高等院校物理学习辅导丛书
Exercise Series in Physics for Higher Education

量子力学 考研辅导

第3版

史守华 谢传梅 编著

清华大学出版社

量子力学

考研辅导

第3版

史守华 谢传梅 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是量子力学考研辅导用书。全书分为14个单元，每单元由"内容提要"和"典型习题解答"两部分组成，选题覆盖了现行各高校量子力学课程的全部内容。编著《量子力学——考研辅导》的目的是为了使学生加深对量子力学基本概念、基本规律及基本方法的理解、掌握与运用，对于物理类及相关专业的学生学好量子力学课程，进而顺利通过攻读硕士研究生量子力学课程的入学考试，是有帮助的。本书也可供学习量子力学课程的学生和讲授量子力学课程的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学考研辅导/史守华，谢传梅编著. --3版. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-42091-0

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①史… ②谢… Ⅲ. ①量子力学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O413.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第264106号

责任编辑：朱红莲
封面设计：常雪影 张沛韬
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　**印　张**：16.5　**字　　数**：358千字
版　　次：2003年11月第1版　2015年12月第3版　**印　　次**：2015年12月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：35.00元

产品编号：066897-01

第3版 前言

FOREWORD

“量子力学”不只是物理学本科生各专业，甚至包括与物理相关专业（如材料类、电子类专业）的重要基础理论课。全国各高等院校、科研院所在以上各专业硕士研究生入学考试时，几乎都把量子力学列为必考科目。为了辅导学生考研，作者在安徽大学物理与材料科学学院任教期间，参阅了大量资料，对习题进行了认真的筛选。在筛选过程中，既注意习题的覆盖面，同时也充分考虑了习题的难易程度，编写成《量子力学——考研辅导讲义》。试用了几年后，于 2003 年编著成《量子力学——考研辅导教材》一书。后几年，作者又进一步收集资料，在原书第一版的基础上，增加了大约三分之二的内容，特别注意吸纳各高等院校和科研院所近年的考研试题，并补充了一些基本概念、基本规律、基本方法方面的习题，于 2007 年出版了《量子力学考研辅导(第 2 版)》。这次应读者的要求，在第 2 版的基础上，又增选了一些习题，主要考虑到黑体辐射、光电效应、德布罗意物质波假说和康普顿效应等量子力学实验基础方面的内容在考研试题中常常会涉及，在这些方面作了适当的补充，作为第 3 版再次出版。

本版和第 1、第 2 版体例相同，将全书分成 14 个单元，每单元分为“内容提要”和“典型习题解答”两部分，难度较大的少数习题前加上了“*”号。内容提要便于读者从整体上把握应掌握的基本概念、规律及方法，典型习题解答有助于学生掌握计算方法。

本书适用于物理类及相关专业的本科生考研复习之用，也可供讲授和学习量子力学的师生参考。

由于作者水平有限，错误和不足之处在所难免，诚恳地欢迎批评指正。

作　者

2015 年 6 月于安徽大学

目录

CONTENTS

CHAPTER 1

量子力学的实验基础

1

【内容提要】

1. 黑体辐射本领 M(从黑体单位表面积发出的辐射功率)与热力学温度 T 的四次方成正比——斯特藩-玻耳兹曼定律：

$$M = \sigma T^4$$

斯特藩-玻耳兹曼常量

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$$

2. 爱因斯坦的光子假说:光子能量

$$\varepsilon = h\nu$$

光电效应的解释——爱因斯坦公式：

$$h\nu = E_{\mathrm{k,max}} + A = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + A = eU_c + A$$

$E_{\mathrm{k,max}}$——最大初动能;U_c——截止电压;A——逸出功。

截止频率(或红限频率)

$$\nu_0 = \frac{A}{h}$$

3. 康普顿效应

(1) 设入射线的波长为 λ_0,沿不同方向的散射线中,除原波长外都出现了波长$\lambda > \lambda_0$ 的谱线。

(2) 波长差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随散射角 θ 的增加而增加;原波长谱线的强度随 θ 的增加而减小,波长为 λ 的谱线强度随 θ 的增加而增加。

