考研数学大纲配套用书
考研数学命题专家倾力推荐

高教版

考研数学
超级金讲

——全程复习一本通（数学三适用）

主编 贺惠军

高等教育出版社

- 涵盖 0~150 分所需全部技能
- 超同类书籍 1.5 倍的详细解析
- 对全部核心理论和难点内容的创新性总结
- 考研数学高分咨询 QQ 群 167405528

考研数学大纲配套用书
考研数学命题专家倾力推荐

高教版

考研数学超级金讲

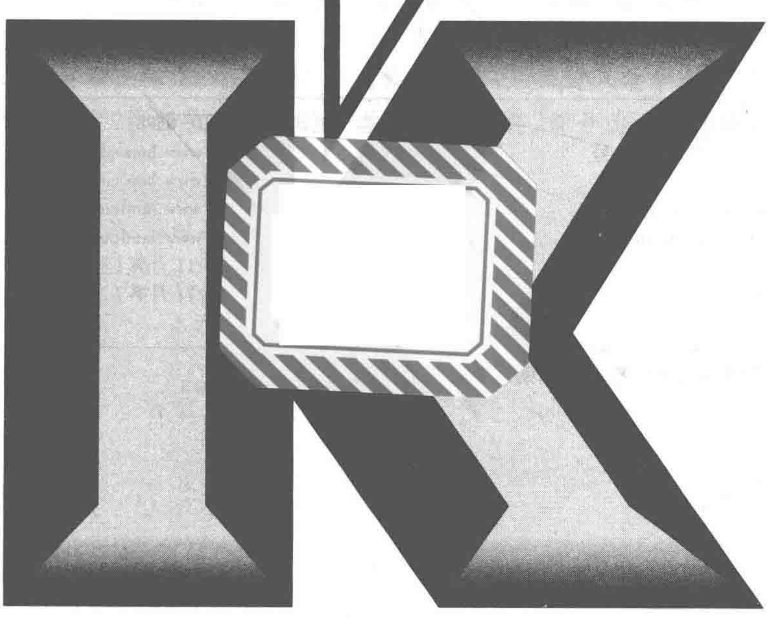
——全程复习一本通（数学三适用）

KAOYAN SHUXUE CHAOJI JINJIANG
QUANCHENG FUXI YIBENTONG (SHUXUE SAN SHIYONG)

主编　贺惠军

高等教育出版社·北京

- 涵盖 0~150 分所需全部技能
- 超同类书籍 1.5 倍的详细解析
- 对全部核心理论和难点内容的创新性总结
- 考研数学高分咨询 QQ 群 167405528



图书在版编目(CIP)数据

考研数学超级金讲：全程复习一本通 / 贺惠军主编
. --北京：高等教育出版社，2015.11
数学三适用
ISBN 978-7-04-043151-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①贺… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 136922 号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王 洋　　版式设计 杜微言
责任校对 陈旭颖　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	41.25	版　　次	2015年11月第1版
字　　数	1 020千字	印　　次	2015年11月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	69.00元

物 料 号　43151-00

出版前言

《考研数学超级金讲——全程复习一本通》是高等教育出版社凭借自身特殊资源优势，整合考研领域非常有影响力的命题研究专家、典型考研学生代表，历时多年编写而成，是一本非常有价值的考试参考书。

《考研数学超级金讲——全程复习一本通》的面市主要有两个目的：

1. 改变目前考研数学参考书本末倒置的讲授方式

数学作为一门严谨的基础学科，其学习的本质重在对基本概念、基本原理、基本方法和基本公式的透彻理解，适度的题型训练是掌握这些基本理论必不可少的环节。然而，现实却是，大量的考试参考书抛弃了这些基本理论的讲授，而代之以大量花哨的题型，让考生陷入为获取高分一定要在题海中痛苦浸泡的错觉。这是一种本末倒置的学习方式，耗时耗力且极其无效。实际上，数学中所有解题技巧的本源都来自对基本理论的深度理解，考研数学考试当然也不例外。在考研数学考试中，绝大部分需要用到技巧的难点问题都可以从基本定义中找到简单完整的解题思路。本参考书最突出的特色即在于此，我们对每一章中的关键定义、基本原理、基本方法和基本公式都予以较大篇幅的解析，并建立起这些基本理论与本章重点难点问题的对应关系，力争所有内容的讲解可以使一个具有中学数学基础起点的读者都能完全领会。我们相信，一本高品质的学习参考书是应该能最广泛地包容其全部可能读者的。

