

中 学 数 学

趣味思想与方法

■ 赵龙山 著



中学数学**趣味**思想与方法

赵龙山 著

中国计量出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

中学数学趣味思想与方法/赵龙山著. —北京: 中国计量出版社, 1999

ISBN 7-5026-1256-4

I. 中… II. 赵… III. 数学课-中学-教学参考资料
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 53856 号

内 容 提 要

本书汇集了中学数学趣味思想与方法 62 篇, 紧密结合中学数学课本, 广征博引, 亦庄亦谐, 亦真亦幻, 深入浅出地讲解了令人头疼的章节、概念、命题、难题和怪题, 引进了丰富的素材和种种新的思路, 对于拓展数学视野, 丰富数学知识、数学方法和数学思想不无裨益。

本书适合于广大中学生朋友阅读使用, 也适合于广大中学数学教师及数学爱好者参考使用。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

北京迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

850 mm×1168 mm 32 开本 印张 7.25 字数 186 千字

2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷

*

印数 1—5000 定价: 9.00 元

序

放下书稿，思绪丛生。这十几万的文字，数十章的内容，我却几乎是一口气读完了的。读它，像是在读一本引人入胜的小说，放不下离不开；更像是步入了仙山佳境：繁花似锦，曲径通幽，探奇览胜，留连忘返。

这是一本趣味数学思想与方法的书，出自一位思维活跃的年青副教授之手；它出于中学课本，却胜于中学课本；它通过教学讲方法。却处处发自中学生的内心；它广征数学历史的奇闻异事，博采当今数学研究的丰硕成果，顺“教材”之势，搭研习之桥，激趣明法，诲人谆谆。作者视读者为平等的知心朋友，绝不摆架势；他力求深入浅出，而杜绝生僻用语，即使是课本中常令师生们头疼的章节、概念、命题，“奥赛”中难倒英雄小将的生题、怪题，经他笔下层层剖析，娓娓道说，也往往头绪澄清，规律呈现，令人恍然大悟。因此，在当前“复习资料”充斥图书市场的情况下，此书的出版，无异于一股清流，定会受到真正热爱数学的读者的欢迎。

中国是数学的故乡，我们的数学教育曾为国家培养了成千上万的科技人才。当前，数学教学正在向素质教育转轨，数学的研究、教育与传播必将开拓自己新的局面。我们希望本书的出版是个好的兆头！

我们相信，广大的数学教师必能从本书中找到“教学设计”的种种新的思路和丰富的素材，初中与高中的广大同学必能从中汲取丰富的数学知识、数学方法与数学思想，特别是能找到进入数学奥妙世界的金钥匙！

研读此书，望君多动脑、勤动手，处处留意，一定会满载而归！

杨之

写于江西九江

前言

数学，有人说它枯燥，有人说它有趣。说数学枯燥的人，可能是还没有进入到数学的“腹地”中去；也可能仅仅是为了要参加考试而学数学；更大的可能也许是在中小学读书时没有碰到好的“引路人”和“好书”。

幸运的是，作者的中学时代，尽管是一个“不读书，无书读”的“文革”年代，但有三位数学老师与一本不知从哪里再来的无封皮的有关“数学”方面的趣味书竟使我不知不觉地爱上了数学，以至于1978年恢复高考填报大学志愿时，到了非考数学系不可的地步。现在回想起来，这是一种多么重要的学习数学的内部驱动力！有了这种内驱力，在大学里我就更加如痴如醉地在数学王国漫游。后来读数学系的研究生，取得硕士学位与评上数学专业的高级职称，专门从事数学的研究和教学工作也就是很自然的事了。

在讲授数学的同时，我深感自己责任的重大，如何才能使学生发自内心去热爱数学与学习数学呢？

在大力提倡素质教育的今天，数学学科的素质教育更是迫在眉睫。很多学生在进入大学数学系后不能适应大学的学习，这已经是应试教育的弊端所在，其根本原因在于教师为考试而“教”，学生为考试而“学”，教师与学生都沉浸在“题海”之中，哪有时间领略数学世界的奥妙呢！