(3) 若用不同元素作散射物质,则在同一角度 θ 下 $\Delta\lambda$ 与散射物质无关;原波长 λ_0 谱线的强度随散射物质原子序数的增加而增加,波长 λ 的谱线强度随原子序数的增加而减小。

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 0.024\text{Å}\text{—— 康普顿波长}$$

4. 德布罗意物质波假说:与一个具有确定能量 ε 和动量 p 的粒子相联系的是一列平面波 $e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi\varepsilon}{h} = \frac{\varepsilon}{\hbar}$$

$$k = |\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}$$

【典型习题解答】

1.1 夜间地面降温主要是由于地面的热辐射。如果晴天夜里地面温度是 −5 ℃,按黑体辐射计算,每平方米地面失去热量的速率多大?

解 每平方米地面失去热量的速率即地面的辐射出射度

$$M = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 268^4 = 292\ \text{W/m}^2$$

1.2 在地球表面,太阳光的强度 $I = 1.0\times10^3\ \text{W/m}^2$。地球轨道半径 $r = 1.5\times10^8$ km,太阳半径 R_s 以 7.0×10^8 m 计,并视太阳为黑体,试估算太阳表面的温度。

解

$$M = \frac{4\pi r^2 I}{4\pi R_s^2} = \sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{r^2 I}{R_s^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{(1.5\times10^{11})^2\times1.0\times10^3}{(7.0\times10^8)^2\times5.67\times10^{-8}}} = 5.3\times10^3\ \text{K}$$

1.3 Procyon B 星距地球 11 光年,它发出的光到达地球表面的强度为 $1.7\times10^{-12}\ \text{W/m}^2$,该星的表面温度为 6600 K。据此估算该星的直径。

解 该星距地球的距离

$$r = 3600 \times 24 \times 365 \times 11 \approx 1.04 \times 10^{17}\ \text{m}$$

以该星发光作为黑体辐射来估算,有

$$M = \frac{4\pi r^2 I}{4\pi R^2} = \sigma T^4$$

$$R = \sqrt{\frac{r^2 I}{\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{(1.04 \times 10^{17})^2 \times 1.7 \times 10^{-12}}{5.67 \times 10^{-8} \times 6600^4}} = 1.3 \times 10^7\ \text{m}$$

该星的直径

$$D = 2R = 2 \times 1.3 \times 10^7 = 2.6 \times 10^7 \text{ m}$$

1.4 宇宙大爆炸遗留在空间的均匀的、各向同性的背景热辐射相当于 3 K 黑体辐射。地球表面接收此辐射的功率是多大？

解
$$P = M4\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$
$$= 4\pi \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 3^4 = 2.36 \times 10^9 \text{ W}$$

1.5 在理想条件下，正常人的眼睛接收到 550 nm 的可见光时，只要每秒光子数达到 100 个就会有光的感觉。试问与此相当的光功率是多少？

解 正常人的眼睛有光的感觉时相应的光功率是

$$I_{\min} = 100h\nu = \frac{100hc}{\lambda}$$
$$= \frac{100 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{550 \times 10^{-9}} = 3.62 \times 10^{-17} \text{ W}$$

1.6 (1) 广播天线以频率 1 MHz、功率 1 kW 发射无线电波，试求它每秒发射的光子数。

(2) 利用太阳常量 $I_0 = 1.35 \text{ kW/m}^2$，计算每秒人眼睛接收到的来自太阳的光子数。假定光的平均波长为 550 nm，人的每个眼球接收光的面积为 1 cm²。

解 (1) 广播天线每秒发射的光子数

$$N = \frac{P}{h\nu} = \frac{1 \times 10^3}{6.63 \times 10^{-34} \times 1 \times 10^6} = 1.5 \times 10^{30}/\text{s}$$

(2) 每秒人眼睛接收到的来自太阳的光子数

$$N = \frac{I_0 S}{hc/\lambda} = \frac{1.35 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-4}}{(6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8)/(550 \times 10^{-9})} = 7.5 \times 10^{17}/\text{s}$$

