组合数学基础

（第二版）

张利民 马传贵 张春元 高峰修 黄贤珍 编著

中国人民解放军信息工程大学

组合数学基础

（第二版）

编著　张利民　马传贵　张春元
高峰修　黄贤珍

二〇一二年一月

第二版前言

本书自 2005 年第一版印刷以来，在我院相关专业历届本科生和部分硕士研究生教学中作为教材,在使用过程中也发现了一些问题和需要进一步充实完善的地方。为此，我们根据多年来的教学实践与今后教学的进一步要求，对本书第一版进行修订。

这次修订主要由张利民教授对部分章节做了改写,并对第一版中发现的错漏和不当之处做了订正。在修订过程中，我们力求使概念更加清晰，思想方法更加明确，推导论证更加严谨，并尽量做到深入浅出、通俗易懂，以便于教学和学员自学阅读。

本次修订过程中，高峰修副教授和黄贤珍同志做了大量的工作，组合数学课程组的同志们提供了很多宝贵的意见,信息工程学院教保办给予了很大的支持和帮助，在此一并深致谢忱。

编著者

二〇一二年一月

第一版前言

本书是在我们多年教学工作基础上编写的。之所以匆忙出书主要是因为在组合数学的教学中，深感需要一本具有我院特色、适合我院相关专业的教材。我们根据多年的教学经验，结合对组合数学的研究和体会，对目前我院组合数学课程的教学内容进行了比较大的调整，编写了这本可用于我院相关专业本科教学的教材。教材中注意了与其它课程的衔接 ，同时也注重在计算机、通信理论等多方面的应用。后续，我们还将编写适合硕士研究生使用的组合数学教材。

本书在编写中注意到组合数学的理论和方法在计算机、通信和密码学等领域的联系，重点强调了组合数学的各种方法的训练和应用,以求学生能够从中受益。内容的具体安排如下：首先是引言和预备知识；第一章是基本的排列与组合问题；第二章讨论了一些特殊的计数问题；第三章到第七章介绍了组合数学中常用的工具和方法,其中第七章专门介绍了 Polya 计数定理。每章后面都选配了适量的习题。本书是按照一个学期(60 学时)的教学时间编写的,可以根据教学实际情况和需要适当取舍。

由于时间和水平的限制，本书一定有若干不足之处甚至错误，我们会在今后的教学实践中不断修改完善,也希望能得到更多同仁的批评指正。本书在编写过程中得到信息工程大学信息工程学院的大力支持;信息工程学院信息研究系组合数学教学组的同志们提供了许多宝贵意见;徐岐军同志也为本书的印刷做了大量的工作，这里一并表示感谢!

作者

二〇〇五年七月

目　录

引　言

组合数学，又称组合论、组合分析、组合学，在数学游戏和博弈中有它的历史渊源，在工程学、化学、生物学、统计学、运筹学、密码学、计算机科学等学科都有广泛的应用。同时兼顾纯粹数学和应用数学两个领域，是组合数学的特色之一。内容的离散性、问题的趣味性、解决问题方法的多样性，又是组合数学的一个特色。

组合数学是一个古老而又年轻的数学分支。说它古老，是因为早在 4000 多年前我国的《河图》、《洛书》的传说就与组合数学有关，历史上许多著名的数学难题与组合数学有关，诸如 **Königsberg** 七桥问题，四色问题，Kirkman 女学生问题，正交拉丁方问题等。这些问题吸引了一代又一代青年学子，把他们引进了组合数学研究的殿堂，使得组合数学这门学科不断完善和发展。由于这门学科在自然科学的众多学科，管理科学的很多分支中，工程学的许多技术领域，尤其它在计算机科学的理论和应用上具有举足轻重的地位，近几十年得到迅猛飞速的发展。在信息时代的今天人们越来越认识到组合数学的重要性。组合数学是一块充满珍花异草的圣地，足以使观赏者流连忘返，更能激发观赏者研究的欲望和热情。

§1　什么是组合数学

我们先举一个典型例子来了解组合数学探讨的到底是什么：把一张白纸划分成 n 个区域，称两个区域是相邻的如果它们有公共线段，现在把每一个区域都染上一种颜色，条件是相邻的两个区域都不能同色，对这 n 个区域染色是否用四种颜色就够了？组合数学的问题常常是如此，先规定一件要做的事情，如用四种颜色给区域染色，这件事多半都是很容易做到而且有各种各样的做法，但我们同时加上了一些约束条件，如相邻区域不得同色，情形就大不一样了。现在有些做法符合条件有些不合条件，我们问符合条件的做法有多少种，或者问有没有符合条件的做法，或者要找出一种好的做法。

