高等数学教学中的问题驱动设计

主　编/庞　坤

湖南师范大学出版社

本书为河北省高等教育教学改革研究项目“面向卓越工程师培养诉求的大学数学研究与实践——基于 STS 教育”（2015GJJG248）、河北省高等学校人文社会科学研究教育科学规划项目“研讨式教学在大学数学类课程教学中的应用研究”（GH152021）阶段性研究成果

高等数学教学中的问题驱动设计

主　编｜庞　坤

副主编｜段耀勇　李秀林
　　　　高秋菊　邵红梅

参　编｜海　红　高　岩
　　　　于冬梅

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教学中的问题驱动设计 / 庞坤主编．—长沙：湖南师范大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5648-2217-0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①庞…　Ⅲ.①高等数学—教学研究—高等学校　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 189014 号

高等数学教学中的问题驱动设计

庞　坤　主编

组稿编辑｜周基东
责任编辑｜廖小刚
责任校对｜施　游
出版发行｜湖南师范大学出版社
　　地址：长沙市岳麓山　邮编：410081
　　电话：0731.88873070　88873071
　　传真：0731.88872636
　　网址：www.hunnu.edu.cn/press
经　　销｜湖南省新华书店
印　　刷｜湖南雅嘉彩色印刷有限公司

开　　本｜710 mm×1000 mm　1/16
印　　张｜15
字　　数｜320 千字
版　　次｜2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号｜ISBN 978-7-5648-2217-0

定　　价｜39.80 元

前 言

《高等数学教学中的问题驱动设计》是河北省高等教育教学改革研究项目“面向卓越工程师培养诉求的大学数学研究与实践——基于STS教育”(2015GJJG248)、河北省高等学校人文社会科学研究教育科学规划项目“研讨式教学在大学数学类课程教学中的应用研究”(GH152021)的研究成果之一.

问题是数学教学的出发点和动力. 问题驱动是教师将学生所学的知识以问题的方式呈现,驱动学生更好地参与学习活动. 有效的问题设计能驱动学生对相关知识的理解和建构,激发学生对数学知识探究的乐趣,提高学生的思维能力. 因此,把高等数学课程中的重点、难点和容易产生疑惑的地方以问题驱动的方式呈现,将实现对一般教材的再创造,提高数学教学的效率.

本书对于缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学生非常适合,本书的编者一直从事数学基础课教学,具有丰富的教学经验,本书充分体现出编者们这些宝贵的教学经验.

本书也非常适合担任讲授高等数学课程的教师,特别是刚从事教师工作的青年教师,引导他们

去提出问题、探讨问题、解决问题，本书给他们提供了很好的借鉴作用.

本书的内容框架由庞坤确定，在各位作者的通力合作、集体讨论和共同努力下完成了编写工作. 本书内容为十二章，各章具体分工如下：前言由庞坤撰写；第一章由庞坤、海红、于冬梅共同撰写；第二章由海红撰写；第三章由段耀勇撰写；第四章由高秋菊撰写；第五章由邵红梅撰写；第六章由于冬梅撰写；第七章由李秀林撰写；第八章由高岩撰写；第九章由段耀勇、高岩共同撰写；第十章由高秋菊撰写；第十一章由庞坤撰写；第十二章由邵红梅、李秀林共同撰写. 真诚感谢湖南师范大学出版社廖小刚编辑及同仁的辛勤劳动！

在本书的编写过程中，虽然我们付出了很多的努力，但不妥之处恐不能免，恳请读者提出宝贵意见，不胜感激！

目 录

第一章　函数与极限

1.1 映射与函数

问题 1 我们知道，函数可用数学运算公式来表示. 这样表示的函数，其对应关系 f 究竟是什么意思？

例如，多项式：

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

的函数关系 f 是什么意思？

我们观察上式右端，给定 x 的一个值，通过对应关系

$(\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1$，

确定函数 $f(x)$ 的一个值，因此函数关系 f 是：

$(\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1$

这一系列运算.

