黄蔼英 康锦屏 主编

数学

高中生能力培养丛书

（供高三年级使用）

新教材同步·与新教材同步·与新教材同步

高中生能力培养丛书

数　学

（供高三年级使用）

分科主编　方金秋
本册编者　邴介夫

华夏出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/黄蔼英,康锦屏主编. - 北京:华夏出版社,1997.1
(高中生能力培养丛书)
供高三年级使用
ISBN 7 - 5080 - 1144 - 9

Ⅰ.数… Ⅱ.①黄… ②康… Ⅲ.数学课 - 高中 - 教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23806 号

华 夏 出 版 社 出 版 发 行
(北京东直门外香河园北里 4 号 邮编:100028)
新 华 书 店 经 销
中国建筑工业出版社印刷厂印刷
787×1092 毫米 32 开本 11.25 印张 258 千字
1997 年 1 月北京第 1 版 1997 年 1 月北京第 1 次印刷
印数 1 - 11000 册
ISBN 7 - 5080 - 1144 - 9/G·753
定价:12.80 元

编者的话

由于在教育学院执教所具有的条件，因而有了广泛接触、深入了解中学教育的机会，有了博览研究全国各地出版部门编辑出版的有关中学教学的各类书籍的机会。研读之余，感慨良深。那些书籍虽或多或少有助于教师的教，学生的学，但均不无缺憾之处：有的详于知识而略于将知识转化为能力的指点；有的详于题例的堆列而略于重点、难点知识的疏解；有的虽兼顾了知识与题例，但又缺乏规律与方法的揭示与提供……。至于专门在能力培养上下力气的得力之作，更是凤毛麟角了。看到这多如牛毛的大同小异的书籍，我们感到忧心。为培养高级中学学生学习能力和提高教师教学质量，我们约集了北京市专门从事中学教育或专门研究中学教育的有共识的专家、学者，编著了这套丛书，名之曰《高中生能力培养丛书》。采众家之长，去各家之短。本丛书体现了如下特点：重点难点知识的疏解与典型题例相结合；精讲知识与怎样将知识转化为能力的点拨相结合；精选、精设典型题例与解题思路、解题方法的分析、揭示相结合；注重指导平时教学与适应高考实际需要相结合。因此，丛书是科学性、针对性、实用性、有效性的有机统一。编著此丛书的构想方案形成以后，华夏出版社为丛书出版竭尽心力，北京市原教育局长、中学教育专家陶西平同志欣然同意任丛书顾问，为此，我们由衷地表示谢意！由于时间紧，任务重，难度大，因此是否将美好的设想变成了现实，尚待广大中学师生在实践中去验证。

黄霭英　康锦屏

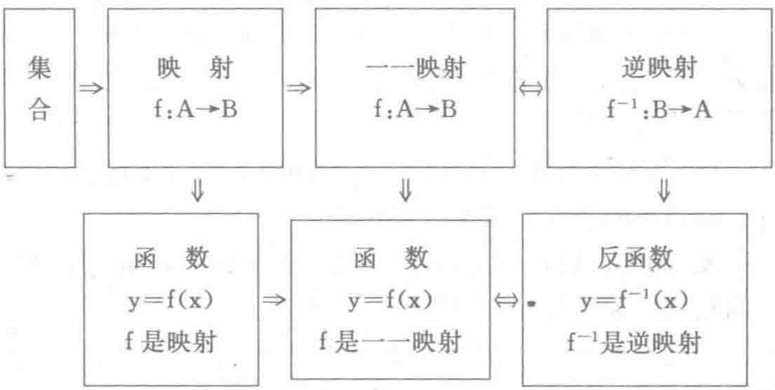
目　　录

第一单元 函　　数

一、重点内容透视

函数在中学数学中占有举足轻重的地位，它把数学的各个分支有机的连在一起. 复习好函数，对高中数学的总复习起着奠基与桥梁的作用.

函数概念的主线是集合——映射——函数——函数的图象和性质，在复习中要真正理解教材的知识结构：



集合、映射、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数，象一块块基石，支撑着数学这座宏大迷宫. 对函数的图象和性质的讨论，犹如跨进这座迷宫大门的第一步，而讨论函数的所有性质，又必须建立在定义域的基础上，因此，函数的实质问题是其定义域、对应法则和值域，即函数三要素.