2. 改变考研数学学习枯燥无趣的现状

数学学科一直由于其高度理论化的内容而被大众认为是枯燥无趣的，其实这是一种错觉。当然，产生这种错觉的责任不在于读者，而在于一直以来呆板的教材形象。曾几何时，数学教材以充斥各种难以理解的符号为荣，以尽可能减少文字的解释来彰显写作的简洁为傲，这是一种抛弃读者自我陶醉的写作方式。时至今日，这一不合时宜的写作方式在考研数学参考书这一充满激烈竞争的领域仍没有得到太大改观。通观市面上的考研数学参考书，符号远多于文字解析。在本参考书中，我们努力尝试改变这一现状，这也是高等教育出版社义不容辞的责任——奉献给读者更通俗易懂的好教材。在本参考书中，我们对理论的阐述更多采用文字解析，从理论的口语解析过渡到标准的数学理论陈述，帮助读者形成数学直觉，从而进入数学理论理解的快速通道。

为了更好地服务读者，我们构建了考研数学服务 QQ 群，群号为：167405528，欢迎大家有问题或建议在此反馈及讨论。

高等教育出版社

2015 年 7 月

目　录

本书的特点及使用建议 …………………………………………………………… 1

第一部分　微积分学

第一章　函数　极限　连续 ………………… 4
考试内容 …………………………………… 4
考试要求 …………………………………… 4
基础理论金讲 ……………………………… 4
函数 …………………………………… 7
极限 …………………………………… 14
函数的连续与间断 ………………… 25
重难点专题金讲 ……………………………… 27
专题一　函数表达式的求解 ………… 27
专题二　极限的计算 ………………… 30
专题三　与极限相关的应用 ………… 44
专题四　函数连续性的应用 ………… 48
第二章　一元函数微分学 ………………… 52
考试内容 …………………………………… 52
考试要求 …………………………………… 52
基础理论金讲 ……………………………… 52
导数与微分 ………………………… 54
导数在研究函数性态方面的应用 ……… 63
重难点专题金讲 ……………………………… 68
专题一　各种复杂函数的导数计算及相关问题 ……………………… 68
专题二　导数在函数性态方面的应用实例分析 ……………………… 75
第三章　一元函数积分学 ………………… 83
考试内容 …………………………………… 83
考试要求 …………………………………… 83
基础理论金讲 ……………………………… 83
不定积分 ………………………………… 85
定积分 ………………………………… 97
反常积分 ……………………………… 112
重难点专题金讲 ……………………………… 119
专题一　微元法的重点应用 ………… 119
专题二　分段函数定积分的求解理论及应用 ……………………… 124
专题三　定积分的等式证明 ………… 130
专题四　不等式的证明 ………………… 132
第四章　中值定理及其应用(存在性证明问题) ……………………… 141
考试内容 …………………………………… 141
考试要求 …………………………………… 141
基础理论金讲 ……………………………… 141
闭区间上连续函数的性质 ………… 141
微分中值定理 ……………………… 142
积分中值定理 ……………………… 144
泰勒中值定理 ……………………… 145
重难点专题金讲 ……………………………… 145
专题　中值定理的综合应用 ………… 145
第五章　定积分在经济学中的应用 …… 159
第六章　多元函数微积分学 …………… 164
考试内容 …………………………………… 164
考试要求 …………………………………… 164
基础理论金讲 ……………………………… 164
二元函数的概念、极限与连续 ……… 165
偏导数与全微分 ……………………… 168
二元函数的极值与应用 ……………… 174
二重积分 ……………………………… 179

重难点专题金讲 …………………………… 191
专题一 复合初等显函数的偏导数的计算及其应用 …………………… 191
专题二 复合抽象函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的偏导数的计算及其应用 …………………… 195
专题三 隐函数微分法及其综合应用…… 204
专题四 复杂二重积分的计算及证明…… 208
第七章 无穷级数 …………………… 220
考试内容…………………………………… 220
考试要求…………………………………… 220
基础理论金讲 …………………………… 220
数项级数的敛散性 …………………… 221
幂级数的概念与敛散性 ……………… 234
幂级数的性质及函数的展开 ………… 243
重难点专题金讲 ………………………… 246
专题一 数项级数敛散性判断 ………… 246
专题二 将函数展开成幂级数 ………… 254
专题三 求简单幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 ………………………… 259
专题四 幂级数与微分方程的有关问题 ………………………… 264
第八章 常微分方程与差分方程 ……… 268
考试内容…………………………………… 268
考试要求…………………………………… 268
基础理论金讲 …………………………… 268
微分方程的基本概念及三种一阶方程的解法 ………………………… 269
二阶线性微分方程 …………………… 279
差分及一阶差分方程………………… 289
重难点专题金讲 ………………………… 296
专题一 微分方程与积分、偏微分之间的综合应用…………………… 296
专题二 与微分方程相关联的应用题…… 301

