



高等数学教学中的 问题驱动设计

主 编 / 庞 坤

问题驱动设计

湖南师范大学出版社

本书为河北省高等教育教学改革研究项目“面向卓越工程师培养诉求的大学数学研究与实践——基于 STS 教育”(2015GJJG248)、河北省高等学校人文社会科学研究教育科学规划项目“研讨式教学在大学数学类课程教学中的应用研究”(GH152021)阶段性研究成果

高等数学教学中的 问题驱动设计



主 编 | 庞 坤

副主编 | 段耀勇 李秀林
高秋菊 邵红梅

参 编 | 海 红 高 岩
于冬梅



湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教学中的问题驱动设计 / 庞坤主编. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2015. 8

ISBN 978-7-5648-2217-0

I. ①高… II. ①庞… III. ①高等数学—教学研究—高等学校 IV. ①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 189014 号

高等数学教学中的问题驱动设计

庞 坤 主 编

组稿编辑 | 周基东

责任编辑 | 廖小刚

责任校对 | 施 游

出版发行 | 湖南师范大学出版社

地址: 长沙市岳麓山 邮编: 410081

电话: 0731. 88873070 88873071

传真: 0731. 88872636

网址: www.hunnu.edu.cn/press

经 销 | 湖南省新华书店

印 刷 | 湖南雅嘉彩色印刷有限公司

开 本 | 710 mm × 1000 mm 1/16

印 张 | 15

字 数 | 320 千字

版 次 | 2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

书 号 | ISBN 978-7-5648-2217-0

定 价 | 39.80 元

前 言

《高等数学教学中的问题驱动设计》是河北省高等教育教学改革研究项目“面向卓越工程师培养诉求的大学数学研究与实践——基于 STS 教育”(2015GJJG248)、河北省高等学校人文社会科学研究教育科学规划项目“研讨式教学在大学数学类课程教学中的应用研究”(GH152021)的研究成果之一。

问题是数学教学的出发点和动力. 问题驱动是教师将学生所学的知识以问题的方式呈现, 驱动学生更好地参与学习活动. 有效的问题设计能驱动学生对相关知识的理解和建构, 激发学生对数学知识探究的乐趣, 提高学生的思维能力. 因此, 把高等数学课程中的重点、难点和容易产生疑惑的地方以问题驱动的方式呈现, 将实现对一般教材的再创造, 提高数学教学的效率.

本书对于缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学生非常适合, 本书的编者一直从事数学基础课教学, 具有丰富的教学经验, 本书充分体现出编者这些宝贵的教学经验.

本书也非常适合担任讲授高等数学课程的教师, 特别是刚从事教师工作的青年教师, 引导他们

去提出问题、探讨问题、解决问题,本书给他们提供了很好的借鉴作用。

本书的内容框架由庞坤确定,在各位作者的通力合作、集体讨论和共同努力下完成了编写工作。本书内容为十二章,各章具体分工如下:前言由庞坤撰写;第一章由庞坤、海红、于冬梅共同撰写;第二章由海红撰写;第三章由段耀勇撰写;第四章由高秋菊撰写;第五章由邵红梅撰写;第六章由于冬梅撰写;第七章由李秀林撰写;第八章由高岩撰写;第九章由段耀勇、高岩共同撰写;第十章由高秋菊撰写;第十一章由庞坤撰写;第十二章由邵红梅、李秀林共同撰写。真诚感谢湖南师范大学出版社廖小刚编辑及同仁的辛勤劳动!

在本书的编写过程中,虽然我们付出了很多的努力,但不妥之处恐不能免,恳请读者提出宝贵意见,不胜感激!