中学时代的一本无封皮的数学课外读物使我爱上数学并将终生与之相伴，愿这本浸满我的思考和欢乐的小书带你步入数学的殿堂！

限于作者水平，书中不当之处，敬请广大读者指正！

在此，对引导我进入数学殿堂的中学时代的刘东汉老师、张文道老师和赵柏源老师表示最深深的谢意。全国初等数学研究会

协调领导小组成员、初等数学研究权威、全国特级教师杨之先生审阅全书、予以修改并欣然作序，数学史专家江西九江师专程平孙副教授审阅并修改全稿使书稿增色，特此向他们深表谢意！

作者

1999年5月8日于广东中山

目 录

1. 数城捉魔魔变友 (1)
2. 代数代数, 字母代表数 (3)
3. 未卜先知——代数的本领 (6)
4. 丢番图墓志铭上的难题 (10)
5. 不等式与称球游戏 (15)
6. 二元一次方程组与“百人吃百馒头”问题 (20)
7. 整式教我们神机妙算 (24)
8. 从因数分解到因式分解 (28)
9. “荒谬王”大闹“分式国” (31)
10. 关于无理数的“惨案” (34)
11. “祖率”领先世界千余年 (37)
12. 象棋发明者的奖赏与指数 (40)
13. 能延长天文学家寿命的对数 (44)
14. 直角坐标与数学划时代的变革 (48)
15. 函数概念的历史变迁 (51)
16. 一次函数与奇妙的算图 (53)
17. 阿基米德杠杆与二次函数极值 (57)
18. 陈子测日高与今日解三角形 (61)
19. 聪明而轻率的“小统计” (65)
20. 最原始的图形与几何的起源 (68)
21. 几何学与“眼见为实” (70)
22. 几何“概念”的逻辑阶梯 (73)
23. 平行公理所引出的几何学奇葩 (76)
24. 关于“三角形”的师生对话 (80)
25. 几何学中两个最早的姐妹定理 (84)
26. “所有三角形都是等腰三角形” (87)

27. 几何三大难题	(89)
28. 作图工具的限制与尺规作图	(92)
29. 作图工具的放宽与几何三大难题的可解	(95)
30. 作图工具的限制与匹多生锈圆规问题	(101)
31. 两个限制作图工具的数学竞赛题	(106)
32. 美观实用而又神奇的“对称”	(109)
33. 关于“勾股定理”的命名	(113)
34. 勾股定理证法千姿百态	(116)
35. 有趣的勾股数组	(119)
36. 勾股定理应用趣谈	(123)
37. 奇妙的黄金分割	(126)
38. 圆的魅力	(129)
39. 计算圆周率 π 的“魔法”	(133)
40. 反证法及其妙用	(137)
41. 集合与“船夫渡河难题”	(140)
42. “一一对应”的魔术	(144)
43. 银行利率与指数函数	(148)
44. 度量角的两种单位制	(150)
45. 三角函数图像之间的奇妙联系	(152)
46. 周期函数的周期与最小公倍数	(155)
47. 三角和差公式的逻辑系统	(159)
48. 均值不等式与极值定理	(165)
49. 奇特数列不奇特	(168)
50. 求前 n 个自然数方幂和的通法	(173)
51. “世界末日”问题与递推数列	(176)
52. 兔子繁殖问题与非波纳奇数列	(180)
53. 分解组合思想与循环数列的通项公式	(184)
54. 有限无限之奥妙与无穷递缩等比数列	(188)
55. 归纳法与数学归纳法	(193)
56. 数学归纳法证题时的逻辑错误分析	(197)

57. 复数与青蛙的对称跳	(204)
58. 二项式定理与杨辉三角形	(207)
59. 从平面几何到立体几何	(212)
60. 聪明的乌鸦与球体积公式	(214)
61. 直线方程与直线系	(216)
62. 将圆压缩就是椭圆吗	(219)
参考文献	(222)

数城捉魔变友

——一个字母表示数的童话

很久很久以前，在一个美丽的小岛上，有一座奇怪的城市，这座城市里的居民全都是“数”，故而得名叫做“数城”。城东住的全是正数，城西住的全是负数。在城东和城西之间有一道门，数“0”就是不知疲倦地坚守在这里，以防正数和负数城东城西地乱窜。

