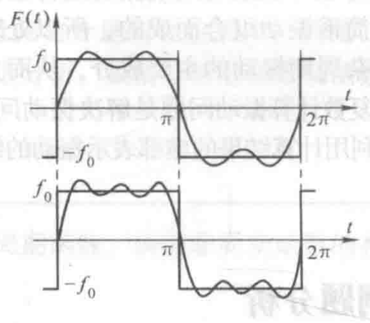

图 1-4

例 1-2 已知 $F(s)=\dfrac{s^3+2s^2-9s+36}{s^4-81}$，求原函数 $f(t)$。

解： 直接利用定义求拉普拉斯逆变换比较困难。通常的求解方法有：查表法、利用拉普拉斯变换性质、部分分式展开法和留数法。下面应用展开法求解。

首先将象函数利用因式分解法分解为如下形式

$$F(s)=\frac{s^3+2s^2-9s+36}{s^4-81}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{s-3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+3}+\frac{s-1}{s^2+9}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{s-3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+3}+\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{s^2+9}$$

所以可得

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t$$

1.5 习题解答

1-1 若简谐振动的位移用复指数形式分别表示为 $u_1(t)=5e^{j(\omega t+30^\circ)}$ 与 $u_2(t)=7e^{j(\omega t+90^\circ)}$，求：(1) $u_1(t)+u_2(t)$ 的合成运动 $u(t)$。(2) $u(t)$ 与 $u_1(t)$ 的相位差。

解：(1) 利用复指数形式的运算方法，则合成运动为

$$
\begin{aligned}
u(t) &= u_1(t)+u_2(t)=5e^{j(\omega t+30^\circ)}+7e^{j(\omega t+90^\circ)}=(5e^{j30^\circ}+7e^{j90^\circ})e^{j\omega t}\\
&=[5\cos30^\circ+j(5\sin30^\circ+7)]e^{j\omega t}=10.44e^{j(\omega t+65.5^\circ)}
\end{aligned}
$$

(2) $u(t)$ 与 $u_1(t)$ 的相位差为

$$\varphi=65.5^\circ-30^\circ=35.5^\circ$$

1-2 若两个简谐振动分别为 $u_1(t)=5\cos40t$，$u_2(t)=3\cos39t$，求：两个简谐振动的合成运动的最大振幅和最小振幅，以及其拍频和周期。

解：将简谐振动表示为复指数形式，则

$$
\begin{aligned}
u(t) &= u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}[5e^{j40t}+3e^{j39t}]\\
&=\mathrm{Re}[(5e^{jt}+3)e^{j39t}]=\mathrm{Re}\{[(5\cos t+3)+(j5\sin t)]e^{j39t}\}\\
&=\mathrm{Re}[\bar{u}(t)e^{j\varphi t}e^{j39t}]\\
&=\bar{u}(t)\cos[39t+\varphi(t)]
\end{aligned}
$$

其中

$$\bar{u}(t)=\sqrt{(5\cos+3)^2+(5\sin t)^2}=\sqrt{34+30\cos t}$$

$$\varphi(t)=\arctan\left(\frac{5\sin t}{5\cos t+3}\right)$$

最大振幅为

$$\bar{u}_{\max}=\sqrt{34+30}=8$$

最小振幅为

$$\bar{u}_{\min}=\sqrt{34-30}=2$$

拍的圆频率为

$$\omega_{拍}=|\omega_2-\omega_1|=|40-39|\,\mathrm{rad/s}=1\,\mathrm{rad/s}$$

拍的周期为

$$T_{拍}=\frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}=\frac{2\pi}{|40-39|}\mathrm{s}=2\pi\mathrm{s}$$

1-3 若两个简谐振运动分别为 $x_1(t)=10\cos\omega t$ 与 $x_2(t)=15\cos(\omega t+2)$，分别利用三角函数、矢量、复数关系求 $x_1(t)+x_2(t)$ 的合成运动。