第二部分 线性代数

第一章 行列式 ……………………… 308
考试内容…………………………………… 308
考试要求…………………………………… 308
基础理论金讲 …………………………… 308
行列式的概念及性质………………… 309
行列式按行(列)展开 ………………… 315
低阶行列式计算以及相关问题 ……… 320
重难点专题金讲 ………………………… 325
专题 高阶行列式常用计算方法 ……… 325
第二章 矩阵 ………………………… 334
考试内容…………………………………… 334
考试要求…………………………………… 334
基础理论金讲 …………………………… 334
矩阵的基本概念与运算 ……………… 336
逆矩阵的概念及性质………………… 341
矩阵的初等变换与初等矩阵 ………… 352
矩阵的秩与分块矩阵………………… 356
重难点专题金讲 ………………………… 365
专题 矩阵的高次幂的运算及矩阵证明 ………………………… 365
第三章 向量 ………………………… 370
考试内容…………………………………… 370
考试要求…………………………………… 370
基础理论金讲 …………………………… 370
n 维向量 ……………………………… 371
向量组的线性相关性………………… 375
向量组的秩 …………………………… 387
第四章 线性方程组 ………………… 396
考试内容…………………………………… 396
考试要求…………………………………… 396
基础理论金讲 …………………………… 396
线性方程组的基本概念及克拉默

(Cramer)法则 …… 397
解齐次线性方程组 …… 400
解非齐次线性方程组 …… 412
重难点专题金讲 …… 422
专题　方程组的逆向问题与多方程组问题 …… 422
第五章　矩阵的特征值和特征向量 …… 432
考试内容 …… 432
考试要求 …… 432
基础理论金讲 …… 432
矩阵的特征值和特征向量 …… 433
相似矩阵及矩阵的相似对角化 …… 442
实对称矩阵的特征值和特征向量 …… 453
第六章　二次型 …… 461
考试内容 …… 461
考试要求 …… 461
基础理论金讲 …… 461
二次型的定义、矩阵表示及合同矩阵 …… 462
化二次型为标准形或规范形 …… 468
正定二次型和正定矩阵 …… 482

第三部分　概率论与数理统计

第一章　随机事件与概率 …… 491
考试内容 …… 491
考试要求 …… 491
基础理论金讲 …… 491
随机事件、基本事件空间及事件概率 …… 492
条件概率和独立性 …… 499
重难点专题金讲 …… 506
专题一　古典概型与几何概型 …… 506
专题二　全概率公式与贝叶斯公式的应用 …… 512
第二章　一维随机变量及其概率分布 … 518
考试内容 …… 518
考试要求 …… 518
基础理论金讲 …… 518
随机变量及其概率分布 …… 519
常用概率分布及其应用 …… 533
随机变量的函数分布 …… 545
第三章　多维随机变量及其分布 …… 552
考试内容 …… 552
考试要求 …… 552
基础理论金讲 …… 552
离散型随机变量的联合分布 …… 553
连续型随机变量的联合分布及两个重点分布 …… 565
随机变量的独立性及相关性 …… 572
多个随机变量的函数的概率分布 …… 576
重难点专题金讲 …… 587
专题　联合分布的综合应用 …… 587
第四章　随机变量的数字特征 …… 595
考试内容 …… 595
考试要求 …… 595
基础理论金讲 …… 595
随机变量的数学期望和方差 …… 596
协方差和相关系数 …… 604
矩和切比雪夫不等式 …… 611
重难点专题金讲 …… 612
专题　随机变量的数学期望和方差的计算与证明 …… 612
第五章　大数定律和中心极限定理 …… 621
考试内容 …… 621
考试要求 …… 621
基础理论金讲 …… 621
大数定律 …… 621
中心极限定理 …… 624
第六章　数理统计的基本概念 …… 629
考试内容 …… 629
考试要求 …… 629
基础理论金讲 …… 629