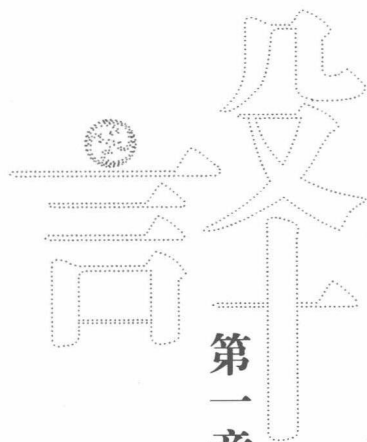
目 录

001	第一章 函数与极限
002	1.1 映射与函数
016	1.2 数列的极限
021	1.3 函数的极限
023	1.4 无穷小与无穷大
026	1.5 极限的运算法则
027	1.6 极限存在准则 两个重要极限
030	1.7 无穷小的比较
031	1.8 函数的连续性与间断点
035	1.9 函数连续的运算与初等函数的连续性
039	1.10 闭区间上函数连续的性质
041	第二章 导数
042	2.1 导数的概念
044	2.2 函数的求导法则
046	2.3 高阶导数
047	2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
049	2.5 函数的微分
053	第三章 微分中值定理与导数的应用
054	3.1 关于微分中值定理的讨论
058	3.2 洛比达法则
060	3.3 泰勒公式

064	3.4	函数的单调性与曲线的凹凸性
065	3.5	函数的极值与最大最小值
067	3.6	函数图形的描绘
069	3.7	曲率
071	3.8	方程的近似解
073		第四章 不定积分
074	4.1	不定积分的概念及性质
077	4.2	换元积分法
079	4.3	分部积分法
081	4.4	几种特殊类型的积分
083		第五章 定积分
084	5.1	定积分的概念与性质
090	5.2	微积分基本公式
094	5.3	定积分的换元法和分部积分法
097	5.4	反常积分
103		第六章 定积分的应用
104	6.1	定积分的元素法
108	6.2	定积分在几何上的应用
109	6.3	定积分的物理应用
111		第七章 微分方程
112	7.1	微分方程的基本概念
113	7.2	可分离变量的微分方程
115	7.3	齐次方程
116	7.4	一阶线性微分方程
118	7.5	可降阶的高阶微分方程
120	7.6	高阶线性微分方程

122	7.7 常系数齐次线性微分方程
123	7.8 常系数非齐次线性微分方程
125	第八章 空间解析几何与向量代数
126	8.1 向量及其线性运算
129	8.2 数量积 向量积 混合积
132	8.3 曲面及其方程
134	8.4 空间曲线及其方程
135	8.5 平面及其方程
138	8.6 空间直线及其方程
139	第九章 多元函数微分法及其应用
140	9.1 多元函数的基本概念
143	9.2 偏导数
149	9.3 全微分
151	9.4 多元复合函数的求导法则
154	9.5 隐函数的求导公式
155	9.6 多元函数微分学的几何应用
157	9.7 方向导数与梯度
159	9.8 多元函数的极值及其求法
161	第十章 重积分
162	10.1 二重积分的概念与性质
163	10.2 二重积分的计算法
172	10.3 二重积分的应用
173	10.4 三重积分
179	第十一章 曲线积分与曲面积分
180	11.1 对弧长的曲线积分
185	11.2 对坐标的曲线积分

192	11.3	格林公式及其应用
194	11.4	对面积的曲面积分
198	11.5	对坐标的曲面积分
202	11.6	高斯公式
206	11.7	斯托克斯公式
211		第十二章 无穷级数
212	12.1	常数项级数的概念与性质
215	12.2	常数项级数的审敛法
221	12.3	幂级数
224	12.4	函数展开成幂级数
228	12.5	函数的幂级数展开式的应用
228	12.6	函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质
229	12.7	傅里叶级数
231	12.8	一般周期函数的傅里叶级数
232		参考文献



第一章

函数与极限

1.1 映射与函数

问题 1 我们知道,函数可用数学运算公式来表示.这样表示的函数,其对应关系 f 究竟是什么意思?

例如,多项式:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

的函数关系 f 是什么意思?

我们观察上式右端,给定 x 的一个值,通过对应关系

$$(\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1,$$

确定函数 $f(x)$ 的一个值,因此函数关系 f 是:

$$(\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1$$

这一系列运算.

