精 讲

gaozhong shuxue jingjiang

高中数学精讲

代数上

江苏教育出版社

高中数学精讲
代数上册

（一年级用）

周学祁　李百池　张建青　编著

江苏教育出版社

高中数学精讲·代数上册

（一年级用）

周学祁　李百池　张建青　编著

责任编辑　喻　纬

出版发行:江　苏　教　育　出　版　社

（南京马家街 31 号,邮政编码:210009）

经　　销:江　苏　省　新　华　书　店

照　　排:南京理工大学激光照排公司

印　　刷:江　苏　省　金　坛　印　刷　厂

（金坛市西门大街 18 号,邮政编码:213200）

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 9.75 字数 213,400

1997 年 10 月第 3 版　1997 年 10 月第 1 次印刷

印数 505,121—565,320 册

ISBN 7—5343—1314—7

G·1166　　定价:7.40 元

敬告读者

《高中数学精讲》是江苏教育出版社奉献给全国广大读者的一套高中数学学习辅导读物.《高中数学精讲》的第一批5种自1991年出版之后,很快便受到读者们的喜爱,它们不但被高中学生视为“家庭教师”,也被广大高中数学教师当作案头常备的教学参考书.1994年10月,《高中数学精讲》(5种)被中国书刊发行业协会评选为“全国优秀畅销书”.1996年,《高中数学精讲》又增加了配合综合复习的两个新品种——《专题讲座》和《解题方法》.

这套书的作者中,有特级教师7人:周学祁(通州市教育局教研室),杨浩清(常州高级中学),仇炳生(南京师范大学附属中学),张连昌(金坛市华罗庚中学),周祥昌(无锡市第一中学),张乃达(扬州中学),汤希龙(扬州大学师范学院附属中学).长期以来一直关心中学数学教育的微分几何专家蒋声教授(扬州大学师范学院),也应邀编写《解题方法》一书,参加《高中数学精讲》的作者队伍,进一步提高了这套书的品位.这套书不但力图体现一批多年从事高中数学教学的特级教师的教学水平,而且传递了作者们在实现高中数学教学向“素质教育”转变方面的最新探索的成功经验.

这套书中的《代数上册》、《立体几何》、《代数下册》和《平面解析几何》,分别与现行的四册高中数学教材配套编写,系浓缩作者新授课的教学精华而成,可供读者在教学中同步使用.各册内容的安排及章节的划分,与课本基本一致.各小节的内容讲解部分,不求面面俱到,而着力于剖析教材的重点、

难点和关键，例题的解答与分析也力求将“三基”（基础知识、基本技能技巧和基本思想方法）的教学与解题训练融为一体，各册中配备的练习题、习题、复习题，由易到难循序渐进，举一反三以少胜多.《思路方法》、《专题讲座》和《解题方法》，既可供一、二年级时配合新授课教学使用，也可供三年级高考复习时使用.《思路方法》及时介绍与整理了新授课过程中出现的数学思想方法，并进一步作了分类、总结.《专题讲座》根据高考要求，将重点教学内容作了梳理和适度的补充与提高.《解题方法》则侧重于帮助读者将学过的种种解题方法融会贯通，切实掌握快速找到正确解题思路的方法与技巧.

《高中数学精讲》可供高中学生，自学高中数学者，中学数学教师、教研员、高中数学家庭教师，师范院校数学系师生阅读使用.

《高中数学精讲》面世多年而常销不衰，是与不停地采用“滚动式修订”从而保证“常出常新”分不开的.每次重印，作者都及时修订，力求消灭错误.每逢高中数学教学内容或高考要求有所调整，都及时组织作者改写有关内容，以确保《高中数学精讲》丛书始终保持与高中数学教学内容配套.每隔一段时间，都组织作者全面修订，撰写新版书稿，新版书稿在保持原有特色的同时，系统地融入高中数学教学与高考复习中的新鲜经验，并将例题、习题大幅度地更换成新题.我们希望，崭新的《高中数学精讲》（7种）能更加切合全国广大读者的需要.

尽管如此，书中的不足之处仍然在所难免，欢迎读者们提出批评、建议，以便随时作进一步的修订.

江苏教育出版社

1997年10月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第二章 三角函数

第三章 两角和与差的三角函数

第四章　反三角函数和简单三角方程

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集　　合

1.1　集合

1. 什么是集合

例如，“高一(2)班所有的男生”，就是一个集合. 一般地，某种对象的全体，就构成了“集合”，简称“集”.

集合中的对象叫做“元素”，它可以是数，可以是式，可以是方程、不等式，也可以是图形（点、角、三角形……）等. 需要注意的是，集合本身，也可以成为其他集合的元素.

集合，应是某种对象的“全体”，如“2，4，6，8，10”就不能称为“偶数集”，而只能称为“不大于 10 的正偶数的集合”.