总体、样本、统计量和样本数字特征 …… 629
常用的统计抽样分布和正态总体的抽样分布 …… 635
第七章 参数估计 …… 644
考试内容 …… 644
考试要求 …… 644
基础理论金讲 …… 644
点估计 …… 644

本书的特点及使用建议

1. 始终如一的学习理念:学习的本质在于简化,学习的捷径在于对基本定义的内涵和外延的透彻理解

本参考书自始至终将基本定义的透彻讲解放在首位,一方面是因为这一至关重要的学习常识被大多数"名师"所忽略(也许是讲解例题比讲解基本概念更富有成就感),所以,我们觉得有义务提醒后来者加以重视;另一方面,在实践中我们发现,考生所遇到的大部分难题均是由于对定义理解深度不够所致(典型的如分段函数的积分问题、定积分的换元法等).实际上,考研数学试题中绝大部分所谓的重难点问题都可以从定义中找到简单的解决思路,本书正是基于基本定义而展开的.实际上纯净单一的学习思想能更快速地帮助考生对基本定义、基本原理、基本公式的准确掌握,从而能更加高效地应对各种试题的解答.

2. 贴合考生思考路径的体例设计

我们从考生的学习层面考虑,将知识的学习分为两个层级:易于掌握的知识和较难掌握的知识.我们将易于掌握的内容划入"基础理论金讲"部分讲授,将较难掌握的内容划归"重难点专题金讲"部分讲授,体现学习的层次性,同时也兼顾理论的完整性.对于每一章内容,我们将其划分为四大板块:

第一板块和第二板块分别是"考试内容"和"考试要求",帮助考生了解考试大纲要求,做到心里有底.

第三板块为"基础理论金讲".在这一板块,我们又创新性地将其划分为两部分.第一部分可视为本章的前言,从整体上分析并回答了六个关键问题:本章的内容、本章学习的关键点、本章在相应学科和考试中的地位和作用、本章的重难点和解决难点的关键、本章的知识结构及各知识板块之间的逻辑关系、本章内容组织的依据,并用思维导图方法构建起本章的知识框架图,有助于考生高屋建瓴地理解本章内容,更有助于复习后期的快速回顾.第二部分是具体理论知识的讲授.在这部分,我们充分考虑到考生一个短周期学习的完整性和理论内容的完整性,将每一章知识分解为若干个可在一个短的学习周期里完成的单元,即考生在复习过程中,单次复习可以以一节内容为目标量进行学习,更好地把握学习的节奏.

第四板块为"重难点专题金讲".在这一部分,我们将每章中较难理解或运用的理论以及本章中可能涉及的各种综合性较大、较为复杂的题型分为若干专题进行讲解,每个专题也可作为一个单次复习目标量.

在本书中,我们抛弃了以题型为主题的分类讲授,因为对于任何学科来说,题型是浩瀚无边、千变万化的,考生不易把握,而且题型带来的思维固化还可能带给考生致命的复习缺陷.只有基本理论才是不变的,也唯有扎实地掌握基本理论,我们才可以以不变应万变,这才是正道.

从内容结构可以看出,本参考书涵盖了考试的最低要求至最高要求的全部技能,如果完整地掌握了本书的内容,考试正常发挥的考生应该可以获得不低于140分的成绩(这在本参考书的多年编写阶段已做过完整测试).因此,选择本书的考生,它将一直伴你至考试结束.我们建议考

生先理解本书的内容，然后将书中的全部例题独立重做一遍，如此反复，直到能无任何障碍地独立解答全部例题即算是彻底掌握.

3. 独有知识层面的创新

这体现在以下两个方面：

（1）**在数学理论的讲解方面，采用口语解释引导至对其标准理论的阐述，然后再对标准理论做深入透彻的剖析**.口语化的解释一方面有助于考生形成数学直觉，达到对基本理论的快速理解，另一方面也可以改变数学呆板的理论形象. 如在讲解中值定理的时候，我们首先给出中值定理的口语解释——“连续函数在其区间范围中的取值理论”，然后过渡到对其标准理论的阐述：“连续函数$f(x)$在某区间I(或设为$[a,b]$)中存在一个ε，使函数或其导数在区间中的取值$f(\varepsilon)$或$f'(\varepsilon)$满足某一数值或某一数值范围的定理的总称.”再如讲解积分时，我们首先给出积分的口语解释——“对微小数学量的累积分析”，然后再过渡到标准理论，等等.