又如,函数

$$f(x) = \log \sin[3x + 1]$$

的函数关系 f 是下列运算

$$\log \sin[3(\quad) + 1],$$

即对给定 x 的一个值,先乘 3 再加 1,取 $\sin$,最后取 $\log$,而得到函数 $f(x)$ 的值.这里我们把 $\sin$ 、 $\log$ 都看成数学运算.以后取指数、对数、三角函数及反三角函数都看成数学运算.

综上所述,由一个分析表达式所表示的函数,其函数关系 f 是一系列的数学运算.

问题 2 设 $f(x) = ax$, $g(x) = ax^2$,问 $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f[f(x)]$ 是一样吗? $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 是一样吗?

不难验证:

$$f(x^2) = a(x^2) = ax^2,$$

$$[f(x)]^2 = (ax)^2 = a^2x^2,$$

$$f[f(x)] = f(ax) = a(ax) = a^2x.$$

三者之间是不一样的.又

$$f[g(x)] = f(ax^2) = a(ax^2) = a^2x^2,$$

$$g[f(x)] = g(ax) = a(ax)^2 = a^3x^2,$$

也是不一样的.

问题 3 如果 $y = c$ (常数), 那么, y 能否为某个变量 x 的函数呢?

我们将 $y = c$ 改写为

$$y = c + 0 \cdot x,$$

于是对于 x 的一个值, 通过对应关系: $c + 0(x)$, 皆有 y 的一个值 c 与之对应. 这里, 对于 x 取不同的值对应的 y 都取同一个值. 由于函数定义只要求对于 x 的一个值, 皆有 y 的一个值与之对应, 并未要求对应 x 的不同值 y 取不同的值, 故 y 取同一值也并不违背函数的定义, 因此 $y = c$ 是某个变量的函数.

问题 4 用列表法所表示的函数和用图示法所表示的函数, 它们的函数关系 f 是什么意思?

由函数的定义可知, 函数关系 f 就是自变量与因变量的对应关系. 列表法的对应关系是通过一张表所给定的, 因此, 就列表法所表示的函数来说, 它的函数关系 f 就是表中所反映的对应规律. 图示法的对应关系是通过一个图形所给定的, 因此, 就图示法所表示的函数来说, 它的函数关系 f 就是图形所反映的对应规律.

无论什么方式所表达的函数, 我们都可借助下面直观形象, 来加深对函数关系 f 的理解, 现将函数关系 f 比作一部“数值变化器”. 把定义域中的每一个值 x 输入到“数值变化器”中, 通过 f 的“作用”, 输出出来的就是值域中的函数值 $f(x)$ (图 1-1).

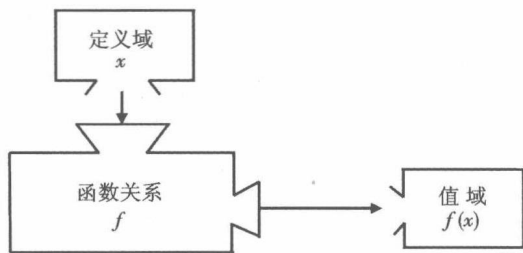


图 1-1

问题 5 一克水(冰)从外界所吸取的热量 Q 与其温度 T 之间, 由物理学可知有如下关系: 当 T 由 -10°C 变到接近 0°C 时, $Q = 0.5T + 5$; 当 $T = 0^\circ\text{C}$ 时, $Q = 45$; 当 T 由大于 0°C 变到 10°C 时, $Q = T + 85$, 把这个式子合写起来, 记为

$$Q = f(T) = \begin{cases} 0.5T + 5 & (\text{当 } -10^\circ\text{C} \leq T < 0^\circ\text{C} \text{ 时}), \\ 45 & (\text{当 } T = 0^\circ\text{C} \text{ 时}), \\ T + 85 & (\text{当 } 0^\circ\text{C} < T \leq 10^\circ\text{C} \text{ 时}). \end{cases}$$

问 Q 是 T 的函数吗?

由函数定义, 对于 $-10\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T \leq 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ 中的任一数值 T_0 皆有 Q 的一个值 Q_0 与之对应. 例如, $T_0 = -3\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时, 按上式

$$\begin{aligned} Q_0 &= f(T_0) = 0.5T_0 + 5 \\ &= 0.5 \cdot (-3) + 5 = 3.5. \end{aligned}$$

因此, Q 是 T 的函数, 其函数图形见图 1-2.

