

DIANXINGTI

朱安静 杨家宏 毛立雨 / 编 著

初中数学

典型题

精解手册

多 版 本 教 材 兼 容

多 角 度 思 路 并 蓄

名 副 其 实 的 举 一 反 三

立 竿 见 影 的 触 类 旁 通

南京师范大学出版社

朱安静 杨家宏 毛立雨 编著

初中数学典型题精解手册

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学典型题精解手册 / 朱安静, 杨家宏, 毛立雨编著. —南京: 南京师范大学出版社, 2000.5

ISBN 7-81047-489-8 / G·288

I. 初… II. ①朱…②杨…③毛… III. 数学课—初中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 27301 号

南京师范大学出版社出版发行

(江苏省南京市宁海路 122 号 邮编 210097)

江苏省新华书店经销 丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.50 字数 389 千

2000 年 5 月第 1 版 2000 年 7 月第 2 次印刷

印数 10001—15000

定价: 16.00 元

(南京师大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

出版说明

“教育要改革!”这是全社会越来越强烈的呼声。的确,中国的教育已面临严峻的挑战,培养高素质的全方位人才迫在眉睫,因此,以培养学生的创新精神和实践能力为重点的素质教育将在中国大地全面展开。

为此,我们汇集江苏省各重点中学第一线的教师,编写了《典型题精解手册》系列丛书6本,分别为初中数学、物理、化学和高中数学、物理、化学,旨在培养学生的创造性和融会贯通知识的能力。

该丛书的特点有三:第一,选题典型。列举最具代表性的例题进行思路分析、解题提示。对学生的解题起“导航”作用。第二,举一反三。为了培养学生的创造性思维能力,该丛书采用“一拖三”形式,即一个主题干、多个变题干,力求在不同的方位和层面延伸并拓宽学生的思维。第三,归纳解析错误。对学生解题中易出现的错误加以归纳解析,即在学生解题易出现错误处亮起一盏红灯,避免学生解题时走入误区。

在策划这套丛书中,我们广泛收集资料,征求读者意见,力求以全新的面貌出现在读者面前,于是从栏目的设置到格式的选择,从内容的挑选到次序的排列,都尽量新颖,有特色。

为了保证编校质量,该系列丛书还设立专人验题制度。我们力求编出一套有特色、有水平、有价值的读物,并期待着广大读者的评判。

南京师范大学出版社

2000年3月

前 言

本书是根据我国九年义务教育数学教学大纲和调整方案的要求,为初中生学好数学、提高综合素质而撰写的课外读物。编写时我们突出选题的典型性、全面性,以典型例题引路,着重分析解题思路和解题要点,并针对初中生学习中易出现的错误进行剖析,使同学们读后逐步悟出解题的一般思路和规律。

本书的最大特点是从形式到内容名副其实的举一反三。为了培养同学们灵活应用知识解决实际问题的能力,我们在例题后附有变题;为便于自学,我们对变题给出了提示和答案,力求使同学们能在举一反三的基础上触类旁通;为拓宽同学们的知识面,我们在部分内容上又不局限于大纲和课本的要求,让学有余力的同学能学会发散思维,为今后的发展打下坚实的基础。

本书由朱安静、杨家宏、毛立雨参加编写。本书编写力求通俗易懂,便于自学。我们期望同学们在学习使用本书的过程中,自学能力、思维能力、创新能力能得到锤炼和提高。

限于编者水平,不足之处在所难免,恳请广大读者和同仁批评指正。

编者

2000年3月

目 录

代 数

✓ 第一章	代数初步知识.....	(3)
✓ 第二章	有理数	(28)
✓ 第三章	整式的加减.....	(55)
✓ 第四章	一元一次方程	(68)
✓ 第五章	二元一次方程组.....	(101)
✓ 第六章	一元一次不等式和一元一次不等式组.....	(137)
✓ 第七章	整式的乘除.....	(156)
✓ 第八章	因式分解.....	(175)
✓ 第九章	分式.....	(195)
✓ 第十章	数的开方.....	(209)
✓ 第十一章	二次根式.....	(216)
✓ 第十二章	一元二次方程.....	(232)
✓ 第十三章	函数及其图像.....	(261)
✓ 第十四章	统计初步.....	(282)