又如，函数

$f(x) = \log \sin[3x + 1]$

的函数关系 f 是下列运算

$\log \sin[3(\quad) + 1]$，

即对给定 x 的一个值，先乘 3 再加 1，取 sin，最后取 log，而得到函数 $f(x)$ 的值. 这里我们把 sin、log 都看成数学运算. 以后取指数、对数、三角函数及反三角函数都看成数学运算.

综上所述，由一个分析表达式所表示的函数，其函数关系 f 是一系列的数学运算.

问题 2 设 $f(x) = ax$，$g(x) = ax^2$，问 $f(x^2)$，$[f(x)]^2$，$f[f(x)]$ 是一样吗？$f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 是一样吗？

不难验证：

$f(x^2) = a(x^2) = ax^2$，

$[f(x)]^2 = (ax)^2 = a^2x^2$，

$f[f(x)] = f(ax) = a(ax) = a^2x$.

三者之间是不一样的. 又

$f[g(x)] = f(ax^2) = a(ax^2) = a^2x^2$，

$$g[f(x)]=g(ax)=a(ax)^2=a^3x^2,$$

也是不一样的.

问题3　如果 $y=c$(常数),那么,y 能否为某个变量 x 的函数呢?

我们将 $y=c$ 改写为

$$y=c+0\cdot x,$$

于是对于 x 的一个值,通过对应关系:$c+0(x)$,皆有 y 的一个值 c 与之对应.这里,对于 x 取不同的值对应的 y 都取同一个值.由于函数定义只要求对于 x 的一个值,皆有 y 的一个值与之对应,并未要求对应 x 的不同值 y 取不同的值,故 y 取同一值也并不违背函数的定义,因此 $y=c$ 是某个变量的函数.

问题4　用列表法所表示的函数和用图示法所表示的函数,它们的函数关系 f 是什么意思?

由函数的定义可知,函数关系 f 就是自变量与因变量的对应关系.列表法的对应关系是通过一张表所给定的,因此,就列表法所表示的函数来说,它的函数关系 f 就是表中所反映的对应规律.图示法的对应关系是通过一个图形所给定的,因此,就图示法所表示的函数来说,它的函数关系 f 就是图形所反映的对应规律.

无论什么方式所表达的函数,我们都可借助下面直观形象,来加深对函数关系 f 的理解,现将函数关系 f 比作一部“数值变化器”.把定义域中的每一个值 x 输入到“数值变化器”中,通过 f 的“作用”,输出来的就是值域中的函数值 $f(x)$(图1-1).

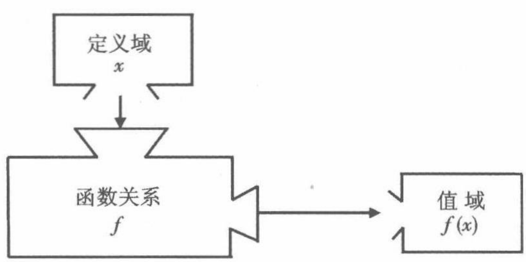

图1-1

问题5　一克水(冰)从外界所吸取的热量 Q 与其温度 T 之间,由物理学可知有如下关系:当 T 由 -10 ℃ 变到接近 0 ℃ 时,$Q=0.5T+5$;当 $T=0$ ℃ 时,$Q=45$;当 T 由大于 0 ℃ 变到 10 ℃ 时,$Q=T+85$,把这个式子合写起来,记为

$$Q=f(T)=\begin{cases}0.5T+5 & (\text{当} -10\ ℃\leqslant T\leqslant 0\ ℃\ \text{时}),\\ 45 & (\text{当}\ T=0\ ℃\ \text{时}),\\ T+85 & (\text{当}\ 0\ ℃<T\leqslant 10\ ℃\ \text{时}).\end{cases}$$

问 Q 是 T 的函数吗？

由函数定义，对于 -10 ℃ $\leqslant T \leqslant$ 10 ℃ 中的任一数值 T_0 皆有 Q 的一个值 Q_0 与之对应. 例如，$T_0 = -3$ ℃ 时，按上式

$$Q_0 = f(T_0) = 0.5T_0 + 5 \\ = 0.5 \cdot (-3) + 5 = 3.5.$$

因此，Q 是 T 的函数，其函数图形见图 1-2.