1.7 铝的逸出功是 4.2 eV，现用波长为 200 nm 的光照射铝表面，求：

(1) 光电子的最大动能；

(2) 截止电压；

(3) 铝的红线波长。

解 (1)
$$E_{\text{k,max}} = h\nu - A = h\frac{c}{\lambda} - A$$
$$= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9} \times 1.6 \times 10^{-19}} - 4.2 = 2.0 \text{ eV}$$

(2)
$$U_c = \frac{E_{\text{k,max}}}{e} = \frac{2.0}{1} = 2.0 \text{ V}$$

(3)
$$\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}=\frac{hc}{A}$$
$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{4.2\times1.6\times10^{-19}}=2.96\times10^{-7}\ \text{m}=296\ \text{nm}$$

1.8 从钠中脱出一个电子至少需要2.30 eV能量。若用波长为430 nm的光投射到钠的表面上，试求：

(1) 钠的截止频率ν_0及其相应的波长λ_0；

(2) 出射光电子的最大动能$E_{\text{k,max}}$和最小动能$E_{\text{k,min}}$；

(3) 截止电压U_c。

解 (1) 只有当每个光量子的能量$h\nu$大于逸出功A时，才有光电子逸出金属表面。因此钠的截止频率ν_0和红线波长λ_0分别为

$$\nu_0=\frac{A}{h}=\frac{2.30\times1.60\times10^{-19}}{6.63\times10^{-34}}=5.55\times10^{14}\ \text{Hz}$$

$$\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}=\frac{3\times10^8}{5.55\times10^{14}}=5.41\times10^{-7}\ \text{m}=541\ \text{nm}$$

(2) 当光子能量$h\nu$完全被光电子吸收，并在逸出过程中未因碰撞而损失能量时，该电子克服逸出功而逸出金属后将具有最大动能，即

$$E_{\text{k,max}}=h\nu-A=h\frac{c}{\lambda}-A$$
$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{430\times10^{-9}\times1.6\times10^{-19}}-2.30=0.59\ \text{eV}$$

如果在光电子逸出金属的过程中部分能量因碰撞而损失后，使光电子刚好能克服逸出功而逸出金属，这些光电子将具有最小动能：

$$E_{\text{k,min}}=0$$

(3) 截止电压

$$U_c=\frac{E_{\text{k,max}}}{e}=0.59\ \text{V}$$

1.9 电子和光子各具有波长0.20 nm，它们的动量和总能量各是多少？

解 电子和光子的动量都是

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.20\times10^{-9}}=3.32\times10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

电子的总能量

$$E_e=\sqrt{(pc)^2+(m_0c^2)^2}$$
$$=\sqrt{(3.32\times10^{-24}\times3\times10^8)^2+(9.11\times10^{-31}\times9\times10^{16})^2}$$
$$=8.19\times10^{-14}\ \text{J}=5.12\times10^5\ \text{eV}$$

光子的能量为

$$\begin{aligned}E &= pc = 3.32 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{8} \\ &= 9.9 \times 10^{-16}\ \mathrm{J} = 6.19 \times 10^{3}\ \mathrm{eV}\end{aligned}$$

1.10 室温(300 K)下的中子称为热中子。求热中子的德布罗意波长。

解 在室温下中子的平均动能

$$E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}\ \mathrm{J}$$

中子的静能为

$$E_0 = m_n c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 1.50 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

由于 $E_k \ll E_0$,所以可以不考虑相对论效应,从而有

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_n E_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 6.21 \times 10^{-21}}} \\ &= 1.46 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} = 0.146\ \mathrm{nm}\end{aligned}$$

1.11 一电子显微镜的加速电压为 40 keV,求经过这一电压加速的电子的德布罗意波长。

解 由于 40 keV 比电子的静能 511 keV 小得多,可以不考虑相对论效应,所以有

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 4 \times 10^{4} \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 6.1 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

1.12 卢瑟福的 α 粒子散射实验所用 α 粒子的能量是 7.7 MeV。α 粒子的质量为 6.7×10^{-27} kg。所用 α 粒子的波长是多少?对原子的线度10^{-10}m 来说,这种 α 粒子能像卢瑟福做的那样按经典力学处理吗?

