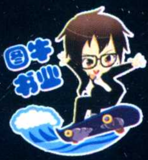
考研数学

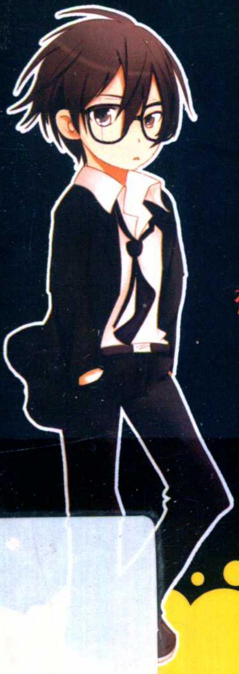


2016

满分过关100题

100 exercises to KO the Math exam

主编 杨超 姜晓千 方浩



想做的事情总找得出时间和机会，

不想做的事情总找得出借口。

中国政法大学出版社

考研数学满分过关100题

主　编　杨　超　姜晓千　方浩

中国政法大学出版社
2015 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学满分过关100题/杨超，姜晓千，方浩主编.—北京：中国政法大学出版社，2015.10
ISBN 978-7-5620-6399-5

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①杨…　②姜…　③方…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集　Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第248068号

出版者　中国政法大学出版社

地　　址　北京市海淀区西土城路25号

邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088

网　　址　http://www.cuplpress.com
（网络实名：中国政法大学出版社）

电　　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）
58908334(邮购部)

承　　印　北京盛彩捷印刷有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/32

印　　张　6

字　　数　110千字

版　　次　2015年10月第1版

印　　次　2015年10月第1次印刷

定　　价　19.80元

前　言

100 题是我们团队所编写的整个考研数学系列中的最后一本。

在每年的培训辅导中我们发现，在考前一个月左右应该怎样去复习数学这门课，不少同学会感到非常迷茫：有些同学是不知道做怎样的题，有些同学又觉得没题可做，因为手上的习题集和真题已经做完，重复做又觉得没有新鲜劲，但数学的复习不能停止。于是，我们团队编写了这本《满分过关 100 题》。本书所选择的例题，内容新颖，涵盖面广，不是一味去追求难度，而是以考纲为本，以真题为参考，对重要考点进行强化和预测，目的是提高考生解综合题的能力，对所学知识进行串联，对基本知识、公式进行回顾。据了解，考前经过综合题系统训练的学生，无论是对基本内容的理解，还是对计算能力的提高、解题方法的掌握，都比一般考生的水平高出好多。

全书中分高等数学、线性代数以及概率论与数理统计三部分，每部分又有一些例题，部分例题中通过分析、解答和评注做了精妙的解析和拓展。整本书是出自我的构思，高数部分的题

也是由我编写，线代和概率部分由姜晓千老师编写，并得到了方浩老师的大力支持。去年的此书，深受广大考研学子的喜欢，今年在去年的基础上，进行修改和补充，希望可以帮助更多的考生获得理想的成绩。最后祝广大考研学子在2016考研金榜题名！

杨　超

2015. 10. 30

目　录

第一部分

高等数学

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right]$.

【解析】原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^{x}}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}x-x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{\mathrm{e}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]}{\mathrm{e}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}. \qquad ①$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}-1\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=-\mathrm{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1}{\dfrac{1}{x}} \qquad ②$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\lim_{t\to0^{+}}\frac{\dfrac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}$$

$$=-\mathrm{e}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\frac{\mathrm{e}}{2},$$

(因 $\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$)

所以原极限 $=\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

【注】(1)① 式因为分子极限存在，分母 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 才可代入，读者要分清在求极限时非零因子何时可以代入，何时不能代入.

(2) $x\to+\infty$ 时，函数中有 $\frac{1}{x}$ 不好处理可使用倒代换.

(3) 本题可以改为求 $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ 的斜渐近线方程：

$$y=\frac{x}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x-\sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x)}$.