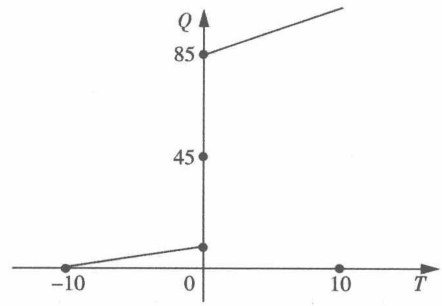

图 1-2

注意：当 $T = 0$ ℃ 时，图象是断开的.

由此可见，函数也可以由几个式子结合起来表达，这种函数称为分段函数.

问题 6 关于任一实数 x，对应的 y 是不超过 x 的最大整数 $[x]$，问 y 是 x 的函数吗？

由于符号 $[x]$ 的意思是不超过 x 的最大整数，如，

$[3.5] = 3, [3] = 3, [0] = 0, [-0.9] = -1, [-3.5] = -4$，

因此，对于任意实数 x，都有一个不超过 x 的最大整数 $[x]$ 与之对应，于是由函数的定义可知，$y = [x]$ 是 x 的函数，它也是一个分段函数(图 1-3).

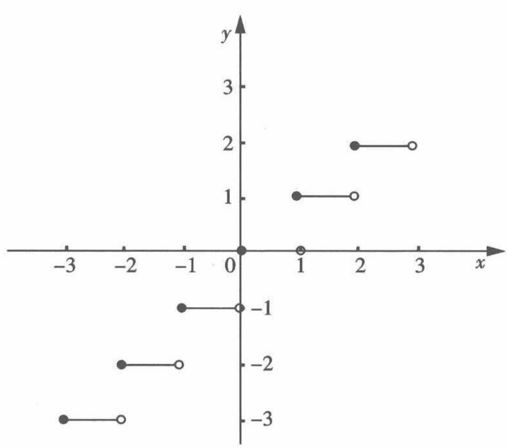

图 1-3

问题 7 当 x 是有理数时，对应 $y = 1$；当 x 是无理数时，对应 $y = 0$. 问 y 是 x 的函数吗？

由于对于任一实数 x，它不是有理数便是无理数，当 x 为有理数时，y 有一

个确定的值 1 与之对应，当 x 为无理数时，y 有一个确定的值 0 与之对应，因此，y 是 x 的函数，记为：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } x \text{ 为有理数时}), \\ 0 & (\text{当 } x \text{ 为无理数时}), \end{cases}$$

称为狄利克莱函数.

虽然 $D(x)$ 是定义在整个实数轴上的函数，但它既不能用通常的数学运算分析式来表示，也不能用图示法和列表法来表示.

问题 8　分析表达式的函数 $y = f(x)$，它的定义域与函数关系 f 有什么关系？

我们从分析具体函数入手.

例如，函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域是：$a \leqslant x \leqslant b$，这个定义域之所以不能取 $x < a$ 或 $x > b$，是因为受函数关系 f：$\sqrt{[(\quad)-a][b-(\quad)]}$ 的限制. 又如，函数 $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域是 $x \neq 1$ 和 $x \neq -1$ 的一切实数，这个定义域之所以不能取 $x \neq 1$ 和 $x \neq -1$，也是受函数关系 f：$\dfrac{1}{1-(\quad)^2}$ 的限制.

由此看到，函数的定义域是由函数关系 f 所确定的，这是问题的一方面. 另一方面，函数的定义域是否统统都由函数关系确定呢？例如，自由落体：$s = \dfrac{1}{2}gt^2$ 就是由实际运动情况所确定的，它的定义域是：t 从落体开始下落的时刻 t_0 算起直到着地时刻 t_1 为止，即 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，如果单纯从数学上看，则函数 $y = ax^2$ 的定义域$(-\infty, +\infty)$.

