21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

Linear Algebra

主 编 陆仲坚 尹幼奇

南京大学出版社

21世纪应用型本科

线性代数

Linear Algebra

主编 陆仲坚 尹幼奇

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 陆仲坚，尹幼奇主编. — 南京：南京大学出版社，2015. 8

ISBN 978 - 7 - 305 - 15668 - 7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陆… ②尹… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 191281 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 线性代数
主　　编 陆仲坚　尹幼奇
责任编辑 沈　洁　　编辑热线 025 - 53593962

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 盐城市华光印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张 12　字数 205 千
版　　次 2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 15668 - 7
定　　价 26. 00 元

网　　址：http://www. njupco. com
官方微博：http://weibo. com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　　言

线性代数是理工类和经济管理类等专业的一门专业平台课程，也是硕士研究生入学考试课目《高等数学》中的重要内容之一。

为主动适应地方经济社会发展对人才培养的要求，绍兴文理学院在2010年启动了应用型人才培养模式改革，对课程教学内容，按“公共平台课通用、专业平台课够用、专业方向模块课管用、全校选修课程实用”的要求，采取“精简、整合、改造”等措施，增设自主学习课程等办法，将传统的以知识传授为主的“学科导向型课程”改变成以能力培养为主的“专业导向型课程”。

本教材就是基于这一背景下撰写的，按照“够用”原则，强调适用性、通用性和应用性，因而在编写中作了以下探索：

1. 知识完整。线性代数以线性方程组为主线，以矩阵作为基本的代数工具，以行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、方阵的特征值和特征向量以及二次型等为基本内容，它具有较强的抽象性、逻辑性和应用性。全书涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，为学生提供了良好的线性代数基础知识。教材内容是按48学时教学设计的，若只有32学时教学的，则建议学习前三章。

2. 编排合理。教材中对概念的引入，尽量用实际问题的必要性或已有数学概念的推广形式给出，力求让学生明白。这些概念的引入，不是数学家拍脑袋拍出来的，而是有很强的实际应用背景。对重要定理和性质的介绍，我们尽量用提问题的方式给出，让学生掌握它的来龙去脉，能知其所以然。受教学时数的限制，我们删除了一些命题和定理的证明，虽有点缺憾，但对于线性代数中的一些重要的最基本的证明方法，我们仍予以保留，并且讲深讲透，以培养学生的创新思维和研究能力。教材中配置了许多思考题，可供教师在课堂中向学生提问，以帮助学生避免概念混淆，加深对教材中的一些重要定理和性质的正确理解。

3. 通俗易懂。在教材的各章开场白中，我们介绍了一些本章主要内容，在其他学科的渗透和应用，以及相关的数学史料，以激发学生学习的兴趣。尽

量以提出问题，讨论问题，解决问题的方式来展开知识点，培养学生的应用能力。追求知识的因果关系，让知识的发展有“水到渠成”和“一气呵成”的感觉。力求语言生动有趣，一些重要法则用“口诀”表示，便于学生记忆。

4. 题型丰富。教材有较多的典型例题，以期举一反三。习题按章配置，均配置了(A)，(B)两组习题，最后有总练习题。一般，达到(A)组习题的水平，就已经符合本课程的基本要求。(B)组习题和总练习题是为对线性代数知识要求较高的专业学生和对线性代数有兴趣或准备考研的学生而准备的，这些题大多来自于近年来全国硕士研究生入学统一考试数学试题。书末的答案供教师与学生在教学中参考。

5. 注重应用。为了帮助学生加深对各章知识的了解，活跃思维，增强应用能力的培养，教材中的每章末都有一个应用实例，所选的应用题难度不大，可以供学生自主学习。另外，在线性代数的实际应用中，涉及的计算往往比较复杂，需通过 MATLAB 等软件来处理，因此，我们将线性代数 MATLAB 基础实验作为教材中的附录，供学生自主学习。

衷心感谢绍兴文理学院本科应用型教材出版基金对本教材出版的资助，感谢同行对本教材所提的宝贵意见和建议，限于编者水平，教材中难免有疏漏之处，恳请读者谅解，并多提宝贵意见。