组合数学所研究的问题是按照一定的模式将集合的元素进行配置(安排)，通常反复出现的是以下四种类型的问题：

Ⅰ 配置的存在性；

Ⅱ 配置的计数或近似估计；

Ⅲ 配置的构造或分类；

Ⅳ 配置性质的研究。

如上述的例中集合的元素是 n 个区域，配置是用四种颜色染 n 个区域，规定的模式是相邻的两个区域都不能同色。当配置并非显然存在或不存在时，首要的问题是证明或

13838568529

否定它的存在；当配置显然存在或已证明存在时，需要求出这种配置的个数，当配置个数的计数存在困难时可对其进行近似估计，随着计算机科学的迅猛发展，为了充分利用计算机资源，需要对配置的计数问题给出算法，因此组合数学成了算法的理论基础；如有可能还要给出配置的构造或按照某种性质对配置进行分类。按照一定的模式将集合的元素进行配置可看作是一种组合结构，组合结构又可看作一种数学模型，社会实践中的一些实际问题可抽象为数学模型，因此对数学模型的研究是十分有意义的。

现今的组合数学内容非常丰富，本教程的第一册主要讲授组合数学的基本内容，它们是排列与组合，特殊计数，母函数，递归关系，容斥原理，鸽笼原理与 Remsey 理论，Pólya 计数定理。

数学中用来证实发现的主要工具之一是数学归纳法，归纳法通常是一种解决问题的有力手段，组合数学中尤其如此。用数学归纳法证明一个较强的结果往往比证明一个较弱的结果来得容易。

学好组合数学做一定数量的习题是非常重要的，做习题不仅需要对概念和定理的深刻理解，还需要智慧和技巧，解决组合问题往往需要一些巧妙的方法。智慧和技巧来源于知识的积累，知识的积累来源于刻苦学习，巧妙的方法来源于对知识的牢固掌握和灵活的运用。不做一定数量的习题很难理解组合数学的思想和方法。习题能独立完成是最好的，相互讨论完成较难的习题也应该提倡。

§2 组合问题举例

1. 棋盘的完全覆盖

考虑一个 8×8 的棋盘，假设有足够多的形状相同的骨牌，骨牌的大小恰好能盖住棋盘的两方格。是否能用 32 张骨牌盖住棋盘的 64 个方格？如果能，称这样的配置为棋盘的完全覆盖。

一般地，当 m 和 n 为何值时，$m\times n$ 的棋盘有完全覆盖？

2. 立方体的切割

考虑一个边长为 3 的立方体木块，将这个立方体切割成 27 个边长为 1 的小立方体，最少要切割几次？

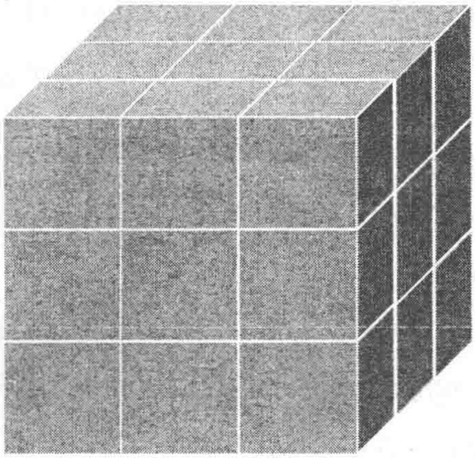

图 1

3. Königsberg 七桥问题

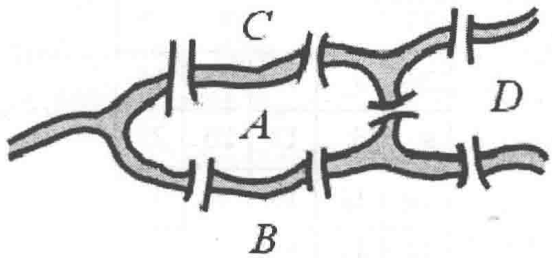

图 2

Königsberg 这座城市被河流划分为 A, B, C, D 四区（见图 2），有七座桥连接这四个区。问能否从某一区出发，每一座桥经过一次且仅一次而回到原区。