到此，我们可以综述如下：对于我们将仔细研究的初等函数，它的定义域是由其函数关系所确定的，但对实际问题和特定问题来说，函数的定义域则由所论问题的实际情况来确定.

问题 9　函数 $f(x) = 3x^2(1 \leqslant x \leqslant 3)$ 和 $g(x) = 3x^2(4 \leqslant x \leqslant 6)$ 是同一函数吗？

同一函数是指对于定义域中的任一值，都有相同的函数值与之对应. 也就是说，有相同的函数关系与相同的定义域的两个函数才是同一函数. 现在虽然函数关系都是 $3(\quad)^2$，但一个定义域是 $1 \leqslant x \leqslant 3$，另一个定义域是 $4 \leqslant x \leqslant 6$，所以，这两个函数不是同一函数.

问题 10　对于 x 的同一值，y 取不同的值是不是函数？

例如，$y = \pm\sqrt{x}$.

因为函数定义，要求对于 x 的一个值，对应 y 的一个确定的值，现在对应

两个. 所以它不是函数. 如果将函数定义稍加推广，允许对于 x 的一个值，对应 y 的两个或两个以上的值，则这种推广以后的函数称为多值函数. 此处，$y=\pm\sqrt{x}$ 是多值函数. 对于多值函数以后我们仅研究它的单值分支. 如 $y=\sqrt{x}$ 或 $y=-\sqrt{x}$.

问题 11 在单调函数的定义中，所取的 x_1 和 x_2 是任意的，这个任意性能否去掉？

如果将 x 的任意性去掉，只讲在区间内取某两个 x_1 与 x_2，且当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，这时并不能断言函数 $f(x)$ 在区间上是单调增加的.

例如：函数 $f(x)=x^2(-\infty<x<\infty)$，取 $x_1=-1, x_2=2$，有 $f(2)=4>f(-1)=1$，但函数在$(-\infty<x<\infty)$ 上不是单调增加的(图 1-4).

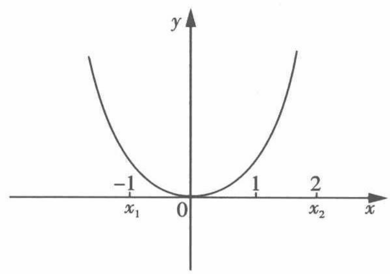

图 1-4

问题 12 函数 $f(x)$ 在(a,b) 内单调增加，如果将区间(a,b) 缩小，函数还是单调增加吗？如果将区间(a,b) 扩大，函数还保持其单调性吗？

由于函数 $f(x)$ 在(a,b) 内单调增加的，因此在此区间的任一部分上仍为单调增加，所以当区间缩小时，其单调性不变. 倘若将区间扩大，即使函数有定义，但也不一定保持原来的单调性.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在$(0<x<\infty)$ 上是单调增加的，在$(-1<x<\infty)$ 上就不是单调函数.

由此可知，函数的单调性是对它的定义区间来说的，离开区间就没有意义.

问题 13 根据上面的分析，我们似乎可以作出如下的判断：一个非单调的函数总可以分成若干段，在某一段上或者单调增加或者单调减少或者不增不减. 即除函数为常数外，总可以把一个非单调的函数分成若干个单调函数. 这个论断正确吗？

对某些函数，例如多项式函数，这个论断是对的. 但对一般函数来说，则不正确.

例如，狄利克莱函数在任意小的区间上都不是单调函数.

问题 14 函数有界与有上界或有下界是什么关系？

如果函数 $f(x)$ 在(a,b) 上有界，按定义，则有 $M>0$，对于 $f(x)$ 在(a,b) 内所有 x 的值，皆有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$.

于是 $f(x)$ 有上界 $-M$ 和下界 M. 因此,有界函数既有上界又有下界.

反之,如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上既有上界 p 又有下界 q,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一定有界.

事实上,由

$q \leqslant f(x) \leqslant p$,

我们令 M 是 $|q|$ 和 $|p|$ 的最大值,则

$-M \leqslant f(x) \leqslant M$,

即 $|f(x)| \leqslant M$.