一天夜里，这个奇怪的城市突然骚动起来，很多居民说看到了像自己一样的妖怪。这个妖怪一会儿在这家出现，一会儿又在那家出现，弄得城市里所有的人都惶惶不安。

好在“ $\sqrt{2}$ ”这个数正在数“1”家串门。当这个妖怪出现在数“1”家时，他们虽也惊慌，但毕竟人多胆壮，趁着晚上黑暗，迅速拿出一条麻袋，把那妖怪装了进去，并把袋口紧扎起来。

第二天一清早，大家听说在数“1”家捉住了妖怪，都过来想看个究竟。数“1”把那麻袋解开一看，原来妖怪是一个似0又非0，像9又不是9的怪物。

数“1”开始对这个怪物进行审讯：

“你是谁？”

“我是 a 。”

“是谁派你到我们这座城市来的？来干什么？”

“是‘代数老爷’叫我来的，我想在你们这座城市找个安身之处，代数老爷吩咐我说：‘我给你千变万化的本领，愿意变谁就变谁吧！’，所以开始到了数0.618家，我就成了数0.618，这搞得数

0.618 惊慌不已，这样我又跑了几家，每到一家都把房东吓住了，因此引起了慌乱。我看城东找不到安身之处，便跑到城西，可是我一到数“-3”家，就变成了-3，原-3一见我就吓坏了。我一看在城西也不好安身，就跑到数0这里来了，可我一变成数0，就被那个机警的数0发现了，它高声喊叫，我撒腿就跑，慌不择路，终于被你们捉住了。以上都是真情，请大人明察，从轻发落！”

数1和 $\sqrt{2}$ 一听，觉得这个怪物 a 还算老实，特别是看到 a 有千变万化之本领，数1和其它几个数嘀咕了几句，对怪物 a 说：“我们这个数城，素以宽容诚实为本，你来到我们这里搞得全城骚动，本该判罪于你，但经过商量，看你态度老实并念你有变化之功，免去对你的治罪。如果你愿为大家服务，就命你为我们城市的友谊大使”。

就这样，友谊大使 a 上任了。经过友谊大使 a 的努力之后，既可以是正数、又可以是负数、还可以是0的 $b, c, d, \dots, x, y, z, \dots$ 等等朋友全都来到了数城作客，并成了数城的好朋友，数城因而也发生了翻天覆地的变化。

亲爱的读者，以上这个童话说明了一个道理：“数”和“字母”本不相同，但可以联谊，字母可以变成数、代表数、代表不同的数，它一会儿是5，一会儿是 $-\frac{1}{3}$ ，一会儿是0，一会儿又是1和 $\sqrt{2}$ 。这就是说，如果仅看到 a ，则这个字母可以代表任何一个实数，所以“字母代表数”后来就一度成了数学的发展方向，因而也就成了一门被简称为“代数”的学科，从此字母和数就交上了朋友并结下了不解之缘。

2.

代数代数，字母代表数

小学生在小学学的数学，怎么一到中学就分成代数与几何呢？“代数”到底是什么？

自从“代数老爷”派字母来到“数城”之后，字母表示数就非常普遍而又有价值。那么字母表示数到底有什么意义呢？

我们知道，人们有一个习惯，就总想以有限的知识去探索无限的世界，数学家也不例外。比如说，我们发现 $3+4=4+3$ ， $7+(-2)=(-2)+7$ ， $(-4)+(-5)=(-5)+(-4)$ ， $0+5=5+0$ ，等等许多表示“你加我”和“我加你”结果一样的等式，但要想把所有这样的情形或者说要把无穷多个这样的等式都写出来，用数字是办不到的，但有了字母表示数，就可以办到了。因为字母可以表示任何数，这时只要写

$$a + b = b + a$$

就可以表示“任何一个”数的等式，从而也就把所有无穷无尽的“你加我”等于“我加你”表示出来了。

你看，当 $a=3, b=4$ 时， $a+b=b+a$ 不就表示 $3+4=4+3$ 吗？当 $a=7, b=-2$ 时， $a+b=b+a$ 不就是 $7+(-2)=(-2)+7$ 吗？这样就可以把加数与被加数进行交换而结果不变的这一性质统一地刻划出来了。