几 何

✓ 第一章	✓ 线段、角	(291)
✓ 第二章	✓ 相交线、平行线	(307)
✓ 第三章	✓ 三角形.....	(332)

✓第四章	✓四边形.....	(379)
✓第五章	相似形.....	(409)
✓第六章	解直角三角形.....	(434)
⑦第七章	圆.....	(444)

代 数

第一章 代数初步知识

§ 1.1 代数式

例 1 下列式子中,不属于代数式的是()。

- (A) $3ab$ (B) $3a = b$ (C) $1 + 2$ (D) 0

【思路分析】 解答本题关键是弄清代数式意义。代数式是用基本的运算符号(运算包括加、减、乘、除以及以后要学的乘方、开方)把数、表示数的字母连接而成的式子。从意义上说,它包括数与数的连接、数与字母的连接以及字母与字母的连接等形式。一个数或一个字母也是一个代数式,因为它可以补上运算符号。如, b 可写成 $1 \times b$ 、 $b + 0$ 等, 3 可写成 $4 - 1$ 、 $3 \div 1$ 等。

【答案】 选(B)。

【易错分析】 不少同学选择(D),错误的原因包括两个方面:一方面认为零表示没有,因此代数式也不存在了,其实零也是一个数,它同样可以补上运算符号;另一方面认为等号也是运算符号,其实等号不是运算符号,它只起着连接两个代数式的作用,因此,就整体而言“ $3a = b$ ”不属于代数式。

例 2 按照代数式的书写要求,下列写法正确的是()。

- (A) $a \times 1 \frac{1}{2}$ (B) $3a \div 2$ (C) $\frac{3}{2}a$ 或 $\frac{3a}{2}$ (D) $3 \cdot 2$

【思路分析】 解答本题,首先要明确代数式书写要求:

(1)代数式里出现的乘号,通常简写成“ $\cdot$ ”或者略去不写,如 $a \times b$ 简写成 $a \cdot b$ 或者 ab 。

(2)数字与字母相乘,将数字写在前面,如 $a \times 2$ 写成 $2a$ 。

(3)数字与数字相乘,一般仍用“ $\times$ ”号,否则容易与小数点相混;更不得省略乘号,否则变成一个两位数,如 3×2 不能写成 $3 \cdot 2$ 或 32 。

(4)在代数式中出现除法算式时,一般按照分数的写法来写,如 $3a \div 2$ 写作 $\frac{3a}{2}$ 。带分数通常要化成假分数,如 $1\frac{1}{2}$ 要化成 $\frac{3}{2}$ 。

【答案】 选(C)。

例3 说出代数式 $2a - 2b$ 的意义。

【思路分析】 说出代数式意义,就是把符号语言转化为文字语言。要按照运算顺序说清其中的数量关系,说法不是唯一的,但不能使人产生误解。本题叙述思路如下:

代数式: $\boxed{2a} \rightarrow \boxed{2b} \rightarrow \boxed{2a - 2b}$

文字表述: $\boxed{a \text{ 的 } 2 \text{ 倍}} \rightarrow \boxed{b \text{ 的 } 2 \text{ 倍}} \rightarrow \boxed{\text{的差}}$

【答案】 $2a$ 与 $2b$ 的差,或 a 的 2 倍减去 b 的 2 倍,或 $2a$ 减 $2b$ 等。

变题1 说出代数式 $2(a - b)$ 的意义。

【答案】 2 与 $a - b$ 的积,或 2 与 a 减 b 差的积,或 2 乘以 a 与 b 差的积,或 2 乘以括号 $a - b$,或 a 与 b 差的 2 倍。