2. 集合的特性

由“高一(2)班所有的男生”这个例子，可以知道，集合有如下特性：

(1) 元素的确定性；

(2) 元素的互异性；

(3) 元素的无序性.

这里特别要注意“元素的互异性”，例如，某集合的元素是方程 $x^2-6x+9=0$ 的根，从解方程的角度来看，这个方程有两个根 $x_1=x_2=3$，但作为集合来说，其中就只有一个元素

“3”.

3. 集合的表示法

(1) 列举法：当集合为有限集时，可用逐一列举其中元素的方法来表示. 如“10 以内的质数”，可以表示为$\{2,3,5,7\}$.

(2) 描述法：当集合为无限集，或者虽属有限集，但集合中的元素过多时，常可用描述法表示. 例如“100 以内的质数”所成集合，若用列举法则不胜其烦，即可用描述法表示为：{100 以内的质数}，或$\{p \mid p$ 为质数，且 $p<100\}$.

有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分，但应以不引起混淆为前提. 如$\{x \mid x-3>2\}$，是表示不等式 $x-3>2$ 的所有解的集合，即 $x>5$ 的一切实数，其元素是该范围内的实数，是一个无限集；而$\{x-3>2\}$则表示由一个不等式所构成的集合，元素是不等式，是一个有限集.

4. 符号“$\in$”与“$\notin$”

表示“属于”的符号“$\in$”与表示“不属于”的符合“$\notin$”，是表示元素与集合之间的关系的，不能用来表示两个集合之间的关系.

本书中，常用数集的表示符号与课本一致，如“Z”表示整数集，等等.

例 1 选择(本书中的选择题如未加特别说明，均为一元选择题，即答案集合中有且仅有一个正确的选择支)：

今有四个命题：(1)“所有相当小的正数”是一个集合；

(2)集合$\{x,y,z,x,w\}$中有 5 个元素；

(3)$\{1,3,5,7\}$与$\{7,5,3,1\}$表示同一个集合；

(4)$\{x+y=0\}$表示坐标平面中第二、四象限角平分线上的点组成的集合.

其中，正确的是 (　　)

(A)仅有(1),(3).　　　　　　(B)仅有(1),(2),(3).

(C)仅有(3).　　　　　　　　(D)仅有(3),(4).

解　由集合中元素的确定性可知,"所有相当小的正数"不是一个集合.例如 0.00001 是不是一个"相当小的正数",就无法确定,故命题(1)不正确;由元素的互异性可知,(2)的集合中只有 4 个元素,命题(2)也不正确;由元素的无序性可知,$\{1,3,5,7\}$与$\{7,5,3,1\}$表示同一个集合,故命题(3)正确;$\{x+y=0\}$是只有一个元素(方程"$x+y=0$")的有限集,而$\{(x,y)\mid x+y=0\}$才表示二、四象限角平分线上的点所组成的集合,故所给命题中,只有(3)正确,应选(C).

例 2　用另一种形式表示下列集合:

(1) {偶数};

(2) $\{x \mid |x|<4, x\in Z\}$.

解　①{偶数}还可表示为$\{n \mid n=2k, k\in Z\}$;②可用列举法表示为$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

例 3　已知 $A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{12}{x}\in Q, x\in Z, x\neq 0\right\}$,

$B=\left\{y \,\middle|\, \dfrac{12}{y}\in Z, y\in Z, y\neq 0\right\}$.

(1) 试判断 A,B 是有限集还是无限集;

(2) 试判断$-1,8,\dfrac{1}{2}$是否属于这两个集合.

解　(1)在集合 A 中,因为当 x 取任一非零整数时,$\dfrac{12}{x}$均为有理数,所以 A 是无限集;在集合 B 中,只有当 y 取某些整数,如$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$时,$\dfrac{12}{y}$才是整数,故 B 为有限集.

(2)当 $x=-1$ 时，$\frac{12}{-1}=-12\in Q$，$\therefore -1\in A$. 类似地，$-1\in B$. 读者不难得出，$8\in A$，而 $8\notin B$，$\frac{1}{2}\notin A$，$\frac{1}{2}\notin B$.