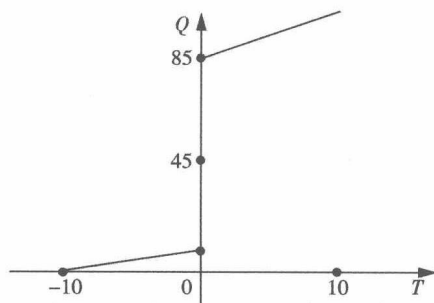


图 1-2

注意: 当 $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时, 图象是断开的.

由此可见, 函数也可以由几个式子结合起来表达, 这种函数称为分段函数.

问题 6 关于任一实数 x , 对应的 y 是不超过 x 的最大整数 $[x]$, 问 y 是 x 的函数吗?

由于符号 $[x]$ 的意思是不超过 x 的最大整数, 如,

$$[3.5] = 3, [3] = 3, [0] = 0, [-0.9] = -1, [-3.5] = -4,$$

因此, 对于任意实数 x , 都有一个不超过 x 的最大整数 $[x]$ 与之对应, 于是由函数的定义可知, $y = [x]$ 是 x 的函数, 它也是一个分段函数(图 1-3).

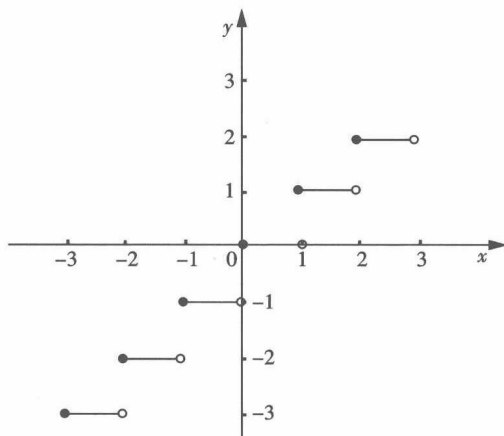


图 1-3

问题 7 当 x 是有理数时, 对应 $y = 1$; 当 x 是无理数时, 对应 $y = 0$. 问 y 是 x 的函数吗?

由于对于任一实数 x , 它不是有理数便是无理数, 当 x 为有理数时, y 有一

个确定的值 1 与之对应,当 x 为无理数时, y 有一个确定的值 0 与之对应,因此, y 是 x 的函数,记为:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } x \text{ 为有理数时}), \\ 0 & (\text{当 } x \text{ 为无理数时}), \end{cases}$$

称为狄利克莱函数.

虽然 $D(x)$ 是定义在整个实数轴上的函数,但它既不能用通常的数学运算分析式来表示,也不能用图示法和列表法来表示.

问题 8 分析表达式的函数 $y = f(x)$, 它的定义域与函数关系 f 有什么关系?

我们从分析具体函数入手.

例如,函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域是: $a \leq x \leq b$, 这个定义域之所以不能取 $x < a$ 或 $x > b$, 是因为受函数关系 $f: \sqrt{[(\quad) - a][b - (\quad)]}$ 的限制. 又如, 函数 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的定义域是 $x \neq 1$ 和 $x \neq -1$ 的一切实数, 这个定义域之所以不能取 $x = 1$ 和 $x = -1$, 也是受函数关系 $f: \frac{1}{1-(\quad)^2}$ 的限制.

由此看到, 函数的定义域是由函数关系 f 所确定的, 这是问题的一方面. 另一方面, 函数的定义域是否统统都由函数关系确定呢? 例如, 自由落体: $s = \frac{1}{2}gt^2$ 就是由实际运动情况所确定的, 它的定义域是: t 从落体开始下落的时刻 t_0 算起直到落地时刻 t_1 为止, 即 $t_0 \leq t \leq t_1$, 如果单纯从数学上看, 则函数 $y = ax^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$.

