普通物理实验讲义

物理实验组编

華南工學院

一九八三年十月

目　　录

目　　录

实 验 室 规 则

（1）进入实验室应保持安静，不得喧哗取闹。不得在实验室抽烟和随地吐痰，保持实验室清洁。

（2）实验前应先按讲义点清仪器，明确用途和使用方法，如有疑问应询问指导教师，方可进行实验。

（3）要爱护仪器，对仪器性能不了解时不随意扭动。未经许可各组仪器不得任意调换使用。

（4）如有损坏仪器，应立即报告指导教师和进行登记，并视具体情况，按学院有关规定处理。

（5）在实验室应服从教师和实验室工作人员的指导，严格按操作规程进行实验，防止仪器损坏及人身事故。

（6）实验完毕，应经教师检查仪器完整无损，并妥善整理后，方能离开实验室。

实验须知

（1）实验前必须认真阅读实验讲义，写好预习报告，否则不许做实验。预习报告的内容包括：

1．目的：说明实验目的。

2．仪器：写出实验所用的仪器。

3．原理：写出计算实验结果所应用的公式，并说明公式中的单位、公式适用的条件，做电学实验时应画出实验所用的电路图。

4．列出实验步骤和记录数据的表格。

（2）实验课时，如经教师提问发现不具备实验应有的知识者不得进行实验，须重新预习后补做。

（3）必须严肃认真地完成讲义所要求的测量，实验所测得的数据必须经教师审阅，如教师检查数据不合格者必须重做。

（4）每个实验后须在一周内完成实验报告，由课代表统一收齐交指导教师。

（5）实验报告一律用我院印发的纸张书写，实验报告内容包括：预习报告部分、数据处理与计算（包括误差的计算）、误差分析，以及对实验出现的问题进行讨论和对改进实验的建议等。

实验轮流表

轮＼大组＼次		第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
		实　验	实　验	实　验	实　验	实　验
第一轮	第　一　组	1	2	3	4	5
第二轮		6	7	8	9	10
第一轮	第　二　组	2	3	4	5	1
第二轮		7	8	9	10	6
第一轮	第　三　组	3	4	5	1	2
第二轮		8	9	10	6	7
第一轮	第　四　组	4	5	1	2	3
第二轮		9	10	6	7	8
第一轮	第　五　组	5	1	2	3	4
第二轮		10	6	7	8	9

注：每一大组编 16 个小组（由 1～16 编号），每小组为二人

实验地点：十八号楼

实验一、二在四楼西边。

实验三在一楼西边（由西边门入）

其余均在三楼。

绪 论

Ⅰ 物理实验课的地位和作用（注）

物理学从本质上说是一门实验科学。物理规律的发现和物理理论的建立，都必须以严格的物理实验为基础，并受到实验的检验。例如，杨氏的干涉实验使光的波动学说得以确立；赫兹的电磁波实验使麦克斯韦的电磁场理论获得普遍承认，等等。当然，一些实验问题的提出，以及实验的设计、分析和概括也必须应用已有的理论。总之，历史表明，物理学的发展是在实验和理论两方面相互推动和密切结合下进行的。

因此，在学习物理学时，我们要正确处理好理论课和实验课的关系，要求学生既动脑，又动手，不可偏废于某一方面。

作为工科院校一门课程的物理实验，是学生进入大学后受到系统的实验技能训练的开端，是后继课程实验的基础。物理实验课教学的目的和任务是：

1．在具有一定的物理知识和中学物理实验的基础上，对学生进行实验方法和实验技能的基本训练。通过实验要求学生做到：弄懂实验原理，了解一些物理量的测量方法；熟悉常用仪器的基本原理和性能，掌握其使用方法；能够正确记录、处理实验数据，分析判断实验结果。

2．培养并逐步提高学生观察和分析实验现象的能力，以及理论联系实际的独立工作能力。通过实验的观察、测量和分析，加深对物理学的某些概念、规律和理论的理解。

3．培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和爱护国家财产、遵守纪律的优良品德。

以上三个任务，是物理理论课所不能代替的。

应当提出，对于工程技术人员来说，只有具备较为深广的理论知识和足够的现代科学实验的能力，才能适应科学技术飞速发展的需要，担负起建设现代化社会主义祖国的重任。

（注）本节直接引自《物理实验》（工科）

Ⅱ.误差及数据处理基础知识

第一章　测量误差

§1.1 科学实验与测量误差

科学实验总是与测量不可分开，测量是人类认识和改造客观世界的一种必不可少的重要手段。

物理实验主要是对各种物理量进行测量。从测量的方式来说，测量可以分为直接测量和间接测量。所谓直接测量，就是被测量的量值可以直接和单位量规进行比较的测量。如用米尺测长度，用温度计测温度等。所谓间接测量，就是被测量的量值是由直接测量的量值通过确定的函数关系而求得。如用单摆测某一地区的重力加速度 g，是通过直接测量摆长 L 和周期 T，利用公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ 求得。大多数的测量问题都是属于间接测量，但随着科学技术的发展，本来是间接测量的量就可以变为直接测量的量。