4. 四色猜想

在组合数学(图论)中，也许是在全部数学中，最出名的没有(用数学方法)解决的问题是著名的四色猜想。任何一个数学家可以在五分钟之内将这个非凡的问题(也称为四色问题)向马路上的任何一个普通人讲清楚。在讲清楚之后，虽然两个人都懂得了这个问题，但是要想解决它谁也无能为力。

四色猜想是："在一个平面或球面上的任何一张地图只用四种颜色着色，使得具有一段公共边界的两个国家染上不同的颜色。每个国家必须由一个单联通的区域构成"。

5. 幻方

n 阶幻方是由数字 $1,2,\ldots,n^2$ 构成的 $n\times n$ 矩阵，满足每行每列及两个对角线上的元素之和均为 S，这个和数 S 称为**幻和**。

因为 $1+2+\ldots+n^2=n^2(n^2+1)/2$，所以 $S=n(n^2+1)/2$.

容易给出 3 阶幻方

8	1	6
3	5	7
4	9	2

当 n 为奇数时，有一个简单的方法来构造 n 阶幻方。

首先把 1 放在最上面一行的中间位置，然后按下面规则把 2,3,…n 这些数字沿一条由左下至右上的斜线相邻放置。

1. 当一个数放在最上面一行的$(1,k)$位置，下一个数放在最下面一行的$(n,k+1)$位置。

2. 当一个数放在最右边一列(k,n)位置，下一个数放在最左边一列的$(1,k-1)$位置。

3. 当遇到一个位置已经放置，或已经放在右上角位置，则下一个数就放在前一个数的正下方位置。

下面是一个 5 阶幻方。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

6. 36 军官问题

有 36 名军官，来自 6 个不同的团队，它们有 6 种不同的军衔。问能否把这 36 名军官排成一个 6×6 的方阵，使得每行和每列都是不同团队的军官并且军衔互不相同。

这个问题是 Euler 在 18 世纪作为一个数学游戏提出来的。每名军官可用一个有序对 (i, j) 来表示，这里 i 表示他的军衔，j 表示他所在的团队，i, j =1,2,…,6。这样 36 名军官对应 36 个有序对(i , j) 。于是上述问题可表述为：排列这 36 个有序对(i, j)为一个 6×6 方阵，使得每行和每列的有序对中第一个坐标和第二个坐标上数字 1,2,…,6 都出现。这样的方阵可以分成两个 6×6 的方阵，一个由有序对的第一个坐标的元素构成，另一个由有序对的第二个坐标的元素构成，并且这两个方阵的每行和每列的元素都不重复出现。我们称这样的方阵称为**拉丁方**。一般定义 n 阶拉丁方为由 n 个不同元素构成的方阵，满足每行和每列的元素都不重复出现。

称两个 n 阶拉丁方 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$是**正交的**，如果这个 n 阶方阵$((a_{ij}, b_{ij}))$的 n^2 个有序对(a_{ij}, b_{ij})是互不相同的。

由正交拉丁方的定义可知，36 军官问题等价于是否存在两个 6 阶正交拉丁方。

Euler 猜想不存在两个 6 阶正交拉丁方，进一步他还猜想，不存在两个 $n=2k+2$ 阶正

交拉丁方，$k=1,2,\ldots$。1901 年，Tarry 证明了 $n=6$ 时，Euler 猜想为真。1960 年前后，由三位数理统计学家证明了 $n>6$ 时，Euler 猜想不真。

7. Kirkman 女学生问题

1850 年，Kirkman 提出下述问题：一个女老师每天都带着她班上的 15 名女学生散步，这 15 名学生排成 5 行，每行 3 人，每个学生都有两个同学与她在同一行。问是否可以设计一种散步方案，使得连续 7 天中，每个学生与其他同学在同一行中的次数不超过一次。

8. 一个奇怪的函数

设 $f(x)$ 是值域和定义域都是正整数集的函数，定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x-a, & x>n\\ f(f(x+a+1)), & x\le n,\end{cases}$$

其中 a 和 n 都是正整数，且 $a\le n$。事实上，$f(x)$ 是一个分段函数，当 $x>n$ 时，容易确定 $f(x)$ 的函数值；有趣的是，当 $x\le n$ 时，$f(x)$ 是一个固定的值 $n+1-a$。例如：对于 $a=5$，$n=5$，我们有 $f(6)=1$．$f(5)=f(f(11))=f(6)=1$；$f(4)=f(f(10))=f(5)=1$；$f(3)=f(f(9))=f(4)=1$；$f(2)=f(f(8))=f(3)=1$；$f(1)=f(f(7))=f(2)=1$．你能发现一般规律吗？试证明当 $x\le n+1$ 时，所给的函数 $f(x)=n+1-a$。