综上所述,可以叙述成下面的定理.

定理 1　函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 (a,b) 上既有上界又有下界.

注　仅有上界或仅有下界的函数并不能断言函数是有界的.

问题 15　在上面的两个定义中,都有"对于 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有 x 的值"这句话."所有"应怎样理解?能否换成"某些"呢?

"函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有 x 的值"的"所有"二字是指 $f(x)$ 取 (a,b) 内全部的值或一切的值,而不是指 (a,b) 内某一部分的值或某几个值. 如果定义中,将"所有"换成"某些",则上述定义只能说 $f(x)$ 在 (a,b) 内某些 x 的值是有界的,而不能说 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

例　函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 在 $(-\infty,a](a<0)$ 及 $[b,+\infty)(b>0)$ 上皆有界. 但在它的定义域上无界(图 1-5).

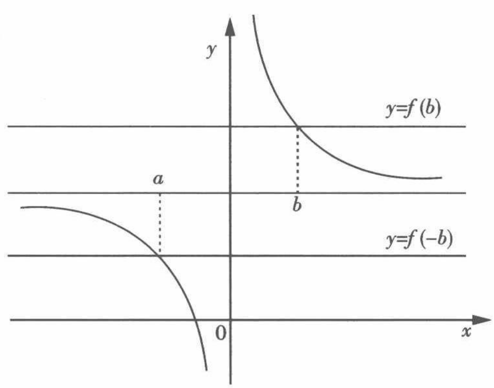

图 1-5

问题 16　函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界,如果将区间 (a,b) 缩小,函数还是有

界的吗?如果将区间(a,b)扩大,其结果又如何?

因为在(a,b)内的有界函数$f(x)$,必满足

$|f(x)| \leqslant M$ (M是一个正数).

当(a,b)缩小时,上式仍然成立,因此$f(x)$在缩小后的区间内仍是有界的. 但将(a,b)扩大,则$f(x)$在扩大了的区间内就不能肯定它是有界的. 如上例,函数$y=\frac{1}{x}+2$在$[b,+\infty)(b>0)$上是有界的,但在$(0,+\infty)$上却不是有界函数.

由此可知,函数的有界性是对它的定义区间来说的,离开定义区间便没有意义.

讨论到这里,我们发现还有一些函数不是有界的,例如$y=\frac{1}{x}$,在区间$(0,1]$上的函数图形就不夹在二平行线$y=p$和$y=q$之间,不管p取多大,总有某个函数值它所对应的点$M(x_0,f(x_0))$在直线$y=p$之上(图 1-6). 象这样不是有界的函数称为无界函数. 从图 1-6 可以看出:无界函数缩小它的定义区间可能为有界函数. 如取$[\frac{1}{100},1]$,则$y=\frac{1}{x}$在这个缩小了的区间上是有界函数;若将无界函数的定义区间加以扩大,则在这个扩大的区间上函数仍旧是无界的(图 1-6).

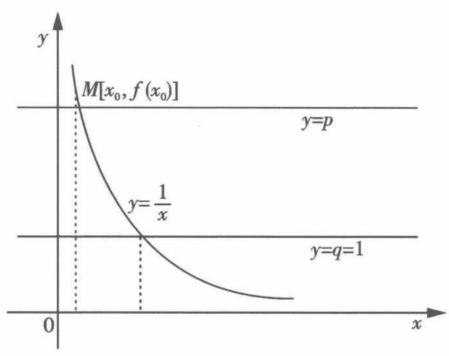

图 1-6

问题 17 函数的奇偶性与其定义区间有何关系?

首先,一个函数如果为奇函数或者偶函数,则要求其定义区间必须是一个对称数集. 所谓对称数集是指:如果x是数集M中的任一数,而数$-x$也是属于这个数集中的数,则称数集M是对称的. 例如,一切整数的集合是对称数集,闭区间$[-1,1]$或区间$(-2,2)$都是对称数集. 如果定义区间不是对称的,