变题2 说出代数式 $(a - b)^2$ 的意义。

【答案】 a 与 b 差的平方,或 a 减 b 差的平方。

变题3 说出代数式 $a^2 - b^2$ 的意义。

【答案】 a 与 b 平方差,或 a 平方减 b 平方。

【易错分析】 (1)变题1,有同学说成“2 乘以 a 减 b ”,势必造成混乱,所说的代数式是 $2(a - b)$ 呢? 还是 $2a - b$ 呢? 错误原因是运算顺序交代不清。

(2)变题2 与变题3 常有同学弄颠倒,实质上还是一个运算顺序问题。先求差再平方,还是先平方再求差,两者不能混淆。

【注】 $2a - 2b = 2(a - b)$, 但 $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$, 可取一些数进行验证。

§ 1.2 列代数式

例 1 用代数式表示: 1 与 x 除以 y 的商的差。

【思路分析】 列代数式就是把文字语言化为符号语言, 即把问题中与数量有关的词语, 用含有数、字母和运算符号的式子表示出来。它与“说出代数意义”的过程相反。书写时, 可按照“先读先写, 注意运算顺序”的原则进行。本题书写思路如下:

文字表述: $\boxed{1} \rightarrow \boxed{x \text{ 除以 } y \text{ 的商}} \rightarrow \boxed{\text{的差}}$

代数式: $\boxed{1} \rightarrow \boxed{\frac{x}{y}} \rightarrow \boxed{1 - \frac{x}{y}}$

变题 1 用代数式表示: 1 与 x 的差除以 y 的商。

变题 2 用代数式表示: 1 除以 x 的商与 y 的差。

变题 3 用代数式表示: 1 除以 x 与 y 的差的商。

【变题答案】 1. $\frac{1-x}{y}$; 2. $\frac{1}{x} - y$; 3. $\frac{1}{x-y}$ 。

例 2 选择题:

(1) 甲数是 x , 乙数比甲数大 2, 则乙数是()。

(A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) $\frac{1}{2}x$ (D) $2x$

(2) 甲数是 x , 甲数比乙数大 2, 则乙数是()。

(A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) $\frac{1}{2}x$ (D) $2x$

(3) 乙数是 x , 乙数是甲数的 $\frac{1}{2}$, 则甲数是()。

(A) $x + \frac{1}{2}$ (B) $x - \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}x$ (D) $2x$

(4)乙数是 x , 甲数是乙数的 $\frac{1}{2}$, 则甲数是()。

(A) $x + \frac{1}{2}$ (B) $x - \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}x$ (D) $2x$

【思路分析】 选择前必须认真审题,除了明确已知什么、求什么之外,着重弄清其中数量的大小关系、倍比关系。“甲比乙大”即“乙比甲小”。

【答案】 (1)(A); (2)(B); (3)(D); (4)(C)。

变题 1 选择题:

(1)甲数是 x , 乙数比甲数大 15%, 则乙数是()。

(A) $x + 15\%$ (B) $x - 15\%$
(C) $(1 + 15\%)x$ (D) $(1 - 15\%)x$

(2)甲数是 x , 甲数比乙数大 15%, 则乙数是()。

(A) $(1 + 15\%)x$ (B) $(1 - 15\%)x$
(C) $\frac{x}{1 + 15\%}$ (D) $\frac{x}{1 - 15\%}$

(3)乙数是 x , 乙数是甲数的 15%, 则甲数是()。

(A) $15\%x$ (B) $\frac{1}{15\%}x$
(C) $x + 15\%$ (D) $x - 15\%$

(4)乙数是 x , 甲数是乙数的 15%, 则甲数是()。

(A) $15\%x$ (B) $\frac{1}{15\%}x$
(C) $x + 15\%$ (D) $x - 15\%$

【提示】 (1)“乙数比甲数大 15%”,其中 15% 是针对甲数的。这句话可说成“乙数大出甲数的 15%”。同样,“甲数比乙数大 15%”,其中 15% 是针对乙数的。

(2)“已知一个数 a , 求数 a 的 $m\%$ ”用乘法,所求的数为 $m\%a$ 。“已知一个数的 $m\%$ 是 a , 求这个数”用除法,所求的数为 $\frac{1}{m\%}a$ 。