§3 预备知识

为了读者阅读方便，我们介绍一些基础知识、常用符号和术语。

1. 集合

像通常那样，我们把所研究的对象叫做**元素**，或元，把要研究对象(元素)的全体叫做**集合**，或集，并说这个集合由这些元素所组成。我们一般用大写的拉丁字母表示一个集合，如果需要列出集合里的元素，我们可以把一个集合写成 $A=\{a_1, a_2,\ldots\}$，这里 a_i 是 A 的元素，记作 $a_i\in A$. 有时我们用性质 P 来刻画一个集合，具有性质 P 的所有元素的集合表示如下

$$\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}。$$

例如，$\{x\mid x$ 是能被 2 整除的整数$\}$表示所有偶数的集合。不含任何元素的集合叫做**空集**，用符号 $\varnothing$ 表示。

[k-元集] 由 k 个元素构成的集叫做 k-元集。

[族] 族是集的同义词。当一个集 A 的元素都是集的时候，为了避免混淆，把 A 叫做一个族或者一个集族。

[子集] 设 A 和 B 都是集，若 B 的每个元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，记作 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$，读作"B 包含于 A"或"A 包含 B"。

对于任何的集 A, B, C 有

1° $A\subseteq A$ （自反律）

2° 从$A\subseteq B$, $B\subseteq A$，可推出$A=B$ (反对称律)

3° 若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$ (传递律)

若$A\subseteq B$ 但是$A\neq B$ ($B=A$不成立)，则称A是B的真子集。规定空集$\varnothing$是任何集的子集。

[差集] 设A和B都是集，若所有属于A但不属于B的元素的全体是一个集合，称为A和B的差集，记作$A\backslash B$或$A-B$。

[并集] 设$\{A_i|i\in I\}$是一个集族，则

$$\{x|存在一个A_i使得x\in A_i\}$$

是一个集，称为这个集族的并集，记作$\cup_{i\in I}A_i$。

[交集] 设$\{A_i|i\in I\}$是一个集族，则

$$\{x|对每一个A_i都有x\in A_i\}$$

是一个集，称为这个集族的交集，记作$\cap_{i\in I}A_i$。

[对称差] 设A和B都是集，属于$A\cup B$但不属于$A\cap B$的元素的全体是一个集合，称为A和B的**对称差**，记作$A\Delta B$。事实上，

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)。$$

[有序对] 如果两个元素构成的集合明确指明了其中一个元素在前，另一个元素在后，则称这两个元素构成一个**有序对**，记为$\langle x, y\rangle$，称x和y分别是$\langle x, y\rangle$的第一个坐标和第二个坐标。有序对$\langle x_1, y_1\rangle$与$\langle x_2, y_2\rangle$相等，当且仅当$x_1=x_2$和$y_1=y_2$。

[有序k元组] 如果k个元素构成的集合明确指明了这k个元素的先后顺序，则称这k个元素构成一个**有序k元组**，记为$\langle x_1, x_2,\dots,x_k\rangle$。称$x_i$是$\langle x_1, x_2,\dots,x_k\rangle$的第$i$个坐标。有序$k$元组$\langle x_1, x_2,\dots,x_k\rangle$与$\langle y_1, y_2,\dots,y_k\rangle$相等，当且仅当$x_i= y_i$，对每个$i=1,2,\dots,k$。

[迪卡儿积] 设A和B都是集，则

$$\{\langle x, y\rangle|x\in A且y\in B\}$$

是一个集合，称为A和B的**迪卡儿积**，记作$A\times B$。

一般地，设$A_1, A_2,\dots,A_k$ 是k个集，则

$$\{\langle x_1, x_2,\dots,x_k\rangle|x_i\in A, i=1,2,\dots,k\}$$

是一个集合，称为$A_1, A_2,\dots,A_k$ 的迪卡儿积，记作$A_1\times A_2\times\dots\times A_k$。

[二元关系] 设A是集，$A\times A$的一个子集R称为A上的一个**二元关系**。$\langle x,y\rangle\in R$也可记作xRy，称作x和y有关系R。

[等价关系] 若A上的一个二元关系R满足下面三条性质，则称R是**等价关系**。

对于A的任何元素x, y, z有

1° xRx (自反律)