解：(解法一) 利用三角函数关系

因为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的圆频率一样，所以合成运动的形式为

$$x(t)=A\cos(\omega t+\alpha)=x_1(t)+x_2(t)$$

由于

$$
\begin{aligned}
A(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha) &= 10\cos\omega t+15\cos(\omega t+2)\\
&=10\cos\omega t+15(\cos\omega t\cos2-\sin\omega t\sin2)
\end{aligned}
$$

所以

$$\cos\omega t(A\cos\alpha)-\sin\omega t(A\sin\alpha)=\cos\omega t(10+15\cos2)-\sin\omega t(15\sin2)$$

令方程两边 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 的系数相等，得

$$A\cos\alpha=10+15\cos2$$

$$A\sin\alpha=15\sin2$$

$$A=\sqrt{(10+15\cos2)^2+(15\sin2)^2}=14.1477$$

$$\alpha=\arctan\left(\frac{15\sin2}{10+15\cos2}\right)=74.6°$$

（解法二） 利用矢量运算方法

对于任意一个 ωt，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 可以用图 1-5 所示的矢量来表示。根据矢量加法的几何表示可求得合矢量为

$$x(t)=14.1477\cos(\omega t+74.6°)$$

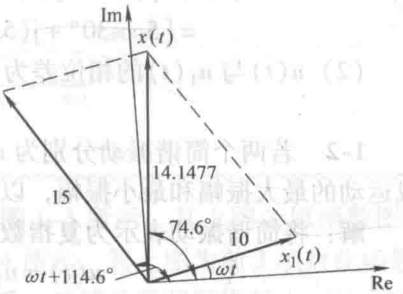

图 1-5

（解法三） 用复数方法

这两个简谐运动可以用复数的形式表示为

$$x_1(t)=\mathrm{Re}[A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\equiv\mathrm{Re}[10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$x_2(t)=\mathrm{Re}[A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+2)}]\equiv\mathrm{Re}[15\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+2)}]$$

这样，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的和可以表示为

$$x(t)=\mathrm{Re}[A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}]$$

则 A 和 α 为

$$A=14.1477$$

$$\alpha=74.6°$$

1-4 一个物体放在水平台面上，当台面沿铅垂方向做频率为 5 Hz 的简谐振动时，要使物体不跳离平台，对台面的振幅应有何限制？

解：物体与桌面保持相同的运动，已知桌面的运动为

$$x=A\sin10\pi t,\ \ddot{x}=-A(10\pi)^2\sin10\pi t$$

由物体的受力分析，$F=0$（极限状态）

$$mg\geqslant m\ddot{x}$$

物体不跳离平台的条件为

$$|\ddot{x}_{\max}|\leqslant g$$

即有

$$A\omega^2\leqslant g,\ A\leqslant\frac{g}{\omega^2}$$

$$|a_{\max}|=A(10\pi)^2\leqslant g,\ A\leqslant\frac{g}{(10\pi)^2}=9.93\mathrm{mm}$$

由题意可知，当 $f=5\mathrm{Hz}$ 时，得到 $\omega=2\pi f=10\pi$，当台面振幅 $A\leqslant9.93\mathrm{mm}$ 时，物体不跳离平台。

1-5 有一做简谐振动的物体，它通过距离平衡位置为 $x_1=5\mathrm{cm}$ 及 $x_2=10\mathrm{cm}$ 时的速度分别为 $v_1=20\mathrm{cm/s}$ 及 $v_2=8\mathrm{cm/s}$，求其振动周期、振幅和最大速度。

解：设该简谐振动的方程为 $x=A\sin(\omega t+\alpha)$，速度为 $\dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$，将二式平方

并整理后得到振幅为

$$A=\sqrt{x^2+\frac{v^2}{\omega^2}}$$

将已知条件中的数据代入上式得

$$A_1=\sqrt{5^2+\left(\frac{20}{\omega}\right)^2};\ A_2=\sqrt{10^2+\left(\frac{8}{\omega}\right)^2}$$

联立求解得

$$A=10.69\text{cm};\ \omega=\frac{\sqrt{112}}{5}\text{rad/s}=2.12\text{rad/s};\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2.964\text{s}$$