（2）**对核心理论或难点内容的创新性总结**.这一点几乎体现在每一章中. 下面就“微积分学”“线性代数”和“概率论与数理统计”三科内容分别列举几例.

“微积分学”第一章中，极限计算的难点和关键点——等价无穷小量替换. 一些辅导书要么完全忽略其替换原则，要么提到替换原则但却不能涵盖其全部的应用范围. 在此，本书发掘无穷小量替换背后的机理，提出一条简单可行的替换原则：等价无穷小量只要替换之后不直接等于0即可进行替换.

“微积分学”中，等式或不等式的证明题型千变万化，但本书在系统总结各教材之后，将该类题型划分为两大类——代数式证明和存在性证明，并对每大类题型给出普适且单一的解答思路.

“微积分学”不定积分的第二类换元法中，各辅导书均是直接将教材给出的7种公式搬入书中，对每种换元法机械地给出可能的应用范围，不加任何辨析. 殊不知，考生面对众多公式，常会感到无所适从，尤其是当积分出现不满足公式的情况时，更是不知所措. 在此，本书同样通过发掘第二类换元积分法背后的机理，用一句话简洁地概括出其使用思路：将不定积分中不能进行积分的式子通过变量代换转化为可以利用积分公式运算的积分，并给出详尽的应用方式.

“线性代数”向量的线性相关性中，各教材均给出了多达七八条判断方法（或性质），但本书在给出类似的性质之后，将全部内容总结为一句话：向量相关性判别的核心依据就是向量组的秩（=向量组构成矩阵的秩）与向量个数的比较.这一结论极大地简化了考生学习的负担. 类似还有正定矩阵的判定法则等.

“线性代数”中，有关线性方程组的问题众多，本书创新性地将方程组的全部问题归纳为两种类型——逆向问题和正面问题，并同样给出两种类型的普适性的解题思路.

“概率论与数理统计”中，本书创新性地引入数学建模思维，使得复杂的概率应用问题得以简化. 在多维随机变量函数分布中，其他辅导书单纯地给出众多的计算公式，本书则通过一系列严密的推导，给出了这类题普适性的单一解题思路，并详加解析.

以上仅是部分内容层面的创新，限于篇幅，不一一列举.

4. 例题千挑万选

书中所有例题都经过精挑细选，1 000 多道例题基本覆盖考研试题所有出现的可能，并与市面相对畅销的图书进行过逐一比对，我们相信，考生如果能够熟练掌握本书内容，足以轻松解决市面上95%以上的所谓主流参考书的全部问题（超纲除外）.

5. 无论是理论还是例题的讲授，均超同类书籍 1.5 倍以上的详尽解析

在理论解析方面，为了贯彻本书的核心理念“学习的捷径在于对基本定义的内涵和外延的透彻理解”，我们对所有稍有难度的理论，要么给出其背后的推导过程（这些推导过程有助于考生掌握解决某一类题型的数学理论），要么用通俗的语言阐述其背后的机理或手把手地教会考生其应用方法，如定积分的换元法.

对于较为复杂的一些公式，我们均给出巧妙的记忆方法. 如函数凹凸性的判断条件、极值的判断条件、微积分的运算公式、微分方程的各种试解形式等.

本书大部分例题的解析采用倒推法，遵照思维可遵循的路径从问题分析开始，一步一步向题目给出的条件靠拢，不漏掉任何一个环节，其解析详尽程度均至少超同类教材 1.5 倍以上.

第一部分　微积分学

第一章　函数　极限　连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

基础理论金讲

函数是微积分学中最核心的概念,也是经济理论模型化最重要的体现(经济学建模实质就是建立各经济变量之间的函数关系).准确理解函数的基本定义是化解后面章节重难点的关键

（如复合函数的求导、分段函数的积分等），而对函数基本定义的准确理解又依赖于对函数自变量的准确确认（这一点可能会让你感到诧异，但的确是事实.也许你会在后面解题不知所措的时候，你就会感受到它的重要性.这一微小但关键的知识点被我们绝大部分的初等和高等数学老师所忽略.学习的本质在于对基本定义的准确理解，忽略这一点，一味的强调题海战术或技巧都是本末倒置）.

极限是研究数列或函数无穷趋近于某一点的取值情况（但并非该点自身的取值）.极限是微积分学得以发展的最重要工具，微积分学的绝大部分概念都可以归结于某种特定形式的极限，如导数、微分、积分等.