2° 若xRy，则yRx (对称律)

3° 若xRy，yRc，则xRc (传递律)

[集的运算规则] 设A, B, C都是集，则

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

结合律 $A(\cup B\cup C)=(B\cup A)\cup C, A\cap (B\cap C)=(B\cap A)\cap C$

分配律 $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$,

$A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$

德·摩根律 $C\backslash(A\cup B)=(C\backslash A)\cap (C\backslash B)$,

$C\backslash (A\cap B)=(C\backslash A)\cup (C\backslash B)$

[方幂集公理] 集A的所有子集的全体是一个集，称为A的**方幂集**，记作2^A。

集合 A 的势用符号$|A|$表示。若 A 是有限集，则$|A|$是一个非负整数。$|A|=0$ 当且仅当 A 是空集。

符号$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$和$\mathbb{C}$分别表示正整数，整数，有理数，实数和复数的集合；$\mathbb{N}_0$表示非负整数的集合．若 $n\in\mathbb{N}$，$\mathbb{N}_n$ 表示 1, 2, …, n 这 n 个数的集合，即$\mathbb{N}_n=\{1, 2, \ldots, n\}$。设 A 是一个实数的集合，记号$(a_1, a_2, \cdots, a_k)_\leq$ 表示 A 上以 a_1 为首项的长为 k 的递增序列；记号$(a_1, a_2, \cdots, a_k)_<$ 表示 A 上以 a_1 为首项的长为 k 的严格递增序列。

2．映射

设 A 和 B 是两个集合，A 到 B 的一个**映射**是一个确定的法则，它使 A 中每一个元素 a 都与 B 中一个唯一确定的元素 b 对应。若π是 A 到 B 的映射，则记

$$\pi: A\to B.$$

若映射π使元素 $b\in B$ 与元素 $a\in A$ 对应，则记

$$\pi: a\mapsto b \text{ 或 } \pi(a)=b.$$

b 称为 a 在映射π下的**象**，而 a 称为 b 在映射π下的**一个原象**。

设π是 A 到 B 的一个映射，若 $B=\{\pi(a)\mid a\in A\}$，则称π是 A 到 B 的**满射**；若在映射π下，A 中任意两个元素的像都是不同的，即由 $a\neq a'$ 一定有$\pi(a)\neq\pi(a')$，则称π是 A 到 B 的**单射**。

既是满射又是单射的映射叫做**双射**，双射又叫做**一一对应**。

[特征函数] 设 A 是一个集合，χ是 A 到二元集$\{0,1\}$的一个映射，则 1 的原象的全体是 A 的一个子集，记为 B，称χ是 B 在 A 上的**特征函数**，记为χ_B．设 B 是 A 的子集，若χ_B是 B 在 A 上的特征函数，则

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & 若x\in B,\\ 0 & 若x\notin B.\end{cases}$$

3．重集

在研究一些问题的时候，有时需要把多个相同的对象放在一起进行研究，我们把这样的研究对象的全体叫做**重集合**，或**重集**，其中有些对象可能是相同的，并说这个重集由这些元素所组成。我们也用大写的拉丁字母表示一个重集，如果需要列出重集的元素，我们可以把一个重集写成 $A=\{\ n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ldots\}$，这里 a_i 是 A 的元素，记作 $a_i\in A$，n_i 是非负整数并称其为**元素 a_i 在 A 中的重数**，记作 $n_i=l_A(a_i)$。例如：

$$X=\{\ a, a, a, b, b, c, d, d\}$$

是有 8 个元素的重集，包含了 3 个 a，2 个 b，1 个 c 和两个 d. 这里 3, 2, 1, 2 分别是元素 a, b, c, d 在 X 中的重数，因此 X 又可写成

$$X=\{\ 3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c, 2\cdot d\}.$$

当重集的一个元素的重数是 1 的时候，在上述重集的表示中，该元素的重数可以不必写出；当重集的一个元素的重数是 0 的时候，意味着这个元素不在这个重集之中，故在上述重集的表示中，该元素和它的的重数都不必写出。例如：$X=\{\ 3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c, 2\cdot d, 0\cdot e\ \}$ 又可写成

$$X=\{\ 3\cdot a, 2\cdot b, c, 2\cdot d\}.$$

当一个重集的每个元素的重数都是 1 的时候，则这个重集是一个集。注意重集和集之间的关系，集的元素互不相同，而重集的元素有可能相同。

[k-重集] 由 k 个元素构成的重集叫做 **k-重集**，即若重集$\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ldots,\ n_m\cdot a_m\}$是 k-重集，则 $n_1+n_2+\ldots+n_m=k$。