函数，几乎涉及到中学数学里所有的数学思想方法，其中“函数思想”则是函数的主体思想.

配方法、换元法、待定系数法、判别式法、数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法在解题中的运用，往往不是孤立的，它们彼此渗透，相互融和，构成了函数应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性，使函数成为历年高考命题的热点(函数在高考中所占比例远远超过它在课时中的比例).

复习、考试的能力要求：

(1)理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

(2)了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系.

(3)理解函数的单调性和奇偶性的概念，并会判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

复习、考试的重点是，函数三要素、函数性质、指数函数、对数函数及函数思想方法的应用.

在复习中，一是要切实掌握函数概念和函数性质，二是要培养灵活运用函数思想方法去分析问题、解决问题的能力.

二、热点评析

1. 集合

集合是数学研究的基本对象之一，在数学高考中，集合几乎是每年必考的内容之一.一般地说，以两种方式进行考查.一是考查集合本身的知识，二是考查集合语言与集合思想的运用，后者如函数的定义域，方程和不等式的解集，排列组合问题，解析几何中曲线间的相交问题等.这也是考查把集合作为工具在其

他数学问题中的运用．例如1985年全国高考数学试题(28)题，就是作为工具考查的.

例1　集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$,

$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$,则(　　　).

(A)$M=N$;(B)$M\supset N$;(C)$M\subset N$;(D)$M\cap N=\varnothing$.

思路分析:由集合的包含、相等的意义,可考虑分别令$K=-1,0,1,2,3,\cdots$,得

$$M=\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\cdots\},$$

$$N=\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4}\cdots\},$$

不难看出,$M\subset N$,因此选(C).

事实上,M中的元素是由首项为$\frac{\pi}{4}$,公差分别为$\frac{\pi}{2}$与$-\frac{\pi}{2}$的两串等差数列所组成,而N中的元素是由首项为$\frac{\pi}{2}$,公差分别为$\frac{\pi}{4}$与$-\frac{\pi}{4}$的两串等差数列所组成.由此也能得出$M\subset N$.

其实,若用特殊值试验法也会很快得出答案.例如,取$k=0$时,N中的元素是$\frac{\pi}{2}$,而在M中却找不到$\frac{\pi}{2}$,即不存在整数K使得$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.然而,M中的元素$-\frac{\pi}{4}$(当$k=-1$时),在N中却能找到,即取$k=-3$时有$\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$.因此选(C).

例2　集合$A=\{-3,a^2,1+a\}$,$B=\{a-3,a^2+1,2a-1\}$,$A\cup B=\{-3\}$,求$A\cup B$,$(a\in R)$.

思路分析:要求$A\cup B$,需确定a的值,为此,由已知$A\cap B=\{-3\}$知:

$$\begin{cases} a^2\neq -3, \\ 1+a\neq -3 \\ a-3, a^2+1, 2a-1 \text{ 中恰有一个值是} -3. \end{cases}$$

解之，得 $a=0$ 或 $a=-1$.

当 $a=0$ 时，$A=\{-3,0,1\}$，$B=\{-3,1,-1\}$，这时 $A\cap B=\{-3,1\}$，与 $A\cap B=\{-3\}$矛盾，这表明 $a\neq 0$.

当 $a=-1$ 时，$A=\{-3,1,0\}$，$B=\{-4,2,-3\}$，符合条件 $A\cap B=\{-3\}$.

由上述可知 $A\cup B=\{-3,-4,0,1,2\}$.

评析：$a=0$ 或 $a=-1$ 是 $A\cap B=\{-3\}$的必要条件，不是充分条件，为得到使 $A\cap B=\{-3\}$的 a 的值，应当进行检验. 为什么要检验？原因在于原题中的 a 是作为 $A\cap B=\{-3\}$的充分条件给出来的. 原题的题意是：实数 a 使得$\{-3,a^2,a+1\}\cap\{a-3,a^2+1,2a-1\}=\{-3\}$，求 $A\cup B$，若忽略了原来条件的充分性，就有可能出错.