当 $x=0$ 时，v 取最大，即

$$10.69=\sqrt{\left(\frac{v_{\max}}{2.12}\right)^2}$$

得

$$v_{\max}=22.63\text{m/s}$$

所以，振动周期为 2.964s；振幅为 10.69cm；最大速度为 22.63cm/s。

1-6 一个机器内某零件的振动规律为 $x=0.5\sin\omega t+0.3\cos\omega t$，$x$ 的单位是 cm，$\omega=10\pi\text{rad/s}$。这个振动是否为简谐振动？试求它的振幅、最大速度及最大加速度，并用旋转矢量表示这三者之间的关系。

解： 首先利用三角函数关系，整理得

$$\begin{aligned}x&=0.5\sin\omega t+0.3\cos\omega t\\&=0.583(\cos30.95°\sin\omega t+\sin30.95°\cos\omega t)\\&=0.583\sin(\omega t+30.95°)\end{aligned}$$

由此可知，这个振动为简谐振动。它的速度、加速度表达式分别为

$$\dot{x}=0.583\omega\sin(\omega t+120.95°)$$

$$\ddot{x}=0.583\omega^2\sin(\omega t+210.95°)$$

它的振幅、最大速度及最大加速度分别为

振幅 $A=0.583\text{cm}$

最大速度 $\dot{x}_{\max}=0.583\omega=18.3\text{cm/s}$

最大加速度 $\ddot{x}_{\max}=0.583\omega^2=574.6\text{cm/s}^2$

三者之间的关系用旋转矢量图表示如图 1-6 所示。

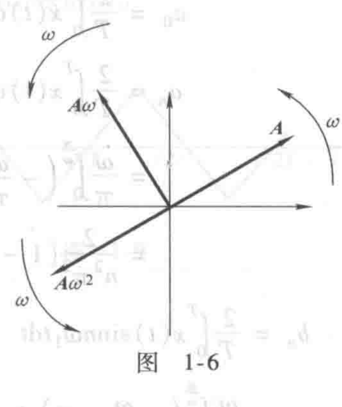

图 1-6

1-7 某仪器的振动规律为 $x=a\sin\omega t+3a\sin3\omega t$。此振动是否为简谐振动？试用 $x-t$ 坐标画出运动图。

解： 因为 $\omega_1=\omega$，$\omega_2=3\omega$，$\omega_1\neq\omega_2$，又因为 $T_1=2\pi/\omega$，$T_2=2\pi/(3\omega)$，所以，合成运动为非简谐振动。两个不同频率的简谐振动的合成不是简谐振动，当频率比为有理数时，可合成为周期振动，合成振动的周期是两个简谐振动周期的最小公倍数。所以此振动为非简谐振动，$x-t$ 时间历程图略。

1-8 已知以复数表示的两个简谐振动分别为 $3e^{j5\pi t}$ 和 $5e^{j\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}$，试求它们的合成的复数表示式。

解：两简谐振动分别为$3e^{j5\pi t}$，$5e^{j\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}$，也可表示为

$$3e^{j5\pi t}=3\cos5\pi t+3j\sin5\pi t$$

$$5e^{j\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}=5\cos\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+3j\sin\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

所以两个振动合成后得

$$x=5e^{j\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}+3e^{j5\pi t}$$

或

$$x=Ae^{j(5\pi t+\varphi)}$$

其中

$$A=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

$$\varphi=\arctan\frac{5}{3}$$

即它们的合成振动为

$$x=\sqrt{34}e^{j\left(5\pi t+\arctan\frac{5}{3}\right)}$$

1-9 将图 1-7 所示的三角波展为傅里叶级数。

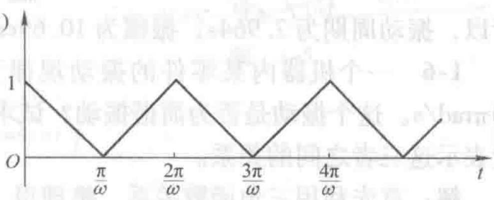

图 1-7

解：三角波一个周期内的函数$x(t)$可表示为

$$x(t)=\begin{cases}-\dfrac{\omega}{\pi}t+1, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega}\\[2ex] \dfrac{\omega}{\pi}t-1 & \dfrac{\pi}{\omega}\leqslant t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega},\ \omega_1=\frac{2\pi}{T}=\omega$$