任何一个被测量对象的物理量总具有一定的客观真实数值——真值。但实际上，不管使用多么精密的仪器，测量出的只是真值的近似值，也就是说，测量总存在着一定的误差，误差的大小反映了人类对客观真理的认识程度，随着科学技术的发展，误差会愈来愈小。

实验总是要求达到一定的精确度，即对测量结果的误差有一定的限制，按此要求来制定实验方案，选用仪器。方案的制定和仪器的选用，应以最小的代价而取得最好的效果为准，不能认为仪器愈高级愈好，环境（如恒温、湿）愈稳定愈好，测量次数愈多愈好等。测量结果的误差是诸因素的综合，减少某些因素所引起的误差可能代价较小，而减小另一些因素所引起的误差则所需的代价可能较大。

在选择方案和设计装置时，要尽可能地突出所要研究（或测量）的对象，排除其他因素的干扰，即要尽可能的提高所需信息和噪声的比例。例如近代高灵敏度的测量装置都放在超低温条件下进行，就是为提高信噪比。

在确定实验方法时，通常采用比较法（或相对测量），替代法，复称法等都是为了减小误差。

将测量仪器调节铅直、水平到一定程度；保证实验条件（如恒温恒湿）到一定程度；选择适当量程的仪表等，都是为了尽可能减小误差。

实验时要做到心中有数。根据误差分析，对结果影响大的关键量，就要尽可能把它测准；对结果影响不大的量，就不必花大力气去作那些徒劳的工作。实验就是要在现有的条件下，使实验得出最好的结果，这就要求对仪器安排要合理，测量要精心，参量选

择要适宜。

在对实验数据进行处理时，也有如何充分利用和合理取舍数据问题。对个别异常的数据，可根据一定的判据舍去，但又不能乱来。对有限的实验数据，有个怎样充分发挥它的作用的问题。对记录仪所给出的大量数据，又如何取样才恰到好处呢？再如数据尾数的舍入法则等等，都与误差有密切的关系。

数据处理时不应引进“误差”，但也不必作白费的劳动。如计算时，常数（π，e，$\sqrt{2}$等）取到那一位，运算结果写下几位，近似公式用到哪一级近似，作图时坐标比例大小的选取等都应按对误差的要求而定。

最后，实验结果是验证了理论还是推翻了理论假设，都要看误差计算和分析的结果是否在误差允许范围之内，还是超出了误差允许的范围。

综上所述，可见科学实验和测量误差是紧密相关的。

§1.2 误差的初步知识

一、测量误差的分类

测量值 N 和真值 N'（或实际值）总存在差异。N 和 N' 之差，就称为误差。

即 误差＝测量值－真值

或 $\Delta N = N - N'$

按照误差的最基本的性质和特点，可以把误差分为三大类：系统误差，偶然误差和差错（过失误差）。

1. 差错：

是由于测量过程中操作错误而造成的，常表现为巨大的误差，其测量结果是完全錯误的，均应剔除。

2. 系统误差（或恒定误差）

定义：在同一条件下多次测量同一量时，误差的数值和符号保持恒定；或在条件改变时，按某一确定的规律变化的误差。

系统误差又可根据其产生的原因分为：

（1）仪器工具误差 这是由于测量仪器、工具本身的不完善及没有按照条件使用仪器所产生的。例如：仪器的零点不准，放大器的非线性等。

（2）方法误差（或理论误差） 因公式本身的近似性；实验条件达不到推导公式时所规定的要求，及操作和实验方法不合理等带来的误差。

（3）人员误差 这是由于测量人员的感觉器官和运动器官不完善而产生的误差。这种误差因人而异，并与每个人当时的生理和心理状态有关。如测量中的视差，有些人始终偏上，有些人始终偏下等。