连续是函数的重要性质之一，描述了函数在某一点或某一区间上无间断点的情况，或者用形象一点的说法就是函数的图形上没有空心点出现.只有当函数连续时，才更便于我们对函数的情况进行研究（这源于标准理论的结论一般取自最理想的情形假设，然后通过对条件的放松，逐步展开对更复杂情形的研究.函数中，连续函数即属于各类函数中最理想的状况）.

总体来说，本章的三部分内容构成了整个微积分学内容的基础，函数是微积分学的研究对象，极限则是我们研究函数的工具，而连续则限制了函数总体呈现的一种形态.本章考查的重点或难点主要体现在极限的计算上，这是每年必考内容，一般会出现在填空题或解答题之中.而大部分难度较大的极限计算又不外乎使用到两种方法，无穷小量替换和洛必达法则的反复应用.掌握这两种方法，本章的难点就烟消云散.因此，在本章的重难点专题二中，我们对极限的计算给予了较大篇幅的讲解，相信掌握该部分内容之后，对任何难度的极限计算问题都可以做到游刃有余.

鉴于与中学初等函数理论的衔接，本章在难点专题中还增加了函数表达式求解，当然这也有助于我们更深刻地理解函数的定义.函数连续性的内容不难，但在题目中多有应用，因此我们将函数连续性的应用也作为重难点专题之一加以详细讲解.本章的内容结构编写如下（内容结构图有助于我们快速构建每一章的知识框架，同时也便于学习完每一章之后的快速复习.通过浏览知识框架图，可以在大脑中很快过一遍全章的知识要点和重难点以及相应的题型和对策，所以希望大家对此予以重视.

- 函数 极限 连续
  - 基础理论金讲
    - 函数
      - 1. 函数的定义（关键点：自变量的确认）
        - 定义域
        - 函数值
        - 同一函数的判断（取决于定义域和函数关系，与表示符号无关）
      - 2. 基本性质
        - 单调性
        - 奇偶性
        - 周期性（与对称性的区别）
        - 有界性（判断的6个充分条件）
      - 3. 反函数
        - 变量确认
        - 与原函数之间的关系
        - 函数与反函数之间的转换
      - 4. 复合函数
        - 定义域
        - 函数之间的复合与拆分
      - 5. 隐函数、分段函数
      - 6. 基本初等函数
      - 7. 初等函数（关键点：幂指函数的 e 幂函数转换）
    - 极限
      - 1. 数列极限
      - 2. 函数极限
        - 极限概念的理解（左极限、右极限）
        - 极限存在定理
      - 3. 无穷小量
        - 函数极限与无穷小量转换定理及其应用
        - 性质（和、差、积、商）
        - 无穷小量的比较（难点：多个无穷小量之间的比较）
        - 等价无穷小量替换 基本原则：等价无穷小量在替换之后不直接得到 0 值
      - 4. 无穷大量（不取零值的无穷小量的倒数）
      - 5. 性质
        - 唯一性
        - 局部有界性
        - 局部保号性
      - 6. 极限存在的判别准则
        - 夹逼定理
        - 单调有界定理（关键点：证明思路）
      - 7. 两个基本极限与两个重要极限
    - 连续
      - 1. 定义
      - 2. 函数的间断点及其分类（分类依据：函数在该点左右极限的不同状况）
      - 3. 连续函数的性质
      - 4. 闭区间上连续函数的性质（重点）
        - 有界性定理
        - 最大（小）值定理
        - 介值定理
        - 根的存在定理（零点定理）
  - 重难点专题金讲
    - 专题一 函数表达式的求解
      - 1. 求解分段函数的复合函数的表达式
      - 2. 由函数的奇偶性与周期性构造函数
    - 专题二 极限的计算
      - 1. 极限计算的基本思路
      - 2. 极限计算的具体方法
        - 四则运算法则
        - 等价代换（重点）
        - 洛必达法则（重点）
        - 带佩亚诺余项的泰勒公式
        - 夹逼定理
        - 积分中值定理
        - 拉格朗日中值定理
        - 级数收敛条件
    - 专题三 与极限相关的应用
      - 1. 参数值求解
      - 2. 极限定义的函数表达式
      - 3. 极限运算定理的正确运用
    - 专题四 函数连续性的应用
      - 1. 函数连续与间断的讨论
      - 2. 连续条件下的参数求解

——函　　数——

一、函数的定义

定义 1.1.1　设 x 与 y 是两个变量(不断发生变化的量).如果变量 x 在某一范围中任取一个数值时,变量 y 按照一定的规则总有一个确定的值和这个 x 值对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫作**自变量**(自身不断发生变化的量),y 叫作**因变量**(因 x 的变化而变化的量),f 表示由 x 确定 y 值的**对应法则**(或者通俗一点说,是两者满足的关系原则).这时也说变量 y 与 x 有函数关系.x 的取值范围称为函数的**定义域**,y 的取值范围称为函数的**值域**.