练　习

1. 判断(对的打"√"，错的打"×")：
   (1) 直角坐标系中所有整点(纵、横坐标都是整数的点)可以构成一个集合.　(　　)
   (2) $\{y\,|\,|y|<1\}$是有限集.　(　　)
   (3) $\lg\frac{2}{3}\in R^-$.　(　　)
   (4) $\{0\}$表示仅有一个元素零的集合.　(　　)
2. 用另一种形式表示下列集合：
   (1) {直角坐标平面中 x 轴上所有的点}；
   (2) {所有能被 7 整除的数}；
   (3) $\{x\,|\,x=2n-1,n\in Z\}$；
   (4) $\{x\,|\,-6\leqslant x<0,x\in Z\}$.
3. 选择填空(把正确答案的代号填入相应的空格内)：
   (1) ____ $\in N$；____ $\in Z^-$.
   (A) $\sin30°$.　(B) $\mathrm{tg}45°$.　(C) $\cos30°$.　(D) $\mathrm{ctg}135°$.
   (2) $\lg2\in$ ____；$\lg\frac{1}{1000}\in$ ____.
   (A) N.　(B) Z.　(C) R^+.　(D) Q^+.
   (3) ____ $\notin Z^-$；____ $\in\{x\,|\,|x|\leqslant5\}$.
   (A) $\lg10^{-1}$.　(B) -6.　(C) 2π.　(D) -1000.

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集、集合的相等

(1) 子集

如果集合 A 中的任一元素，都是集合 B 的一个元素，集合 A 就叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

注意

1° 只有当集合 A 中的任何一个元素(而不是某一个元素)都是集合 B 的元素时，才有 $A\subseteq B$；如果集合 A 中有某一个元素 $p\notin B$，那么 A 就不是集合 B 的子集，即 $A\nsubseteq B$.

2° 如果 $A\subseteq B$，则集合 A 一定是由 B 的部分元素构成的吗？不一定.如集合 B 中含有四个元素 a,b,c,d，集合 A 中也同样含有这四个元素，仍有 $A\subseteq B$，因此，任何一个集合都是它本身的子集.

(2) 真子集

考察集合 $A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{0,2,4,6,8\}$，一方面 A 是 B 的子集，另一方面 B 中至少有一个元素(0)不属于 A，这时 A 就是 B 的一个真子集，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

注意 一个集合的子集，不一定是它的真子集.例如 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid |x|<3, x\in Z\}$，集合 B 中元素与 A 中元素相同，这时 A 是 B 的子集，而不是真子集，即 $A\subseteq B$，但 $A\not\subset B$.

(3) 空集

考察集合 $\left\{\alpha \,\middle|\, \sin\alpha=\dfrac{3}{2}\right\}$，显然没有任何一个角 α 能使 $\sin\alpha=\dfrac{3}{2}$成立，故该集合中没有任何元素.不含任何元素的集合叫做空集，记作“$\varnothing$”，读作“欧”.

空集$\varnothing$是任何集合的子集，也是任何非空集合的真子集.例如$\varnothing \subset \{0\}$，这是因为集合$\{0\}$中含有一个元素0，而$0 \notin \varnothing$.

例1 选择：今有四个命题

(1) $N \in Z$；

(2) $\varnothing \in \{\varnothing\}$；

(3) $R^+ \supset \{x | x \geqslant 0\}$；

(4)子集一定是由原来集合中的部分元素所组成的集合.

其中正确的是 ( )

(A)(1),(2),(4). (B)(3).

(C)(2),(3),(4). (D)(2).

解 命题(1)中N, Z都是集合，应为$N \subset Z$，故(1)错误；命题(2)中$\{\varnothing\}$表示以空集$\varnothing$为元素的集合，可以这样表示，正确；命题(3)中，正实数集R^+是非负实数集的真子集，应为$R^+ \subset \{x | x \geqslant 0\}$；命题(4)中，子集可以是原来集合中全部元素组成的集合，还可以是空集，所以也不正确.故本题应选(D).

(4) 集合包含关系的传递性

对于集合A, B, C：如果$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$；如果$A \subset B$，$B \subset C$，那么$A \subset C$.请读者考虑，怎样根据子集与真子集的定义进行证明？

(5) 集合的相等

对于集合A与B，如果$A \subseteq B$，同时$B \subseteq A$，这时就称A, B两个集合相等，记作$A = B$.

例2 选择：与集合$P = \{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$相等的集合是 ( )

(A)$\{x | x(x-1) = 0\}$. (B)$\{x | \log_2 x = 0\}$.

(C)1. (D)$\{(1,1)\}$.

解 方程$x^2 - 2x + 1 = 0$的根为$x_1 = x_2 = 1$，根据集合中

元素的互异性可知，$P=\{1\}$，在各选择支中，只有(B)的集合中只含一个元素“1”，故应选(B). 请读者说出为什么其余选择支不合的理由.

注意 到目前为止所学的一些符号中，$\subseteq$，$\subset$，$=$，$\nsubseteq$，$\not\subset$ 等，都是表示两个集合间关系的符号，而 $\in$，$\notin$ 则是表示元素与集合间关系的符号.

2. 交集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的交集，记作 $A\cap B$. 即定义

$$A\cap B=\{x\mid x\in A, \text{且 } x\in B\}.$$

其示意图如课本图 1-2(这类图称为“韦恩图”).

在数的运算中，有 $1\times1=1$，$1\times0=0$，$2\times3=3\times2$ 等；在集合中则有 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$，这些都不难由交集的定义得到证明.