编　者

2015 年 6 月

目　　录

第 1 章　行列式

尽管行列式理论并不是线性代数的主体，但它无疑是处理各类线性代数问题的不可缺少的工具．行列式的理论起源于解线性方程组，首次使用行列式概念的是 17 世纪德国数学家莱布尼茨．后来瑞士数学家克莱姆于 1750 年发表了著名的用行列式方法解线性方程组的克莱姆法则，1772 年他对行列式做出了连贯的逻辑阐述．法国数学家柯西于 1840 年给出了现代的行列式概念和符号，包括行列式一词的使用，但他的某些思想和方法来自于高斯．在行列式理论形成和发展中做出重要贡献的还有拉格朗日、维尔斯特拉斯、西勤维特斯和凯莱等著名数学家．

本章通过解二元或三元线性方程组，引入了 2 阶或 3 阶行列式，在此基础上，进一步建立了 n 阶行列式理论，并且讨论了 n 阶行列式对求解 n 元线性方程组的应用．

§1.1　2 阶和 3 阶行列式

我们先回顾一下，在中学里曾经学过用消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

的求解过程．

利用初等的加减消元法可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \text{ 和} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

因此当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，则方程组(1.1.1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆，现在我们引入下列 2 阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1.1.2}$$

于是方程组(1.1.1)的解可以用 2 阶行列式来表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

我们称 2 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为方程组(1.1.1)的系数行列式，若 $D\neq 0$，用 D_j 表示将 D 中第 j 列替换成方程组(1.1.1)右边的常数列而得的 2 阶行列式，则方程组(1.1.1)的解可以用公式表示：

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1,2). \tag{1.1.3}$$

例 1.1.1 解方程组$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$.

解：计算 2 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{-17} = \frac{1}{17}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{-17} = \frac{5}{17}.$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

我们同样可以得到求解公式.

我们先引入 3 阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.1.5}$$

当方程组(1.1.4)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,类似于解方程组(1.1.1)那样,用初等的加减消元法,可得方程组(1.1.4)的唯一解:

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,3). \tag{1.1.6}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.2　解方程组$\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=10. \\ 4x_1+8x_2+2x_3=4 \end{cases}$

解:计算 3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=34,D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=68,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0,D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}=-68.$$

因为 $D\neq 0$,所以方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{68}{34}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{0}{34}=0,x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-68}{34}=-2.$$

由以上例子显见,对于二元或三元一次线性方程组,通过引入 2 阶或 3 阶行列式,我们可以得到简便的求解公式. 但在实际应用中,我们遇到的线性方程组的未知量远多于三个,我们自然希望能引入更高阶的行列式,甚至是一般的 n 阶行列式,得到满足一定条件的 n 元线性方程组的求解公式.

§1.2 n阶行列式

n 阶行列式的定义相对复杂,我们试图从 2 阶和 3 阶行列式的定义,找出规律,引入 n 阶行列式的定义.

先将 3 阶行列式的定义(1.1.5)改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\ (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{13}\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

我们分别称 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 是 a_{11},a_{12} 和 a_{13} 的余子式,记为 M_{11},M_{12} 和 M_{13}.

分别称 $(-1)^{1+1}M_{11}$,$(-1)^{1+2}M_{12}$ 和 $(-1)^{1+3}M_{13}$ 是 a_{11},a_{12} 和 a_{13} 的代数余子式,记为 A_{11},A_{12} 和 A_{13}.

于是(1.2.1)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{1.2.2}$$

显见,元素 a_{1j} 的余子式 M_{1j} 就是在 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{1j} 所在的行和列后,剩下的元素按原来的顺序组成的一个 2 阶行列式. 因此,3 阶行列式可以用 2 阶行列式表示.

事实上,我们若定义 1 阶行列式就是一个元素 a,记为 $|a|$,和 3 阶行列式

那样,分别引入 2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的元素 a_{11} 和 a_{12} 的余子式 $M_{11}=|a_{22}|$ 和 $M_{12}=|a_{21}|$ 以及代数余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$ 和 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}$,则 2 阶行列式可以用 1 阶行列式表示:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}. \tag{1.2.3}$$

以上对 2 阶和 3 阶行列式定义的分析,启发我们引入如下的 n 阶行列式的定义.

n 阶行列式的符号是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行和 n 列,左右两旁用两条竖线围起来的如下形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.4}$$

上述 n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|_n$,元素 a_{ij} 的第一个足标 i 表示行指标,第二个足标 j 表示列指标,因此 a_{ij} 表示它是位于行列式中第 i 行、第 j 列交叉处的元素.