例 3(1985 年全国高考试题)设 $a,b\in R$，$A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in Z\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m, y^2=3m^2+15, m\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 XOY 内点集合. 试讨论是否存在 a 和 b 使：①$A\cap B\neq\varnothing$；②$(a,b)\in C$，同时成立.

思路分析：这是集合作为工具在解析几何中的综合应用题. 经过思考，可认识到本题等价于讨论关于 a，b 的组合组：

$$\begin{cases} an+b=3m^2+15, \\ a^2+b^2\leqslant 144. \end{cases}$$

在 $n\in Z$ 时，是否有解的问题，本题的详细解答，请见第十一单元 1.3“数形结合思想方法的应用”中的 例 4.

2. 函数的概念、图象和性质

本节内容包含：映射与函数(定义)，函数三 要素(定义域、

值域与对应法则)，函数的图象和性质(单调性、奇偶性与周期性)，反函数及其图象. 这些内容是函数知识的重要基础，非常重要，由于它们的重要性，历年高考试题中，成为必考的内容，而且还有加强的趋势.

例 4　已知函数 $f((x^2-4)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-8}$，则函数 f(x) 的定义域是________.

思路分析：因为函数 f(x) 的表达式未直接给出，所以第一步的工作就是求 f(x) 的表达式. 为此，可令 $u=x^2-4$，则有 $f(u)=\lg\dfrac{u+4}{u-4}$，即 $f(x)=\lg\dfrac{x+4}{x-4}$. 可求得 f(x) 定义域为 $x>4$.（$\because u\geqslant -4$， $\therefore$ 舍 $x<-4$).

评析：上面求 f(x) 表达式用的是换元法，还可用配凑法，即 $f(x^2-4)=\lg\dfrac{x^2-4+4}{x^2-4-4}\Rightarrow f(x)=\lg\dfrac{x+4}{x-4}$，也可用参数法求 f(x)；定义域、对应法则、值域是函数概念中的三要素，其中定义域是关键要素，函数各种性质的讨论与研究，都是建立在定义域的基础上的. 熟练地掌握求函数定义域的方法及原则是研究更深刻的问题的前提条件. 求函数的定义域，一般应遵循的原则主要是：①分母不为零；②偶次方根号 $\sqrt[n]{a}$ 内的 $a\geqslant 0$；③某些超越函数，如对数函数、三角函数自身的定义域要考虑；④注意某些函数中自变量的实际意义.

例 5　用长为 m 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架(如图 1—1). 若矩形底面边长为 2x，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数式，写出它的写义域，并求面积 y 的最大值.

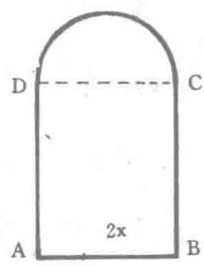


图 1—1

思路分析：欲求框架的面积，须知矩形的

宽 AD 的长，而 $AD=\frac{m-2x-\overset{\frown}{CD}}{2}$，$\overset{\frown}{CD}=\pi x$，于是 $AD=\frac{m-2x-\pi x}{2}$，因此 $y=2x\cdot\frac{m-2x-\pi x}{2}+\frac{\pi x^2}{2}$，即 $y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+mx$.

由函数的实际意义知，函数的定义域由不等组

$$\begin{cases}2x>0\\ \frac{m-2x-\pi x}{2}>0\end{cases}$$确定.

解之，得 $0<x<\frac{m}{2+\pi}$.

故函数式为 $y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+mx$，定义域是 $(0,\frac{m}{2+\pi})$，且当 $x=-\frac{m}{2(-\frac{\pi+4}{2})}=\frac{m}{\pi+4}$ 时，面积有最大值 $\frac{m^2}{2(\pi+4)}$.

例 6　求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{5}{x^2}(1\leqslant x\leqslant 2)$；

(2) $y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}(x\in R)$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}+1(x\neq 0)$；

解：(1)因为在 $[1,2]$ 上，$y=\frac{5}{x^2}$ 是单调减函数，所以函数的值域是 $[\frac{5}{4},5]$.

(2) $y=-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

$\because -(x^2-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$，　$\therefore y\leqslant\frac{1}{2}$，

当 $x^2-\frac{1}{2}=0$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}$.

综上可知，$y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}$的值域是$[-\infty,\frac{1}{2}]$.