【易错分析】 (1)有些同学把第(1)题错误地列作 $x + 15\%$,造成错误的原因是“百分率”意义不明确。

(2)也有些同学把第(2)题错误地列作 $(1 - 15\%)x$,形成错误的原因是不知道“甲数比乙数大 15% ”中的 15% 是针对乙数来说的。应该理解为“甲数大出乙数的 15% ”。

【答案】 (1)(C);(2)(C);(3)(B);(4)(A)。

变题 2 选择题:

(1)甲数是 x ,乙数是甲数的 $\frac{2}{3}$,则乙数是()。

(A) $x + \frac{2}{3}$ (B) $x - \frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}x$ (D) $\frac{3}{2}x$

(2)甲数是 x ,甲数是乙数的 $\frac{2}{3}$,则乙数是()。

(A) $x + \frac{2}{3}$ (B) $x - \frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}x$ (D) $\frac{3}{2}x$

(3)乙数是 x ,乙数比甲数的 $\frac{2}{3}$ 多 1,则甲数是()。

(A) $\frac{2}{3}(x + 1)$ (B) $\frac{2}{3}(x - 1)$ (C) $\frac{3}{2}(x + 1)$ (D) $\frac{3}{2}(x - 1)$

(4)乙数是 x ,甲数比乙数的 $\frac{2}{3}$ 多 1,则甲数是()。

(A) $\frac{2}{3}x + 1$ (B) $\frac{2}{3}x - 1$ (C) $\frac{3}{2}x + 1$ (D) $\frac{3}{2}x - 1$

【思路分析】 解答本题采用的方法可参照变题 1 中的提示(2),也可以列等式求解。如第(2)题可先列成“甲 $= \frac{2}{3}$ 乙”(“是”有等号作用),再把“甲 $= x$ ”代入,求出乙。解答第(3)题可分两步进行:先把第(3)题化为第(2)题的形式,再求解。

【答案】 (1)(C);(2)(D);(3)(D);(4)(A)。

例 3 用代数式表示: x 与 2 的平方和。

【思路分析】 “平方和”即“平方的和”。其运算顺序是:先平方,再求和,因此,本题列出的代数式是“ $x^2 + 2^2$ ”。

变题 1 用代数式表示： x 与 2 和的平方。

【提示】 本题运算顺序是：先求和，再平方。

变题 2 用代数式表示： x 的平方与 2 的和。

变题 3 用代数式表示： x 加 2 的平方。

【易错分析】 “ x 与 2 的平方和”，有同学错误地列作 $x + 2^2$ 。这里需要指出的是：“平方和”是对“ x 与 2”来说的，其运算顺序是：先平方，再求和。为区别起见，把“ $x + 2^2$ ”说成“ x 加 2 的平方”。

【变题答案】 1. $(x+2)^2$; 2. x^2+2 ; 3. $x+2^2$ 。

例 4 设甲数为 x ，乙数为 y ，用代数式表示：甲数的 $\frac{1}{2}$ 与乙数的 $\frac{1}{3}$ 的差。

【思路分析】

文字表述：

甲数的 $\frac{1}{2}$	→	乙数的 $\frac{1}{3}$	→	的差
-------------------	---	-------------------	---	----

代数式：

$\frac{1}{2}x$	→	$\frac{1}{3}y$	→	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$
----------------	---	----------------	---	-------------------------------

变题 1 设甲数为 x ，乙数为 y ，用代数式表示：甲数的 $\frac{1}{2}$ 与乙数的 $\frac{1}{3}$ 的和。

【思路分析】

文字表述：

甲数的 $\frac{1}{2}$	→	乙数的 $\frac{1}{3}$	→	的和
-------------------	---	-------------------	---	----

代数式：

$\frac{1}{2}x$	→	$\frac{1}{3}y$	→	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$
----------------	---	----------------	---	-------------------------------