解 α 粒子的静能为

$$E_0 = mc^2 = 6.7 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^{8})^2 = 6.03 \times 10^{-10}\ \mathrm{J} = 3.8 \times 10^{3}\ \mathrm{MeV}$$

由于 $E \ll E_0$,所以可以按经典力学求其动量,其波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 6.7 \times 10^{-27} \times 7.7 \times 10^{6} \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 5.2 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

此波长远小于原子的线度10^{-10} m,所以可以把 α 粒子当做经典粒子处理。

1.13 为了探测质子和中子的内部结构,曾在斯坦福直线加速器中用能量为 22 GeV 的电子作探测粒子轰击质子。这样的电子的德布罗意波长是多少?质子的线度为10^{-15} m,这样的电子能用来探测质子内部的情况吗?

解 所用电子能量(22 GeV)远远超过电子的静能(0.51 MeV),所以需用相对论计算其动量,$p=E/c$,而其德布罗意波长

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{E}\\ &= \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{9}}{22\times10^{9}\times1.6\times10^{-19}}\\ &= 5.7\times10^{-17}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

由于 $\lambda \ll 10^{-15}$ m,所以这种电子可以给出质子内部各处的信息,可以用来探测质子内部的情况。

1.14 动能为 20 eV 的电子,与处在基态的氢原子相碰,当氢原子回到基态时,辐射出波长为 121.6 nm 的光子。试求碰撞后电子的速度。

解 按题意,电子动能 $E_{k0}=20$ eV 的一部分在与氢原子相碰时为氢原子提供了激发能

$$\Delta E = E_n - E_0 = hc/\lambda$$

而余下的动能使电子在碰撞后仍具有一定的速度,因此有

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = E_{k0} - \Delta E = E_{k0} - \frac{hc}{\lambda}$$

所以碰撞后电子的速度为

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(E_{k0} - \frac{hc}{\lambda}\right)}\\ &= \sqrt{\frac{2}{9.1\times10^{-31}}\left(20\times1.6\times10^{-19} - \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{121.6\times10^{-9}}\right)}\\ &= 1.85\times10^{6}\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$

1.15 已知氢原子的电离能为 13.60 eV。一个能量为 15.20 eV 的光子被氢原子中的基态电子吸收而形成一个光电子。试求该光电子远离氢原子核时的速度及其德布罗意波长。

解 在远离氢原子核时,所形成的光电子具有的能量 E 等于光子的能量 15.20 eV 减去氢原子的电离能 13.60 eV,即

$$E = 15.20 - 13.60 = 1.60\ \mathrm{eV}$$

于是,这时该光电子的速度 v 及德布罗意波长 λ 分别为

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times1.60\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}} = 7.50\times10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}\\ &= \frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.1\times10^{-31}\times1.60\times1.6\times10^{-19}}}\\ &= 9.70\times10^{-10}\ \mathrm{m} = 0.970\ \mathrm{nm}\end{aligned}$$

1.16 一束带电荷量与电子电荷量相同的粒子，经 206 V 电压加速后，测得其德布罗意波长为 2.0 pm，试求粒子的质量。

解 已知粒子所带电荷量为

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

经 U=206 V 电压加速后获得的动能为

$$E_k = eU$$

其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$$

解得这粒子的质量为

$$\begin{aligned} m &= \frac{h^2}{2eU\lambda^2} \\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 206 \times (2.0 \times 10^{-12})^2} \\ &= 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.01\ \mathrm{u} \end{aligned}$$