例 3 选择：设 $A=\{x\mid x=4k, k\in Z\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,\frac{y}{2}\in N\right\}$，则 $A\cap B$ 是 ( )

(A) $\{z\mid z=2k, k\in N\}$. (B) $\{z\mid z=2k, k\in Z\}$.

(C) $\{z\mid z=4k, k\in Z\}$. (D) $\{z\mid z=4k, k\in N\}$.

解 A 为能被 4 整除的所有整数的集合，而 B 为正偶数集合，所以它们的交集 C 是能被 4 整除的所有正整数的集合，故应选(D). 如图 1-1 所示.

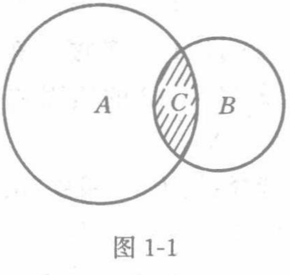

图 1-1

想一想：集合 B 中所有不属于 C 的元素，构成怎样的集合？

——{不能被 4 整除的正偶数}.

集合 A 中所有不属于 C 的元素，又构成怎样的集合呢？

例 4 设 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$，$B=\{2y,-4,x+4\}$，$C=\{-1,7\}$，且 $A\cap B=C$，求 x,y.

解 由 $A\cap B=C$ 可知 $7\in A$，

$\therefore\quad x^2-x+1=7.$

由此解得 $x_1=-2, x_2=3.$

当 $x=-2$ 时，$x+4=2\notin C$，不合；

当 $x=3$ 时，$x+4=7\in C$，此时有 $2y=-1$，

$\therefore\quad y=-\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\quad x=3, y=-\dfrac{1}{2}.$

练　习

1. 设 $A=\{x\mid -1\leqslant x<7, x\in Z\}$，$B=\{10$ 的质因数$\}$，判断下列关系式是否正确：

   (1) $\{-1\}\in A$； (　　)

   (2) $\varnothing\subset B$； (　　)

   (3) $0\subset A$； (　　)

   (4) $A\cap B=B$. (　　)

2. (1) 设 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$矩形$\}$，求 $A\cap B$.

   (2) 设 $A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

3. 设 $M=\{12$ 的质因数$\}$，$N=\{$不大于 6 的非负整数$\}$，求 $M\cap N$.

4. 选择：设 $P=\{$偶数$\}$，$Q=\{$质数$\}$，则 $P\cap Q$ 为 (　　)

   (A) $\{0\}$.　　(B) $\varnothing$.　　(C) $\{2\}$.　　(D) 2.

5. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$任意三角形$\}$，$C=\{$钝角三角形$\}$，求：

(1) $A\cap B$；　　(2) $A\cap C$；　　(3) $B\cap C$.

6. 选择：设集合 $P=\{x\mid x=2n,n\in N\}$，$Q=\{x\mid x=3n,n\in N\}$，则 $P\cap Q$ 等于　（　　）

(A) $\{x\mid x=n,n\in N\}$.　　(B) $\{x\mid x=5n,n\in N\}$.

(C) $\{x\mid x=12n,n\in N\}$.　　(D) $\{x\mid x=6n,n\in N\}$.

7. 设 $A=\{$不大于 9 的正奇数$\}$，$B=\{$10 以内的质数$\}$，$C=\{x\mid x=3n,\ n<5,n\in N\}$，试将各个集合的元素填入图 1-2.

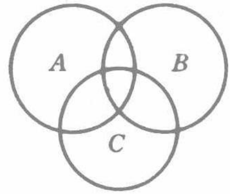

图 1-2

8. 选择：已知 $P=\{7,\ 10,\ m^2-2m-9\}$，$Q=\{0,\ 2m,\ 6\}$，$P\cap Q=\{6\}$，则 m 的值为　（　　）

(A) -3.　　(B) 5.　　(C) $-3,5$.　　(D) 6.

9. 已知 $M=\{x^3+5,x^2-2x+2,x+3,-4\}$，$N=\{2,4,x^2-x+3\}$，且 $M\cap N=\{2,5\}$，求 x.

10. 选择：已知 $A=\{x\mid |x|<5\}$，$B=\{x\mid -7<x<a\}$，$C=\{x\mid b<x<2\}$，且 $A\cap B=C$，则 a,b 的值为　（　　）

(A) $a=5,b=-7$.　　(B) $a=5,b=-5$.

(C) $a=2,b=-7$.　　(D) $a=2,b=-5$.

3. 并集

试在数轴上表示出下列不等式的解集：

$A=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 1\}$；

$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$；

$C=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 5\}$.

请读者通过观察，考虑集合 C 与集合 A,B 的元素之间，有怎样的关系？

集合 C 中的元素至少属于 A,B 两个集合之一（或属于集