上述分类并不是唯一的，也不很严谨。但重要的是：系统误差的出现一般是有规律的，其产生的原因往往是可知的或能掌握的。如千分卡的零点不准是具有定值性，钢尺

的热膨胀具有积累性。若找到系统误差产生的原因，就可以采取一定的方法消除它的影响，或对测量结果给予修正。

3. 偶然误差（随机误差）

定义：在相同条件下多次测量同一量时，误差的绝对值时大时小，其符号则时正时负，没有确定的规律，也不可以预定，但具有抵偿性的误差。

偶然误差表面上看来毫无规律，纯属偶然。事实上，在同一条件下对同一个量进行多次重复测量时，却具有一定的统计规律性。例如，对某一真值为 1.05 毫米的长度 L 测量 74 次的数据如下

测量值 Ni（毫米）	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11
出现次数 n	3	4	7	11	15	12	9	5	4	2	2

以 N 为横坐标，以 n 为纵坐标作统计直方图如下：

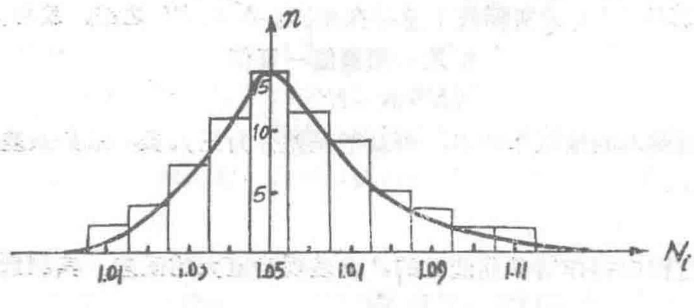

图 1—1 统计直方图

我们得到一个近于对称的图形。实验证明，当测量次数不断增加时，图形的对称性愈来愈好。从上述图形可以得出以下几点结论：

（1）多次测量的算术平均值 $\overline{N}$ 能最佳的代替真值 N'。

（2）误差的绝对值不会超过一定值界限——称之为有界性。

（3）绝对值小的误差出现的次数多，绝对值大的误差出现的次数少——称为单峰性。

（4）绝对值相等的正负误差出现的次数大致相等——称之为对称性。

（5）误差的算术平均值，随着测量次数的无限增加而趋于零——称为抵偿性。抵偿性是偶然误差的最本质的统计特性。

二、精密度、准确度和精确度

在一个实验里系统误差和偶然误差是同时存在的，但一般情况下，有时是偶然误差

突出，有时是系统误差突出，这就要我们对每一个实验作具体的分析。

测量的精密度、准确度和精确度这几个术语的使用一向是比较混乱的。但近来趋于一致的多数意见是：精密度高是指偶然误差小，准确度高是指系统误差小，精确度高是指偶然误差和系统误差都小。

§1.3 直接测量中偶然误差的估计

本节所讨论的问题都是假设实验不存在系统误差。

一、误差的估计与算术平均值

1． 单次直接测量的误差估计

如果在实验中，由于条件不许可，或要求不高等原因，对一个物理量的直接测量只进行一次。这时可以根据具体的实际情况，对测定值的误差进行合理的估计。例如可按仪器出厂检定书注明的仪器误差，或可取仪器最小刻度的一半作为单次测量的误差。

2． 多次测量的算术平均值

为了减小误差，常常采取多次测量，并求其算术平均值作为测量结果。设 N' 表示某一待测量的真值，N_1、N_2……N_K 分别表示 K 次测量值，则算术平均值表示为：

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots+N_K}{K}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}N\ (i=1,\ 2,\ \cdots K)$$

根据误差理论可证明：多次测量的算术平均值作为测量的结果，是真值的最佳近似。当测量次数 $K\longrightarrow\infty$时，$\overline{N}\longrightarrow N'$。

二、绝对误差和相对误差，测量结果的表达

1． 绝对误差

在普通物理实验等要求不太高的场合下，一般可用绝对误差来描写偶然误差的大小。设对某物理量测量了 K 次，其测量值为 N_1，N_2，……，N_K，其相应的算术平均值为$\overline{N}$，各次测量值与平均值之差取绝对值为

$$\Delta N_1=|\overline{N}-N_1|,\ \Delta N_2=|\overline{N}-N_2|\cdots\cdots\Delta N_K=|\overline{N}-N_K|$$

则
$$\overline{\Delta N}=\frac{\Delta N_1+\Delta N_2+\cdots\cdots+\Delta N_K}{K}=\sum_{i=1}^{K}\Delta N_i$$