变题 2 设某数为 x ，用代数式表示： $\frac{1}{2}$ 与某数的 $\frac{1}{3}$ 的差。

变题 3 设甲数为 x ，乙数为 y ，用代数式表示：甲数与乙数的

$\frac{1}{3}$ 差的 $\frac{1}{2}$ 。

变题 4 设甲数为 x , 乙数为 y , 用代数式表示: 甲数减 $\frac{1}{2}$ 的差与乙数加 $\frac{1}{3}$ 的和的积。

【变题答案】 1. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$; 2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$; 3. $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}y)$; 4. $(x - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{3})$ 。

例 5 用代数式表示: 被 3 整除得 4 的数。

【思路分析】 依题意: 3 是除数, 4 是商, 所求的被除数应为 $3 \times 4 = 12$ 。由此得出: 在整除的情况下, “被除数 = 除数 $\times$ 商”。

变题 1 用代数式表示: 被 b 整除得 4 的数。

【思路分析】 与例题相比, 不同的只是除数用字母取代了具体数, 其中 $b \neq 0$, 否则除法无意义。因此, 求解本题仍用关系式 “被除数 = 除数 $\times$ 商” 得所求的被除数为 $4b$ 。(注意: 数字要写在字母前面)

变题 2 用代数式表示: 被 $3b$ 整除得 $a - 2$ 的数。

变题 3 用代数式表示: 被 $3 + b$ 整除得 $a - 2$ 的数。

【变题答案】 1. $4b$; 2. $3b(a - 2)$; 3. $(3 + b)(a - 2)$ 。

例 6 用代数式表示: 被 7 除, 商是 2, 余数是 1 的数。

【思路分析】 例 6 与例 5 求的都是被除数, 所不同的是例 5 是一个整除的除法, 而例 6 是一个带余的除法。因此, 求解本题可这样考虑: “被 7 整除, 商是 2” 的数是 $7 \times 2 = 14$, 那么 “被 7 除, 商是 2, 余 1” 的数是 $14 + 1 = 15$ 。“余” 即是 “多”。由 “ $15 = 7 \times 2 + 1$ ” 得, 在非整除的情况下, “被除数 = 除数 $\times$ 商 + 余数”。这里需要指出的是, 当余数等于零时, 便是整除。

变题 1 被 7 除, 商是 q , 余 r 的数。

变题 2 被 p 除, 商是 $q - 2$, 余 m 的数。

变题3 被 $a-1$ 除,商是 b ,余 c 的数。

【变题答案】 $1.7q+r; 2.p(q-2)+m; 3.(a-1)b+c。$

例7 设 n 为任意一个整数,用含有 n 的代数式表示:

(1)能被3整除的数;

(2)写出两个不能被3整除的数。

【思路分析】 能被3整除的数应是3的倍数 $3n$ (其中也包括零),反之,不能被3整除的数,不是3的倍数,如 $3n+1, 3n-1$ 就不能被3整除。

例8 证明:如果一个整数被3除余1,另一个整数被3除余2,那么这两个整数的和一定能被3整除。

【思路分析】 如果我们用两个具体的数进行验证,如10和8,显然此说法是正确的。但个别数并不能代表所有的数,因此我们需要对它进行一般性的证明。证明此题关键在于用含表示所有整数的字母来表示这两个数,并根据题意表示它们之间的数量关系,从而为证明创设条件。

我们不妨设这两个数分别为 a, b 。由关系式“被除数 = 除数 $\times$ 商 + 余数”得 $a = 3m + 1, b = 3n + 2$ (m, n 均为整数),则 $a + b = 3m + 1 + 3n + 2 = 3m + 3n + 3 = 3(m + n + 1)$ 。

因为 m, n 均为整数,所以 $m + n + 1$ 也是整数。

$\therefore a$ 与 b 的和能被3整除。

例9 填充:

(1)若 x 除以3,商是9,余数是1,则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)若 x 除3,商是9,余数是1,则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3)若9除以2,商是 y ,余数是1,则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4)若2除9,商是4,余数是 y ,则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【思路分析】 解答本例题,在弄清题意(已知什么、求什么)的基础上,根据等量关系式“被除数 = 除数 $\times$ 商 + 余数”列成方程,再求解。如,第(2)小题列得的方程是“ $3 = 9x + 1$ ”。