[子重集] 设 A 和 B 都是重集，若 B 的每个元素 b 都是 A 的元素且 b 在 B 中的重数不大于 b 在 A 中的重数，则称 B 是 A 的子重集，也记作 $A\supseteq B$ 或 $B\subseteq A$，读作“A 包含 B” 或 “B 包含于 A”。

对于任何的重集 A, B, C 也有

1° $A\subseteq A$ (自反律)

2° 从 $A\subseteq B$, $B\subseteq A$，可推出 $A=B$ (反对称律)

3° 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$ (传递律)

若 $A\subseteq B$ 但是 $A\neq B$ (即 $B=A$ 不成立)，则称 A 是 B 的**真子集**，一般记为 $A\subset B$。

设 A 是一个集，X 是一个重集，称 A 是 X 的**基础集**，若 X 的所有不同元素构成的集合是 A.称 X 是 **A 上的重集**，若 X 的基础集是 A 的子集。

例 设 $A=\{a, b, c, d\}$. 则 $\{3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c, 2\cdot d\}$，$\{a, b, c, d\}$ 和 $\{3\cdot a\}$ 都是 A 上的重集，而 $\{2\cdot a, b, c, e\}$ 不是 A 上的重集。A 上的所有 2-重集是 $\{2\cdot a\}=\{a, a\}$, $\{2\cdot b\}=\{b, b\}$, $\{2\cdot c\}=\{a, c\}$, $\{2\cdot d\}=\{d, d\}$, $\{a, b,\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$，共有 10 个。

[差重集] 设 A 和 B 都是重集，A 的基础集上的一个重集称为 A 和 B 的差重集，若它的每个元素 a_i 的重数 $l_{A-B}(a_i)=l_A(a_i)-l_B(a_i)$，这里当 $l_A(a_i)\le l_B(a_i)$ 时，$l_{A-B}(a_i)$ 记为0。A 和 B 的差集记作 $A\backslash B$ 或 $A-B$。

[并重集] 设 $\{X_i|i\in I\}$ 是一个族，对于 $i\in I$，X_i 是重集，A_i 是 X_i 的基础集，称 $\cup_{i\in I} A_i$ 上的每个元素 a 的重数是 $\max\{l_{A_i}(a)|i\in I\}$ 的重集为这个族的并重集，记作 $\cup_{i\in I} X_i$。

[交重集] 设 $\{X_i|i\in I\}$ 是一个族，对于 $i\in I$，X_i 是重集，A_i 是 X_i 的基础集，称 $\cap_{i\in I} A_i$ 上的每个元素 a 的重数是 $\min\{l_{A_i}(a)|i\in I\}$ 的重集为这个族的交重集，记作 $\cap_{i\in I} X_i$。

[和重集] 设 $\{X_i|i\in I\}$ 是一个族，对于 $i\in I$，X_i 是重集，A_i 是 X_i 的基础集，称 $\cup_{i\in I} A_i$ 上的每个元素 a 的重数是 $\sum_{i\in I} l_{A_i}(a)$ 的重集为这个族的和重集，记作 $\sum_{i\in I} X_i$。

例 设 $A=\{4\cdot a, 2\cdot b, c, 3\cdot d\}$，$B=\{2\cdot a, 3\cdot b, c, 2\cdot d\}$. 则

$A-B=\{2\cdot a, d\}$;

$A\cup B=\{4\cdot a, 3\cdot b, c, 3\cdot d\}$;

$A\cap B=\{2\cdot a, 2\cdot b, c, 2\cdot d\}$;

$A+B=\{6\cdot a, 5\cdot d, 2\cdot c, 5\cdot d\}$.

设 X 是一个重集，$a\in X$, 称 a 在 X 中具有无限重数，若 a 在 X 中的重数可以是任意大的非负整数，记为 $l_X(a)=\infty$. 例如：

$$X=\{\infty\cdot a, 2\cdot b, c, \infty\cdot d\}$$

是 a,d 具有无限重数，b 的重数为 2，c 的重数为 1 的重集。

4. 图

我们现在考虑所研究的对象是由一个点集以及这个点集的某些点对所构成的，这样的研究对象的全体构成了一个图形。现实世界中的许多问题可以用这样的一个图形来描述。