$\overline{\Delta N}$ 称为 N 的平均绝对误差，简称绝对误差。$\overline{\Delta N}$ 的大小表示在一组多次测量的数据中，各个数据之间的分散程度，如果各个数据之间差别较大，那么，$\overline{\Delta N}$ 也较大，说明测量精密度较低。

最后，多次测量结果可表示为

$$N' = \overline{N} \pm \overline{\Delta N}$$

2. 相对误差

评价一个测量结果的好坏，除了跟绝对误差的大小有关外，还与测量量本身的大小有关。为此引入相对误差的概念。

相对误差定义为

$$E_r = \frac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}}$$

相对误差也可用百分数来表示，即

$$E_r = \frac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}} \times 100\%$$

所以又称之为百分误差。为了说明相对误差的意义，下面举一个例：

〔例〕：用米尺测量1米长的物体，绝对误差$\Delta N_1 = 0.5\text{mm}$。用千分尺测量$0.1\text{mm}$的钢丝直径，其绝对误差$\Delta N_2 = 0.005\text{mm}$。则它们的相对误差分别为：

$$E_1 = \frac{0.5\text{mm}}{1 \times 10^3\text{mm}} \times 100\% = 0.05\%$$

$$E_2 = \frac{0.005\text{mm}}{0.1\text{mm}} \times 100\% = 5\%$$

这个结果表明，虽然ΔN_1比ΔN_2大，但E_1却比E_2小，即测量物体的长度比测量钢丝的直径更准确。可见只用绝对误差还不能说明测量结果的好坏，利用相对误差才能更合理地评价测量结果的准确程度。

绝对误差和相对误差的关系为：

$$\overline{\Delta N} = \overline{N} \times \left(\frac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}} \right) = \overline{N} \times E_r$$

所以测量结果又可表达为

$$N' = \overline{N} \pm \overline{\Delta N} = \overline{N} \pm \overline{N} \times E_r = \overline{N}(1 \pm E_r)$$

§1.4 间接测量的误差传递和合成

一、间接测量的误差

间接测量是由直接测量的量值通过确定的函数关系计算出来。直接测量都有误差，这些误差必然传递到间接测量的结果中去，间接测量结果也必然有误差。间接测量误差的粗略计算方法列举如下：

1. 加减运算中的误差

设$N=A+B-C$，其中直接测量量为$A\pm\Delta A$，$B\pm\Delta B$，$C\pm\Delta C$，则

$$N\pm\Delta N=(A\pm\Delta A)+(B\pm\Delta B)-(C\pm\Delta C)$$

按理，各项分误差ΔA、ΔB等带有正负号，它们的合成有可能抵消一部分，但今从最坏打算着眼，不考虑抵消，故合成的绝对误差取

$$\Delta N=\Delta A+\Delta B+\Delta C$$

所以 $$N\pm\Delta N=(A+B-C)\pm(\Delta A+\Delta B+\Delta C)$$

相对误差 $$E_r=\frac{\Delta A+\Delta B+\Delta C}{A+B-C}$$

2. 乘法运算中的误差

设$N=A\cdot B\cdot C$，直接测量量为$A\pm\Delta A$，$B\pm\Delta B$，$C\pm\Delta C$，

则 $$N\pm\Delta N=(A\pm\Delta A)(B\pm\Delta B)(C\pm\Delta C)$$

$$=(ABC)\pm(BC\Delta A+CA\Delta B+AB\Delta C)$$

（已略去Δ高次项）从最坏的情况考虑有

绝对误差 $$\Delta N=BC\Delta A+CA\Delta B+AB\Delta C,$$

相对误差 $$E_r=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}$$

3. 除法运算中的误差

设$N=A/B$，直接测量量为$A\pm\Delta A$，$B\pm\Delta B$，

则 $$N\pm\Delta N=\frac{A\pm\Delta A}{B\pm\Delta B}=\frac{(A\pm\Delta A)(B\mp\Delta B)}{(B\pm\Delta B)(B\mp\Delta B)}$$

将式子展开并略去ΔB^2项有

$$N\pm\Delta N=\frac{A}{B}\pm\frac{B\Delta A}{B^2}\mp\frac{A\Delta B}{B^2}$$

式子右边后两项为误差项，在最不利的情况下，不考虑它们有互相抵消的可能，得

绝对误差 $$\Delta N=(B\Delta A+A\Delta B)/B^2$$

相对误差 $$E_r=\frac{\Delta N}{N}=\left(\frac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}\right)\Big/\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}$$