定义中给出的函数表示方式为 $y=f(x)$.实际上,这只是函数表示的方式之一,我们称之为公式(解析)法.函数还有其他表示方式,如表格法、图示(图像)法等,这在中学时都已经有过说明,此处不再赘述.

注　函数是整个高等数学中最核心的概念,透彻理解函数定义对后面内容的学习大有裨益,因此有必要在此对其定义做些说明:

(1) 函数自变量的确认.在函数的定义中,我们把自变量记为 x,因变量记为 y,对应法则记为 f,所以函数 $y=f(x)$ 表示因变量 y 在对应法则 f 下与自变量 x 之间的对应关系.相对应的,如果有函数 $y=f(\sqrt{x})$,表示的就是因变量 y 与自变量 $\sqrt{x}$ 在对应法则 f 下的对应关系.在这里,函数 $y=f(\sqrt{x})$ 的自变量不是 x,而是 $\sqrt{x}$.实际上,所有的形如 $y=f(\ *\ )$ 的函数,无论括号内是单个变量 x 还是由含有 x 的代数式构成,它所确定的自变量是整个括号内的内容(实际上,括号的目的就是表示括号内的整体为自变量).再如,$y=f(\sqrt{x}-1)$ 所确定的是因变量 y 与自变量 $\sqrt{x}-1$ 之间的函数关系.因此,在后面的复合函数求导中,如果有函数 $y=f[\varphi(x)]$,则 $f'[\varphi(x)]$ 表示的不是 y 对 x 的导数,而是 y 对以函数 $\varphi(x)$ 为自变量的求导,即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi(x)}$.因为导数 $f'[\varphi(x)]$ 的自变量为 $\varphi(x)$,要想表示该复合函数对 x 的导数,只能用 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'[\varphi(x)]\cdot\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$.

(2) 变量 x 与 y 之间的依赖关系.从函数的定义可以看出,函数实质是反映满足一定规则的两个事件(x 代表的事件和 y 代表的事件)的数学模型,x,y 只是两个事件的数学替代符号,因此当两个事件的关系(即对应法则)给定,我们可以用任何符号来替代事件建立对应的数学模型,即函数与变量用什么符号表示是无关的,这一点和定积分与积分变量符号的无关性是相似的.用数学语言阐述就是,函数由定义域 $D(f)$ 和对应法则 f 两个因素决定,定义域 $D(f)$ 和对应法则 f 给定,一个函数就完全确定.它与自变量和因变量用什么符号表示无关.

为了帮助大家对这两点有更好的理解,下面用两个例题来进行说明.

例 1.1.1　已知 $y=f(\sqrt{x}-1)=x$,求 $f(x)$ 的表达式.

分析　因为 $y=f(\sqrt{x}-1)$ 的自变量是 $\sqrt{x}-1$,而题目求的是以 x 为自变量的函数关系,需要用到变量代换.令 $t=\sqrt{x}-1\Rightarrow x=(t+1)^2$,于是 $f(t)=(t+1)^2$.因为函数与自变量及因变量用什么符号表示无关,因此将 $f(t)=(t+1)^2$ 中的自变量符号 t 用 x 替换,得到 $f(x)=(x+1)^2$,于是,所求函数

的表达式为 $f(x)=(x+1)^2$.

例 1.1.2 已知 $f(x)=(x+1)^2$,求 $f[f(x)]$.

分析 $f[f(x)]$是以 $f(x)$ 为自变量的函数.从 $f(x)=(x+1)^2$ 我们知道,函数的因变量与自变量的对应法则是:自变量加 1 的平方.$f[f(x)]$的自变量为 $f(x)$,故 $f[f(x)]=[f(x)+1]^2=[(x+1)^2+1]^2$.

(3) 在有关函数概念的问题中,下面三个问题必须弄清楚.