定义 1.2.1　对于任一对 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,在 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的行和列后,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序排成 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们称之为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

我们称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

下面我们用归纳法来定义 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 的值.

定义 1.2.2 当 $n=1$ 时,规定 $|a_{ij}|_1=a_{11}$,若对 $n-1$ 阶行列式的值已经定义了它们的值,则对任意的 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,$A_{ij}$ 表示元素 a_{ij} 的代数余子式,于是定义

$$|a_{ij}|_n = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}. \tag{1.2.5}$$

(1.2.5)式称为行列式 $|a_{ij}|_n$ 按第一行的展开式,它从理论上给出了一个计算 n 阶行列式的方法.

例 1.2.1 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,计算:(1) A_{11},A_{12};(2) D 的值.

解:(1) 因为 $M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-9$,$M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4$,

所以

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=-9,A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-4.$$

(2) 由行列式的定义知,

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14},$$

因为 $a_{13}=a_{14}=0$,所以

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=1\times(-9)+(-1)\times(-4)=-5.$$

例 1.2.2 计算 n 阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个形状的行列式称为下三角行列式,它的主对角线(即元素 a_{11},a_{22},…,a_{nn}所在的对角线)上方元素全为零.

解:因为下三角行列式 D 的第一行元素除了 a_{11} 外全为零,所以 D 按第一行展开时只有一项可能不为零,于是

$$D=a_{11}A_{11}=a_{11}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然,a_{11} 的余子式 M_{11} 仍是一个下三角行列式,只是比原行列式的阶数少了1,因此可用同样的方法求得

$$M_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

于是

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再对 $n-2$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 进行类似的讨论,一直如此下去,最终易得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积.

特别地,对角行列式(即除了主对角元素外,其余元素全为零的行列式)的值等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§1.3 行列式的性质

计算任意阶行列式的值,理论上我们都可用按第一行的展开式(1.2.5)来实现.例如计算一个 n 阶行列式的值,它可以转化为计算 n 个 $n-1$ 阶行列式的值来实现;计算一个 $n-1$ 阶行列式的值,它可以转化为计算 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式的值来实现;一直如此下去,最后转化为计算 2 阶行列式的值来实现.

但这个办法实在是一个“笨”办法,之所以说这个办法是“笨”的,是因为计算一个 n 阶行列式的值,若最终都转化为计算 2 阶行列式的值来实现,要计算多少个 2 阶行列式的值呢? 答案是$\frac{n!}{2}$个.例如计算一个 10 阶行列式的值,若用上述办法,就要计算 1814400 个 2 阶行列式的值,这是常人无法完成的任务.

要解决行列式值的计算这个难题,我们就要来研究行列式的基本性质(也称行列式变换)和重要定理,利用这些性质和定理,有时我们可以大大简化行列式的计算.

定义 1.3.1 将行列式 D 的行与列互换后所得的行列式,称为 D 的转置行列式,记作 D^{T}.

性质 1.3.1(转置变换) 设 $D=|a_{ij}|_n$,则 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.3.1 表明,一个行列式与它的转置行列式的值是相同的,更为重要的是,它还表明在行列式中行与列所处的地位是相同的,也就是说,凡是对行成立的性质,对列也同样成立,反之亦然.

例 1.3.1 计算 n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解:因为上三角行列式转置后就变为下三角行列式,由例 1.2.2 立得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.3.2(倍乘变换) 把行列式某一行(列)元素都乘以 k,或者说行列式某一行(列)元素有公因子 k,则行列式的值是原值的 k 倍.

例如,倍乘行变换:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3.3(分行分列相加性) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则行列式就等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行(列)之外全与原行列式的对应的行(列)一样.

例如,分行相加性:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

值得提醒的是，两个同阶行列式的和若要变成一个行列式，则只能是这两个行列式中除了某一指标相同行(或列)外，其余行(或列)元素都要对应相同才行.

例 1.3.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$.

解：由行列式的分行分列相加性，易得 $D=0$.

性质 1.3.4(换法变换) 交换行列式的两行(列)的位置，行列式的值变号.

例如，换法行变换：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由上述性质，容易得到以下两个重要推论.

推论 1.3.1 若行列式中有两行(列)元素对应相同，则行列式的值为零.

推论 1.3.2 若行列式中两行(列)元素对应成比例，则行列式的值为零.

性质 1.3.5(倍加变换) 将行列式中的某一行(列)的所有元素都乘以 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，则行列式的值不变.