不难证明，乘、除运算中的相对误差表达式可以推广到任意个直接测量量的情况，即

$$E_r=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}+\cdots\cdots$$

由此可见，乘除运算的相对误差等于各直接测量量的相对误差之和。

至于其他常用形式的函数的误差计算式见表一，

二、误差传递的基本公式

利用误差传递的基本公式计算间接测量的误差，比上述方法更为简便，误差计算可用微分求得。

设物理量 N 是直接测量量 A，B，C，……的函数，其中 A，B，C，……均为独立的物理量，其数学表达如下：

$$N=f(A,\ B,\ C,\ \cdots\cdots)$$

对上述函数求全微分得

$$dN=\frac{\partial f}{\partial A}dA+\frac{\partial f}{\partial B}dB+\frac{\partial f}{\partial C}dC+\cdots\cdots$$

将上式改为误差公式时，式中的 dN、dA 等分别用 ΔN，ΔA 等来代替。得绝对误差公式

$$\Delta N=\frac{\partial f}{\partial A}\Delta A+\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B+\frac{\partial f}{\partial C}\Delta C+\cdots\cdots$$

式中右边每一项均为分误差，而 $\frac{\partial f}{\partial A}$，$\frac{\partial f}{\partial B}$ …等则称为误差传递系数。由此式可见：一个直接测量的误差对总误差的贡献，不仅取决于本身误差的大小，还取决于误差传递系数。应该注意的是，在具体应用上式时，从最坏打算，考虑到误差可能出现最大值，故每项分误差均应取绝对值。对某些函数形式（例如积和商的函数式），方便的做法是先取对数，然后求全微分。

若对函数 $N=f(A、B、C\cdots\cdots)$ 取对数，即

$$\ln N=\ln f(A、B、C,\ \cdots\cdots)$$

再求全微分得：

$$\frac{dN}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial A}dA+\frac{\partial \ln f}{\partial B}dB+\frac{\partial \ln f}{\partial C}dC+\cdots\cdots$$

相应得
$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial A}\Delta A+\frac{\partial \ln f}{\partial B}\Delta B+\cdots\cdots$$

根据基本公式，求间接测量结果误差的传递合成的步骤可归纳为：

（1）对函数求全微分（或先取对数再求全微分）。

（2）合并同一变量的系数。

（3）将微分号变为误差号，注意各项均取绝对值，并用“+”号相连。

现将按上述步骤求出的常用函数的算术合成式列于表一。

〔例一〕 测得园之直径 $D=(13.06\pm0.02)$ 厘米，求圆面积 S。

解：

$$S=\frac{1}{4}\pi D^2$$

$$S=\frac{1}{4}\times 3.1416\times(13.06)^2=133.96\text{（厘米）}^2$$

∵　相对误差　　$E=\dfrac{\Delta S}{S}=2\dfrac{\Delta D}{D}$

其百分误差为　　$\dfrac{\Delta S}{S}=2\dfrac{\Delta D}{D}\times 100\%\approx 0.3\%$

绝对误差　　$\Delta S\approx 0.3\%\times 134\approx 0.4\text{（厘米）}^2$

$$S=134.0\pm 0.4\text{（厘米）}^2$$

由此例可见，在乘除情况下，先算相对误差，再由它求绝对误差比较方便。

表一

数学运算公式	间接测量的误差关系式	
	绝对误差 $\pm\Delta N$	相对误差 $\left(\dfrac{\Delta N}{N}\right)$
$N=A+B+C\cdots$	$\pm(\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots)$	$\pm\dfrac{\Delta A+\Delta B+\Delta C\cdots}{A+B+C\cdots}$
$N=A-B$	$\pm(\Delta A+\Delta B)$	$\pm\dfrac{\Delta A+\Delta B}{A-B}$，$(A\neq B)$
$N=A\cdot B$	$\pm(B\Delta A+A\Delta B)$	$\pm\left(\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}\right)$
$N=A\cdot B\cdot C$	$\pm(BC\Delta A+CA\Delta B+AB\Delta C)$	$\pm\left(\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}+\dfrac{\Delta C}{C}\right)$
$N=A^n$	$\pm(nA^{n-1}\Delta A)$	$\pm\left(n\dfrac{\Delta A}{A}\right)$
$N=\sqrt[n]{A}$	$\pm\left(\dfrac{1}{n}A^{\frac{1}{n}-1}\Delta A\right)$	$\pm\left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\Delta A}{A}\right)$
$N=A/B$	$\pm\left(\dfrac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}\right)$	$\pm\left(\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}\right)$
$N=aA$，（a为常数）	$\pm a\Delta A$	$\pm\dfrac{\Delta A}{A}$