【解析】分子 $\sin\sin x-\sin\tan x$ 其实就是 $\sin b-\sin a$ 的形式，即同一函数在不同点函数值的差，可以使用拉格朗日中值定理，也可以用泰勒公式对 $\sin\sin x$，$\sin\tan x$ 展开.

方法一：$f(t)=\sin t$ 在 $[\tan x,\sin x]$ 上连续，在 $(\tan x,\sin x)$ 上可导，

故

$$\sin\sin x-\sin\tan x=\cos\varepsilon(\sin x-\tan x)$$

(ε 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间)

由泰勒公式 $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+o(x)$,

$$e^x = 1 + x + o(x),$$

$$\sqrt{1+x} - e^x = -\frac{1}{2}x + o(x) \sim -\frac{1}{2}x,$$

故原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\varepsilon(\sin x - \tan x)}{-\dfrac{1}{2}x^3} = 1.$

由泰勒公式可得 $\sin x - \tan x \sim -\dfrac{1}{2}x^3$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\varepsilon = 1.$

方法二: 由 $\sin t = t - \dfrac{1}{6}t^3 + \cdots$,

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \cdots \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &= \tan x - \frac{1}{6}\tan^3 x + \cdots \\ &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)^3 + \cdots \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

故原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{6}x^3}{-\dfrac{1}{2}x^3} = 1.$

3 设 $f(x) = \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $a_i > 0$, $a_i \neq 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

求（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$；

（Ⅲ）$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

【解析】（Ⅰ）当 $x\to 0$ 时，原极限属于 1^{∞}，

利用 $1^{\infty}=e^{A}$.

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)\frac{1}{x},$$

因

$$\lim_{x\to 0}(a_1^x-1)\frac{1}{x}=\ln a_1,$$

$$\lim_{x\to 0}(a_2^x-1)\frac{1}{x}=\ln a_2,$$

故

$$A=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n).$$

故原极限 $=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

（Ⅱ）设 $m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，

当 $x<0$ 时，$a_i^x\leqslant m^x$，

$$m^x<a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\leqslant nm^x,$$

于是

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}m<\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant m.$$

由夹逼准则可得：原极限 $=m$.

（Ⅲ）与（Ⅱ）的方法类似.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

【注】设 $a_k>0,1\leqslant k\leqslant n$，令

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad \text{算术平均数}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\quad \text{几何平均数}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-2}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\quad \text{调和平均数}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}\quad \text{最大值}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}\quad \text{最小值}$$

4 设 $x\to0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小，求 a,b.

【解析】方法一：

$$\begin{aligned}f(x)&=(\mathrm{e}^x-1)-\frac{(a-b)x}{1+bx}\\&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\&\quad-(a-b)x[1-bx+b^2x^2+o(x^2)]\\&=[1-(a-b)]x+\left[\frac{1}{2}+b(a-b)\right]x^2\\&\quad+\left[\frac{1}{6}-b^2(a-b)\right]x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

由题意得　$1-(a-b)=0,a-b=1,$

$$b(a-b)=-\frac{1}{2},$$

解得
$$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}.$$

方法二：因 $f(x)$ 是 x^3 的三阶无穷小，

所以
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}f''(x)=0.$$

于是有
$$\lim_{x\to 0}\left(e^x-\frac{a-b}{(1+bx)^2}\right)=0,$$

得 $a-b=1$.

由
$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+\frac{2b(1+bx)}{(1+bx)^4}\right)=0,$$

得 $b=-\dfrac{1}{2}$.

故
$$a=1+b=\frac{1}{2}.$$

5 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0$. 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

【解析】方法一：由题设条件得
$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0.$$

由于 $f(0)\neq 0$，故必有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则，有
$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$$
$$=(a+2b)f'(0)=0,$$

因为 $f'(0)\neq 0$，故必有 $a+2b=0$.