到此, 我们可以综述如下: 对于我们将仔细研究的初等函数, 它的定义域是由其函数关系所确定的, 但对实际问题和特定问题来说, 函数的定义域则由所论问题的实际情况来确定.

问题 9 函数 $f(x) = 3x^2 (1 \leq x \leq 3)$ 和 $g(x) = 3x^2 (4 \leq x \leq 6)$ 是同一函数吗?

同一函数是指对于定义域中的任一值, 都有相同的函数值与之对应. 也就是说, 有相同的函数关系与相同的定义域的两个函数才是同一函数. 现在虽然函数关系都是 $3(\quad)^2$, 但一个定义域是 $1 \leq x \leq 3$, 另一个定义域是 $4 \leq x \leq 6$, 所以, 这两个函数不是同一函数.

问题 10 对于 x 的同一值, y 取不同的值是不是函数?

例如, $y = \pm \sqrt{x}$.

因为函数定义, 要求对于 x 的一个值, 对应 y 的一个确定的值, 现在对应

两个, 所以它不是函数. 如果将函数定义稍加推广, 允许对于 x 的一个值, 对应 y 的两个或两个以上的值, 则这种推广以后的函数称为多值函数. 此处, $y = \pm\sqrt{x}$ 是多值函数. 对于多值函数以后我们仅研究它的单值分支. 如 $y = \sqrt{x}$ 或 $y = -\sqrt{x}$.

问题 11 在单调函数的定义中, 所取的 x_1 和 x_2 是任意的, 这个任意性能否去掉?

如果将 x 的任意性去掉, 只讲在区间内取某两个 x_1 与 x_2 , 且当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 这时并不能断言函数 $f(x)$ 在区间上是单调增加的.

例如: 函数 $f(x) = x^2 (-\infty < x < \infty)$, 取 $x_1 = -1, x_2 = 2$, 有 $f(2) = 4 > f(-1) = 1$, 但函数在 $(-\infty < x < \infty)$ 上不是单调增加的(图 1-4).

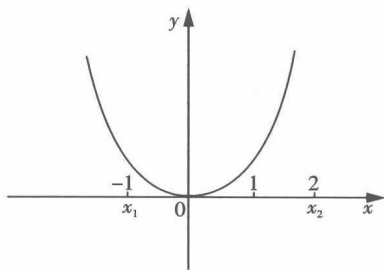


图 1-4

问题 12 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加, 如果将区间 (a, b) 缩小, 函数还是单调增加吗? 如果将区间 (a, b) 扩大, 函数还保持其单调性吗?

由于函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加的, 因此在此区间的任一部分上仍为单调增加, 所以当区间缩小时, 其单调性不变. 倘若将区间扩大, 即使函数有定义, 但也不一定保持原来的单调性.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0 < x < \infty)$ 上是单调增加的, 在 $(-1 < x < \infty)$ 上就不是单调函数.

由此可知, 函数的单调性是对它的定义区间来说的, 离开区间就没有意义.

问题 13 根据上面的分析, 我们似乎可以作出如下的判断: 一个非单调的函数总可以分成若干段, 在某一段上或者单调增加或者单调减少或者不增不减. 即除函数为常数外, 总可以把一个非单调的函数分成若干个单调函数. 这个论断正确吗?

对某些函数, 例如多项式函数, 这个论断是对的. 但对一般函数来说, 则不正确.

例如, 狄利克莱函数在任意小的区间上都不是单调函数.

问题 14 函数有界与有上界或有下界是什么关系?

如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界, 按定义, 则有 $M > 0$, 对于 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有 x 的值, 皆有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

即 $-M \leq f(x) \leq M$.

于是 $f(x)$ 有上界 $-M$ 和下界 M . 因此, 有界函数既有上界又有下界.

反之, 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 上既有上界 p 又有下界 q , 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上一定有界.

事实上, 由

$$q \leq f(x) \leq p,$$

我们令 M 是 $|q|$ 和 $|p|$ 的最大值, 则

$$-M \leq f(x) \leq M,$$

$$\text{即 } |f(x)| \leq M.$$

综上所述, 可以叙述成下面的定理.

定理 1 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 (a, b) 上既有上界又有下界.