〔例二〕：用浮力法测量固体密度的公式为

$$\rho = \frac{M_1}{M_1 - M_2}\rho_t\text{（克/厘米}^3\text{）}$$

式中各量的物理意义见实验一。

若对铝块测得 $M_1 = 27.06 \pm 0.02$（克），$M_2 = 17.03 \pm 0.02$（克），$\rho_t = 0.9997 \pm 0.0003$（克/厘米^3）。

求测量的误差 $\Delta\rho/\rho = ?$ 和 $\Delta\rho = ?$

解：取对数求全微分 $\ln\rho = \ln M_1 - \ln(M_1 - M_2) + \ln\rho_t$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM_1}{M_1} - \frac{dM_1 - dM_2}{M_1 - M_2} + \frac{d\rho_t}{\rho_t}$$

$$= \frac{-M_2}{M_1(M_1 - M_2)}dM_1 + \frac{1}{M_1 - M_2}dM_2 + \frac{d\rho_t}{\rho_t}$$

将微分号变为误差号，并全部取绝对值相加，得

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{M_2}{M_1(M_1 - M_2)}\Delta M_1 + \frac{1}{M_1 - M_2}\Delta M_2 + \frac{\Delta\rho_t}{\rho_t}$$

将上述所测值代入上式计算得：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.0013 + 0.0020 + 0.0003 = 0.0036$$

$$\Delta\rho = \rho \times 0.0036 = 2.70 \times 0.0036 = 0.0097 \approx 0.01\text{ 克/厘米}^3$$

在误差合成时，起主要作用的常常仅是其中的一二项或少数几项分误差，当分误差对总误差贡献仅占 1/10 以下时，就可以忽略之。

上述我们所介绍的是误差的算术合成，它在误差分析、实验设计作粗略的计算时是常用的。

三、标准差 σ 及其传递

除了上述绝对误差以外，目前在正式的误差计算和分析中，常采用均方根误差（标准差）作为偶然误差大小的量度。这种方法更为合理，但计算较为复杂。下面仅作一简单介绍。

设对某量进行了 K 次（有限次）测量。取各次测量值 N_i 与平均值 $\overline{N}$ 之差的平方和，除以（$K-1$）后开方，即为 K 次测量中任一次测量的标准差 σ。即

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(N_i - \overline{N})^2}$$

而这 K 次测量结果的平均值 $\overline{N}$ 的标准差 $\sigma_{\overline{N}}$ 为

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}(N_i - \overline{N})^2}{K(K-1)}}$$

相应地有 $$N = \overline{N} \pm \sigma_{\overline{N}}$$

在前面计算绝对误差的传递时，均从最坏打算出发，不考虑误差实际上有抵消的可能，误差均取绝对值相加，这实际上是夸大了间接测量的误差。当采用标准误差计算时，间接测量的标准误差为

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \sigma_A{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 \sigma_B{}^2 + \cdots\cdots}$$

式中 σ_A、σ_B 分别为直接测量值 A、B 的标准差，这公式更真实反映了各直接测量值的误差对间接测量值的贡献。

§1.5 误差分析应用

如果在实验之前，预先根据误差的有关理论，对实验（或实验设计）加以分析，就会得到一些对实验具有指导意义的结论，兹举例如下：

一、仪器的选用问题

〔例〕 设测得圆柱体的直径 $D\approx0.8$（厘米），高 $h\approx3.2$（厘米），求体积 V。

问：（1）误差 ΔD 和 Δh 对 ΔV 的影响如何？

（2）若用米尺测量的误差 $\Delta_{米}\approx0.01$（厘米），用游标尺测量的误差 $\Delta_{游}\approx0.002$（厘米），若要求 $\Delta V/V\leq0.5\%$，应如何选用仪器？

解：根据 $V = \frac{\pi}{4} D^2 h$

（1）$\Delta V = \frac{1}{2}\pi Dh\,\Delta D + \frac{1}{4}\pi D^2 \Delta h = 4.02\Delta D + 0.50\Delta h$

若 $\Delta D\approx\Delta h$，则最大分误差为 $4.02\Delta D$，式中第二项分误差 $0.5\Delta h$ 可以忽略。

（2）今要求 $\frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{D}\Delta D + \frac{\Delta h}{h} \leq 0.5\%$

若采用米尺测量：

$$\frac{2}{D}\Delta D + \frac{\Delta h}{h} = 0.025 + 0.003 = 0.028$$

$2.8\% > 0.5\%$，故米尺不能使用。