于是得

$$a=2,b=-1.$$

方法二:由题设条件得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),$$
$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h).$$

所以

$af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)$,

于是当 $a=2,b=-1$ 时,有

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h).$$

方法三:由题设条件得

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{a[f(h)-f(0)]+b[f(2h)-f(0)]+[a+b-1]f(0)}{h}\\&=af'(0)+2bf'(0)+\lim_{h\to 0}[a+b-1]\frac{f(0)}{h}\\&=(a+2b)f'(0)+\lim_{h\to 0}[a+b-1]\frac{f(0)}{h},\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{cases}a+2b=0,\\a+b-1=0,\end{cases}$$

于是得

$$a=2,b=-1.$$

方法四:由于

$$\begin{aligned}&af(h)+bf(2h)-f(0)\\&=a[f(h)-f(0)]+b[f(2h)-f(0)]+[a+b-1]f(0)\\&=ahf'(\xi_1)+2bhf'(\xi_2)+[a+b-1]f(0)\\&=ah[f'(0)+o(h)]+2bh[f'(0)+o(h)]+[a+b-1]f(0)\end{aligned}$$

$= (a+2b)hf'(0)+[a+b-1]f(0)+o(h),$

由于

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h),$$

因此有

$$\begin{cases}a+2b=0,\\ a+b-1=0,\end{cases}\text{所以}\begin{cases}a=2,\\ b=-1.\end{cases}$$

6

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}\,\mathrm{d}x\right)^n\right], & x=0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$$

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值.

【解析】（Ⅰ）$x>0$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{kx}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\sin x}{x}.$$

令

$$\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}\,\mathrm{d}x=a,$$

显然 $1<a<\sqrt{3}$，

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$，令 $b_n=\dfrac{a^n}{n!}$，

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0(n\to\infty),$$

由比值判别法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$收敛.

由收敛级数的必要条件得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}\,\mathrm{d}x\right)^n=0,$$

故 $f(0)=1$.

当 $x<0$ 时，

$$f(x)=f(-x)=\frac{\sin x}{x},$$

故

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0.$$

（Ⅱ）当 $0<x\leqslant\pi$ 时，

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

令

$$g(x)=x\cos x-\sin x,$$
$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x\leqslant 0,$$
$$g(x)<g(0)=0,$$

所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 严格递减，

而 $f(x)$ 为偶函数，$f(x)\leqslant f(0)=1$.

7 $f_n(x)=\sin x+\sin^2x+\cdots+\sin^nx$，

（Ⅰ）$n\in\mathbf{N}$，证明 $f_n(x)=1$ 在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$内有唯一根；

（Ⅱ）$x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$是 $f_n(x)=1$ 的根，求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$.

【证明】（Ⅰ）当$n=1$时，方程$\sin x=1$，$x_1=\frac{\pi}{2}$是该方程的根，

又因为$(\sin x-1)'=\cos x$，在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$大于0，

所以$x_1=\frac{\pi}{2}$是方程$\sin x=1$的唯一实根，

当$n>1$时，令

$$F_n(x)=f_n(x)-1,$$

$$\begin{aligned}F_n\left(\frac{\pi}{6}\right)&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\\&=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-1\\&=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\\&=-\frac{1}{2^n}<0,\end{aligned}$$

$$F_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=n-1>0.$$

由零点定理知，$\exists x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$使$F_n(x_n)=0$，即方程$f_n(x)=1$至少有一个实根$x_n$.

又因当$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$时，

$F_n'(x)=f_n'(x)=\cos x(1+2\sin x+\cdots+n\sin^{n-1}x)>0$，

$F_n(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$内递增，故$x_n$是唯一的.

(Ⅱ)$\sin x_n+\sin^2x_n+\cdots+\sin^nx_n=1$，　①

$\sin x_{n-1}+\sin^2x_{n-1}+\cdots+\sin^{n-1}x_{n-1}=1$，　②

①－②⇒

$(\sin x_n-\sin x_{n-1})[(1+\sin x_n+\sin x_{n-1}+\cdots)]+\sin^nx_n=0$，

因为$\sin^nx_n>0$，$1+\sin x_n+\sin x_{n-1}+\cdots>0$，