注 仅有上界或仅有下界的函数并不能断言函数是有界的.

问题 15 在上面的两个定义中, 都有“对于 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有 x 的值”这句话. “所有”应怎样理解? 能否换成“某些”呢?

“函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内所有 x 的值”的“所有”二字是指 $f(x)$ 取 (a, b) 内全部的值或一切的值, 而不是指 (a, b) 内某一部分的值或某几个值. 如果定义中, 将“所有”换成“某些”, 则上述定义只能说 $f(x)$ 在 (a, b) 内某些 x 的值是有界的, 而不能说 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

例 函数 $y = \frac{1}{x} + 2$ 在 $(-\infty, a](a < 0)$ 及 $[b, +\infty)(b > 0)$ 上皆有界. 但在它的定义域上无界(图 1-5).

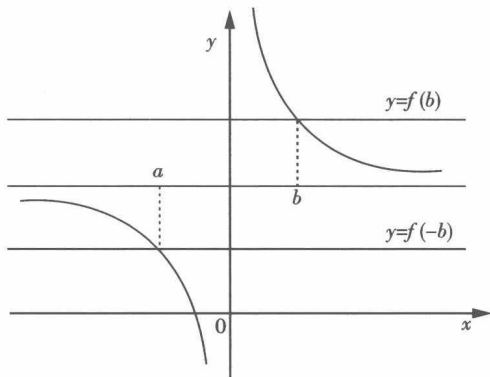


图 1-5

问题 16 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界, 如果将区间 (a, b) 缩小, 函数还是有

界的吗?如果将区间 (a,b) 扩大,其结果又如何?

因为在 (a,b) 内的有界函数 $f(x)$,必满足

$$|f(x)| \leq M \quad (M \text{ 是一个正数}).$$

当 (a,b) 缩小时,上式仍然成立,因此 $f(x)$ 在缩小后的区间内仍是有界的. 但将 (a,b) 扩大,则 $f(x)$ 在扩大了区间内就不能肯定它是有界的. 如上例,函数 $y = \frac{1}{x} + 2$ 在 $[b, +\infty)$ ($b > 0$) 上是有界的,但在 $(0, +\infty)$ 上却不是有界函数.

由此可知,函数的有界性是对它的定义区间来说的,离开定义区间便没有意义.

讨论到这里,我们发现还有一些函数不是有界的,例如 $y = \frac{1}{x}$,在区间 $(0, 1]$ 上的函数图形就不夹在二平行线 $y = p$ 和 $y = q$ 之间,不管 p 取多大,总有某个函数值它所对应的点 $M(x_0, f(x_0))$ 在直线 $y = p$ 之上(图1-6). 象这样不是有界的函数称为无界函数. 从图1-6可以看出:无界函数缩小它的定义区间可能为有界函数. 如取 $[\frac{1}{100}, 1]$,则 $y = \frac{1}{x}$ 在这个缩小了的区间上是有界函数;若将无界函数的定义区间加以扩大,则在这个扩大的区间上函数仍旧是无界的(图1-6).

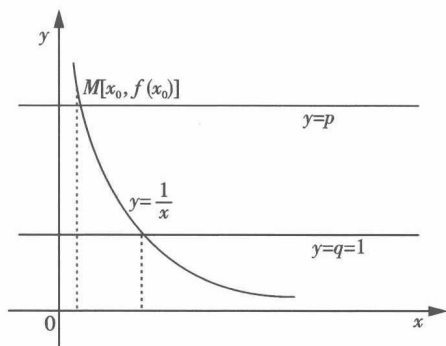


图 1-6

问题 17 函数的奇偶性与其定义区间有何关系?

首先,一个函数如果为奇函数或者偶函数,则要求其定义区间必须是一个对称数集. 所谓对称数集是指:如果 x 是数集 M 中的任一数,而数 $-x$ 也是属于这个数集中的数,则称数集 M 是对称的. 例如,一切整数的集合是对称数集,闭区间 $[-1, 1]$ 或区间 $(-2, 2)$ 都是对称数集. 如果定义区间不是对称的,