1.17 设电子和光子的波长均为 0.50 nm，试求两者的动量和动能之比。

解 (1) 对于电子，由德布罗意关系式可得其动量为

$$p_e = \frac{h}{\lambda}$$

而光子的动量为

$$p_{ph} = \frac{E_{ph}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

所以，光子和电子的动量之比为

$$\frac{p_e}{p_{ph}} = 1$$

(2) 当电子的能量不高时，其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_e}}$$

即

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2}$$

对于光子，其能量为

$$E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

所以，光子和电子的能量之比为

$$\frac{E_e}{E_{ph}}=\frac{h^2}{2m_e\lambda^2}\frac{\lambda}{hc}=\frac{h}{2m_e\lambda c}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times9.11\times10^{-31}\times0.50\times10^{-9}\times3\times10^{8}}=2.4\times10^{-3}$$

1.18 (1) 若电子的动能等于它的静能，试求该电子的速度和德布罗意波长；(2) 若一个光子的能量等于一个电子的静能，试问该光子的频率、波长和动量各是多少？

解 (1) 根据狭义相对论，电子的动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2$$

而按题意，已知 $E_k=m_0c^2$，所以有

$$mc^2=2m_0c^2 \quad 即 \quad m=2m_0$$

将 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 代入，即可得该电子的速度为

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0.866c$$

按照德布罗意假设，该电子的波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{h}{2\times0.866m_0c}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times0.866\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}}$$

$$=1.40\times10^{-12}\ \text{m}=1.40\times10^{-3}\ \text{nm}$$

(2) 若一个光子的能量等于一个电子的静能，即

$$E=m_0c^2$$

则可得该光子的频率、波长和动量分别为

$$\nu=\frac{E}{h}=\frac{m_0c^2}{h}=\frac{9.11\times10^{-31}\times(3\times10^{8})^2}{6.63\times10^{-34}}=1.24\times10^{20}\,\text{Hz}$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{3\times10^{8}}{1.24\times10^{20}}=2.42\times10^{-12}\ \text{m}=2.42\times10^{-3}\ \text{nm}$$

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2.42\times10^{-12}}=2.74\times10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

1.19 (1) 在磁感应强度为5.4 mT的均匀磁场中，电子作半径为1.2 cm的圆周运动，试求它的德布罗意波长；(2) 目前世界上能量最高的电子加速器是西欧中心的正负电子对撞机LEP，每束电子的能量可达到50 GeV，试求这些电子的德布罗意波长。

解 (1) 电子在磁场中作圆周运动,洛伦兹力即为电子作圆周运动的向心力:

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

由此得电子的动量

$$p = mv = eRB$$

这些电子的德布罗意波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{eRB} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.60 \times 10^{-19} \times 1.2 \times 10^{-2} \times 5.4 \times 10^{-3}} \\ &= 6.39 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0.0639\ \mathrm{nm}\end{aligned}$$

(2) 能量达到 50 GeV 的电子的德布罗意波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc}{E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{50 \times 10^9 \times 1.60 \times 10^{-19}} \\ &= 2.5 \times 10^{-17}\ \mathrm{m} = 0.025\ \mathrm{fm}\end{aligned}$$

1.20 (1) 试证明一个粒子的康普顿波长与其德布罗意波长之比为

$$\frac{\lambda_{\mathrm{C}}}{\lambda_{\mathrm{D}}} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1}$$

式中,E_0 和 E 分别为粒子的静能和运动粒子的总能量;(2) 试问:当电子的动能为何值时,它的德布罗意波长等于它的康普顿波长?

解 (1) 粒子的康普顿波长和德布罗意波长分别为

$$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_0 c}, \quad \lambda_{\mathrm{D}} = \frac{h}{p}$$

所以有

$$\frac{\lambda_{\mathrm{C}}}{\lambda_{\mathrm{D}}} = \frac{p}{m_0 c} = \frac{pc}{m_0 c^2} = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{E_0} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1}$$

(2) 当$\frac{\lambda_{\mathrm{C}}}{\lambda_{\mathrm{D}}}=1$时,有

$$\sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1} = 1 \quad 即 \quad E = \sqrt{2}E_0$$

此时,电子的动能

$$E_{\mathrm{k}} = E - E_0 = (\sqrt{2} - 1)E_0 = 0.4E_0$$

1.21 一个被冷却到几乎静止的氢原子从 $n=5$ 的状态跃迁到基态时发出的光子的波长多大?氢原子反冲的速率多大?