人们还有一个习惯，就是想通过已知去研究未知。用字母表示未知数以后，所列出的方程就是从已知求未知。为了解方程，人们就要研究字母代表数的运算式也就是代数式的各种运算规律和法则，于是一门新的学科就应运而生了。因这门学科主要是研究字母代表数以后的各种运算式的性质、规律及其应用，这门学科

也就被简称为“代数”。代数代数，也就是指“字母代表数”的学问。

从简单地进行具体数的运算，到研究一般“字母数”的运算，进而研究代数式的运算，这是数学的一大进步。因为代数式不仅刻划了具体数的运算，而且刻划了一般数的运算，它实现了从已知到未知，从特殊到一般，从有限到无限的巨大转变。

我们可以说， a 是一个比某一具体数更高一级的数， $3a^2 + 2bc$ 就是一个比某一具体算式更高一级的运算式。

既然，数学由数的运算变成更为一般的高一级的“字母数”的运算，即代数式的运算，从而数学发生了巨大的变化，这个使数学发生巨大变化的是友谊大使 a 。那么派友谊大使 a 到数城去安家的“代数老爷”又是谁呢？

这个人不是别人，他就是大名鼎鼎的法国数学家韦达 (Vieta, 1540~1603 年)。正是由于韦达第一个有意识地用字母表示数，并系统地研究了字母表示数以后的各种运算规律，所以韦达成了“代数学”的奠基人之一。他研究了解二次方程、三次方程、四次方程的方法，并用一般形式来表示方程及其根。他还发现了一元二次方程根与系数的关系定理。

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1 和 x_2 ，则必有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

为了纪念韦达的功绩，我们现在都把这一定理称为“韦达定理”哩！

当然，我国古代数学家刘徽（著有《九章算术注》）、李冶（著有《测圆海镜》、发明“天元术”）、王孝通（著有《缉古算经》）、贾宪（发明“增乘开方法”）、秦九韶（著有《数书九章》）、朱世杰（《四元玉鉴》）对代数学也做出了巨大贡献，用“天”、

“元”等表示未知数，并且创立了代数学上的无与伦比的许多独特方法。

3.

未卜先知——代数的本领

代数不就是“用字母表示数”么？它怎么会有未卜先知的本领呢？

你不信？好，那我们试试看。请你写好一个数，我一会儿就会知道你这个数是什么！当然，你写的这个数可别让我看见哟！现在请写一个数，并进行如下的运算：将你想的数乘以4，再减去4，再除以4，最后再加上4。好了，你只要将此结果告诉我，那么我就知道你开始写的是什么数！

真的？好，我运算的结果是26，我起初写的数是多少？

是23！

亲爱的读者，这样的问题对于学了代数式的同学来说，那简直是太简单了！

为什么呢？

我们先用 a 表示你起初写的那个数，在进行了所指定的运算后，就成了：

$$[a \times 4 - 4] \div 4 + 4$$

根据代数式的运算规律将上边的代数式化简，得到

$$\begin{aligned} & (4a - 4) \div 4 + 4 \\ &= (a - 1) + 4 \\ &= a + 3 \end{aligned}$$

最后的运算结果是26，就是 $a + 3 = 26$ ，从而 $a = 23$ 就是你最初写的数。

这有何难？！

可能有些读者会问：你在运算的时候，为什么老要人家用

“4”来加减乘除兜圈子呢？不用“4”行吗？当然，不用4，而用其它的数也是毫无问题的。比方说，由 $\frac{a \times 5 - 2}{3} + 1 = \frac{5}{3}a + \frac{1}{3}$ ，我们不是马上就可以设计另一个“未卜先知”的游戏么？