利用三角函数展开得

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left(-\frac{\omega}{\pi}t+1\right)dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\pi}t-1\right)dt=1$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\,dt\\&=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left(-\frac{\omega}{\pi}t+1\right)\cos n\omega_1 t\,dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\pi}t-1\right)\cos n\omega_1 t\,dt\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\,dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left(-\frac{\omega}{\pi}t+1\right)\sin n\omega_1 t\,dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{\omega}{\pi}t-1\right)\sin n\omega_1 t\,dt=0,\ n=1,2,3,\cdots$$

于是，得$x(t)$的傅里叶级数为

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\cos n\omega t$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \cdots\right)$$

1-10 将图 1-8 所示的锯齿波展为傅里叶级数，并画出频谱图。

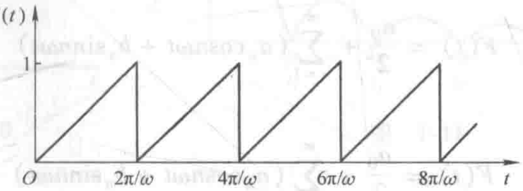

图 1-8

解：锯齿波一个周期内的函数 $F(t)$ 可表示为

$$F(t) = \frac{\omega}{2\pi}t,\quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega},\quad T = \frac{2\pi}{\omega},\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

傅里叶级数的系数

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi}t\mathrm{d}t = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi}t\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi}t\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{n\pi},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

于是，得 $x(t)$ 的傅里叶级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t$$

频谱图略。

1-11 将图 1-9 所示的三角波展为复数傅里叶级数，并画出频谱图。

解：一个周期内的函数可表示为

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{4F_0}{T}t & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{4}\right) \\ -\dfrac{4F_0}{T}t + 2F_0 & \left(\dfrac{T}{4} \leqslant t \leqslant \dfrac{3}{4}T\right) \\ \dfrac{4F_0}{T}t - 4F_0 & \dfrac{3T}{4} \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

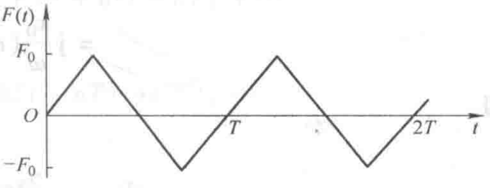

图 1-9

则基频为 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，傅里叶级数的系数为

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4F_0}{T}t\cos n\omega t\mathrm{d}t + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\left(-\frac{4F_0}{T}t + 2F_0\right)\cos n\omega t\mathrm{d}t + \int_{\frac{3T}{4}}^{T}\left(\frac{4F_0}{T}t - 4F_0\right)\cos n\omega t\mathrm{d}t$$
$$= 0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\frac{4F_0}{T}t\sin n\omega t\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\left(-\frac{4F_0}{T}t+2F_0\right)\sin n\omega t\mathrm{d}t+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}\left(\frac{4F_0}{T}t-4F_0\right)\sin n\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4F_0}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$

傅里叶级数表达式为

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

将 a_n、b_n 代入整理得

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4F_0}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\sin n\omega t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4F_0}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-j\frac{4F_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)e^{jn\omega t}\end{aligned}$$

频谱图略。

1-12 求图 1-10 所示的矩形脉冲的频谱函数并画出频谱图形。

解：$x(t)$ 可表示为

$$x(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<0\\ x_0, & 0<t<t_1\\ 0, & t_1<t<+\infty\end{cases}$$

所以得

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}x_0e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=j\frac{x_0}{\omega}(e^{-j\omega t_1}-1)$$

即

$$|G(\omega)|=\frac{2x_0}{\omega}\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|=x_0t_1\left|\frac{\sin\frac{\omega t_1}{2}}{\frac{\omega t_1}{2}}\right|$$

频谱图形如图 1-11 所示。

1-13 求图 1-12 所示的半正弦波的频谱函数并画出频谱图形。

解：首先将半正弦波 $F(t)$ 表示为函数