解

$$E_5-E_1=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\lambda &=\frac{hc}{E_5-E_1}\\ &=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{(1/25-1)\times(-13.6\times1.6\times10^{-19})}\\ &=9.52\times10^{-8}\ \mathrm{m}=95.2\ \mathrm{nm}\end{aligned}$$

氢原子的反冲速率为

$$\begin{aligned}v &= \frac{p}{m_{\mathrm{H}}}=\frac{h}{m_{\mathrm{H}}\lambda}\\ &=\frac{6.63\times10^{-34}}{1.67\times10^{-27}\times9.52\times10^{-8}}=4.17\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$

CHAPTER 2

状态和波函数 2

【内容提要】

1. 量子力学中用波函数描写微观体系的状态。

2. $\Psi^* \Psi \mathrm{d}\tau = |\Psi|^2 \mathrm{d}\tau$ 是状态用 Ψ 描写的粒子在体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的几率(设 Ψ 是归一化的)。

3. 态叠加原理:设 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$ 是体系的可能状态,那么,这些态的线性叠加

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i$$

也是体系的一个可能状态。

4. 波函数随时间的变化规律由薛定谔(Schrödinger)方程(简记为 S. eq)给出:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi + V(\boldsymbol{r}, t)\Psi$$

当势场 $V(\boldsymbol{r})$ 不显含 t 时,其解是定态解 $\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$,$\psi(\boldsymbol{r})$ 满足定态 S. eq

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(\boldsymbol{r})\right]\psi = E\psi$$

定态 S. eq 即能量算符的本征方程。

5. 波函数的归一化条件:$\int_{(全)} |\psi|^2 \mathrm{d}\tau = 1$。相对几率分布:$\psi(\boldsymbol{r}) \sim c\psi(\boldsymbol{r})$,波函数常数因子不定性;相位因子不定性。

6. 波函数一般应满足三个基本条件:连续性、有限性、单值性。

7. 几率流密度 $\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$ 与几率密度 $\rho = \psi^* \psi$ 满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

【典型习题解答】

2.1 用球坐标表示的粒子波函数为 $\psi(r, \theta, \varphi)$。

(1) 写出粒子在(θ,φ)方向的立体角$\mathrm{d}\Omega$中被测到的几率；

(2) 写出粒子在球壳$(r,r+\mathrm{d}r)$中被测到的几率；

(3) 写出粒子在(θ,φ)方向的立体角$\mathrm{d}\Omega$中且半径在$0<r<a$范围内被测到的几率。

解 (1)
$$P=\mathrm{d}\Omega\int_0^{\infty}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2r^2\mathrm{d}r$$

(2)
$$P=r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi$$

(3)
$$P=\mathrm{d}\Omega\int_0^{a}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2r^2\mathrm{d}r$$

2.2 一粒子的波函数为$\psi(\boldsymbol{r})=\psi(x,y,z)$，写出粒子位于$x\sim x+\mathrm{d}x$间的几率。

解 $P=\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\,|\psi(x,y,z)|^2$

2.3 何谓几率流密度？写出几率流密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$的表达式。

解 单位时间内，与粒子前进方向垂直的单位面积内通过的几率称为几率流密度，

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)$$

2.4 设质量为m的粒子在一维无限深势阱中运动，势阱的势能函数为

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0,x>a\\ 0, & 0<x<a\end{cases}$$

试用德布罗意的驻波条件，求粒子能量的可能取值。

解 据驻波条件，有

$$a=n\frac{\lambda}{2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

所以

$$\lambda=2a/n \tag{1}$$

又据德布罗意关系

$$p=h/\lambda \tag{2}$$

而能量

$$\begin{aligned}E&=p^2/2m=h^2/2m\lambda^2\\&=\frac{h^2n^2}{2m\cdot4a^2}=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{3}$$