有些细心的读者会问，你要人家先进行运算，然后还要把运算的最后结果告诉你，你才能未卜先知。如果说，我不告诉你任何结果，你能未卜先知吗？

我们说，这也是可以的！请读者准备好纸和笔，下面我们就开始吧！

首先请你在纸上任意写上一个数，然后请进行如下运算，先乘以4，再减去8，再除以2，再减去2，再除以2，再加上15，再减去你最开始写的数，最后再除以2。亲爱的读者，你不是说不告诉我最后的结果吗？好！既然你不告诉我，但我照样可以未卜先知。你运算的最后结果是6！

亲爱的读者，你的最后运算的结果真的是6吗？

我们说，只要你在运算中未出任何差错，那么最后的结果一定是6！比如说，你最初写的数是12，那么上述运算过程就是：

$$12 \xrightarrow{\text{乘以 } 4} 48 \xrightarrow{\text{减去 } 8} 40 \xrightarrow{\text{除以 } 2} 20 \xrightarrow{\text{减去 } 2} 18 \xrightarrow{\text{除以 } 2} 9 \xrightarrow{\text{加上 } 15} 24$$
$$\xrightarrow{\text{减去最初写的数 } 12} 24 - 12 = 12 \xrightarrow{\text{除以 } 2} 6$$

你看这最后的结果不是6是什么！

读者可能会想，你怎么知道我开始写的数是12呢？要不是12呢，结果还会是6吗？当然会是6，不信你再试几个，比如，开始写的是1，27，甚至是-8或 $\sqrt{2}$ ，都不会错。

但这个问题毕竟还是问得好！要解释这个问题，我们就要请代表数的字母，来揭示未卜先知的秘诀，显示代数的威力！

既然，读者最初写的数我们不知道它具体是什么，我们假设它就是那个可以代表数的字母 x 吧，这个 x 它可以变化无穷，只要最开始你写的数是什么，这个 x 就可以等于什么！

现在，设你写的数是 x ，则有：

$$\begin{aligned}
 x &\xrightarrow{\text{乘以 } 4} 4x \xrightarrow{\text{减去 } 8} 4x - 8 \xrightarrow{\text{除以 } 2} (4x - 8) / 2 = 2x - 4 \xrightarrow{\text{减去 } 2} \\
 (2x - 4) - 2 &= 2x - 6 \xrightarrow{\text{除以 } 2} (2x - 6) / 2 = x - 3 \xrightarrow{\text{加上 } 15} (x - 3) \\
 + 15 &= x + 12 \xrightarrow{\text{减去最初写的数 } x} (x + 12) - x = 12 \xrightarrow{\text{除以 } 2} 6
 \end{aligned}$$

看，秘诀就在这里！无论你最初写的是什么实数 x ，只要通过以上运算，就能把 x “弄掉”，最开始出现 $4x$ ，除以 2 以后出现 $2x$ ，再除以 2 就出现 x ，再减去你最开始写的数 x ， $x - x = 0$ ， x 就消失了！以上游戏如用代数式表示就是：

$$\frac{\frac{x \cdot 4 - 8}{2} - 2}{2} + 15 - x = 6$$

等式左边有 x ，而等式右边 x 消失了，就剩下一个具体的数 6。

至此，读者可能恍然大悟了，这个游戏原来如此简单！这个游戏的奥秘揭穿了之后，懂代数式运算的人大约都能变出更多的“未卜先知”的游戏来。在读下文之前，请你动手设计几个更巧妙的游戏！

以下是一个流传甚为广泛的猜扑克牌张数的游戏。先请对方摆上三堆牌，不过三堆牌的张数要一样多（具体摆多少张不必知道）。游戏开始，请对方先在第一堆中取出 2 张牌，放入第二堆中，再在第三堆中取出一张牌放入第二堆中，最后请暗中数一数第一堆中有多少张牌，就在第二堆中拿多少张还给第一堆，这时我们就知道，第二堆中有多少张牌！

第二堆中必然有 5 张牌！亲爱的读者，现在我们要请你来揭开其中的奥秘。（弄清以后，再读下文，这是读书的一个诀窍！）

如果以上游戏，在第一次是从第一堆中拿 a 张给第二堆，第二次是从第三堆中拿 b 张给第二堆，最后，第一堆中有多少牌，那么我们就在第二堆中取出多少张牌还给第一堆，我们列表来分析代数式的变化过程：