① 会求函数的定义域.

如果函数用公式法给出,没有赋予实际意义,其定义域通常称为自然定义域,就是使函数表达式有意义的自变量的全体.利用等量关系建立起来的实际问题的函数关系,其定义域要由问题的实际意义来确定.

自然定义域的求法:

1° 若 $f(x)=\sqrt[2n]{u(x)}$,其中 n 为正整数,则 $D(f)=\{x \mid u(x)\geqslant 0, x\in \mathbf{R}\}$.

2° 若 $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$,则 $D(f)=\{x \mid u(x)\neq 0, x\in \mathbf{R}\}$.

3° 若 $f(x)=\log_a u(x)$,其中 $a>0, a\neq 1$,则 $D(f)=\{x \mid u(x)>0, x\in \mathbf{R}\}$.

4° 若 $f(x)=\arcsin u(x)$ 或 $f(x)=\arccos u(x)$,则 $D(f)=\{x \mid -1\leqslant u(x)\leqslant 1, x\in \mathbf{R}\}$.

5° 函数的和、差、积的定义域是每个函数定义域的交集.对于商,由于$\dfrac{u(x)}{v(x)}=u(x)\dfrac{1}{v(x)}$,可以按积来处理.

6° 分段函数的定义域是各个"分段"函数定义域的并集.

② 会求一点的函数值.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的值记为 $y=f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$,即用 x_0 代替 x 得 $f(x_0)$.此处 x_0 可以是某个实数,也可以是一个代数式(如例 1.1.2 中求 $f[f(x)]$).

③ 会判断两个函数是否为同一函数.

断言两个函数相同,必须从定义域和对应法则两个方面考虑.只有两个函数的定义域相同且对应法则也相同时,两个函数才相同.否则,两个函数不是同一个函数.

以上三个问题是中学要求掌握的内容.在此,我们通过几个例题对它的内容做一个简单的复习.

例 1.1.3 求下列函数的定义域.

(Ⅰ) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$;

(Ⅱ) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(x+3)$ 的定义域.

解 (Ⅰ) $\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8,\\ x(x-2)\leqslant 0,\\ 2x>1,\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$ 或 $1<x\leqslant 2$,即所求定义域

为$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

（Ⅱ）因为$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$所以$f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1,\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ -2, & -2<x\leqslant -1,\end{cases}$故$f(x+3)$的定义域为$[-3,-1]$.

二、函数的基本性质

一般来说，函数的基本性质主要有四个方面的内容，即单调性、奇偶性、周期性和有界性.

1. 单调性

定义 1.1.2　设函数$y=f(x)$在某区间I内有定义，任取$x_1,x_2\in I$，且有$x_1<x_2$.若恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在I内**单调增加**；若恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在I内**单调减少**.单调增加和单调减少统称为**单调**.

【判断单调性的方法】

通常利用导数判断.函数在区间内的导数总大于0，则函数是单调递增的；反之则是递减的.而如果函数在区间内的导数总是大于或等于0，我们称其为单调不减函数（因为在导数为0的时候，函数的值虽然不再增加，但也不减少，所以称其为单调不减函数）；反之，则为单调不增函数.

函数的单调性在不等式的证明中有着非常重要的应用，这在后面的一元积分学中有专题详细地讲解，在此只做简单的提醒.

2. 奇偶性

定义 1.1.3　设函数$f(x)$在实数集D上有定义，且D关于原点对称.若任取$x\in D$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**；若任取$x\in D$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**.

【判断奇偶性的方法】

（1）函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件.因此，函数定义域不对称于原点的，则一定是非奇非偶函数.若$f(x)$的定义域关于原点对称时，计算$f(-x)$，并将$f(-x)$与$f(x)$及$-f(x)$进行比较，再依据定义判断函数的奇偶性.

（2）关于奇偶性，还有下述结论：

① 奇函数×奇函数为偶函数.

② 偶函数×奇函数为奇函数.

③ 偶函数×偶函数为偶函数.

④ 奇函数与奇函数复合为奇函数.

⑤ 偶函数与偶函数复合为偶函数.

⑥ 偶函数与奇函数复合为偶函数.

⑦ 任一定义在对称于原点的数集D上的函数$f(x)$，必可分解成一个奇函数与一个偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

3. 周期性

定义 1.1.4　设函数$f(x)$在集合D上有定义，如果存在常数$T>0$，使对任意的$x\in D$，有$x+T$