(3)有多种解法

解法一：配方法. 分 $x>0$ 与 $x<0$ 两种情况，解答由读者完成.

解法二：利用平均值不等式做.

当 $x>0$ 时，有

$y=x+\frac{1}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+1=3$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，有 $y=3$；

当 $x<0$ 时，有

$$-y=(-x)+\frac{1}{-x}-1\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{-x}}-1$$
$$=1,$$

$\therefore y\leqslant -1$，当且仅当 $-x=\frac{1}{-x}$，即 $x=-1$ 时，有 $y=-1$.

综上可知，$y=x+\frac{1}{x}+1$ 的值域是$(-\infty,-1)\cup[3,+\infty]$.

解法三：判别方法

$\because y=x+\frac{1}{x}+1$

$\therefore x^2+(1-y)x+1=0$

$\because$方程有实根，

$\therefore \triangle=(1-y)^2-4\geqslant 0$，即$(y-1)^2\geqslant 4$，

$\therefore y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 3$

当 $x=-1$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=3$.

综上可知，$y=x+\frac{1}{x}+1$ 的值域是$(-\infty,-1)\cup[3,+\infty]$.

评析：由上述几个题目的解题过程中，不难总结归纳出求函数值域的常用方法：利用已知函数的定义域；利用函数的单调

性；利用求原函数的反函数的定义域（见例题 5），以及配方法、公式法（利用平均值不等式）与判别式法. 上述方法与求函数的最值的方法密切相关.

例 7　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x^{\frac{2}{3}}, x\in[-1,1]$；

(2)$g(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$；

(3)$F(x)=\lg(4+x)+\lg(4-x)$；

(4)$u(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x))$

思路分 析：判定函数的奇偶性一般有以下几个途径：①利用定义；②利用定义的等价命题，即 f(x)是奇函数$\Leftrightarrow$ f(x)+ f(−x)=0，f(x)是 偶函数$\Leftrightarrow$ f(x)− f(−x)=0；③利用图象的对称性；④利用奇、偶函数的性质. 本题的思路是用奇偶函数的定义及图象 的对称性来判断.

解：(1)由于函数 f(x)的定义域(−1,1]不关于原点对称，即如取 x=1，则 $-x=-1\notin(-1,1)$，也就是说−x 不在定义域内，因而 f(−x)没意义，故 f(x)是非奇非偶函数.

(2)先将 $g(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$变形，

$$g(x)=\frac{(1-\cos x)+\sin x}{(1+\cos x)+\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(K\in Z)$时，$1+\sin x+\cos x=1+1+0\neq0$，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$属于 g(x)的定义域，但 $-x=-2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$却使分母 $1+\sin x+\cos x=1-1+0=0$，即−x 不属于 g(x)

的定义域，因此 $g(x)$ 不是奇函数.

显然 $g(x)$ 也不是偶函数，故 $g(x)$ 是非奇非偶函数.

(3) $F(x)$ 的定义域是 $(-4,4)$，关于原点对称，

$\because\ F(-x)=\lg(4-x)+\lg(4+x)=F(x)$，

$\therefore\ F(x)$ 是偶函数，不是奇函数.

(4) $u(x)$ 的定义域是 R.

$$\because\ u(-x)=\lg(\sqrt{(-x)^2+1}+x)$$

$$=\lg\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-u(x).$$

$\therefore\ u(X)$ 是奇函数，不是偶函数.

评析：从本例的分析过程可以看出，在判定一个函数的奇偶性时必须首先考察其定义域是否关于原点对称(不要说对称区间，因为有的函数的定义域不一定是区间的形式，例如函数 $f(x)=3(x\in Z)$，它的定义域是无穷多个点，显然不是关于原点对称的区间)，然后才利用定义来判断. 同时，我们也会鲜明地看到，函数的定义域是研究函数问题的重要前提条件.

例 7　函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是________.

解法一：$y=1-\frac{2}{e^x+1}$

由 $e^x>0$，得 $0<\frac{2}{e^x}<2$

$\therefore\ -2<-\frac{2}{e^x+1}<0$，于是 $-1<y<1$

$\therefore\ y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域就是所给函数的值域，

$\therefore\quad y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是$(-1,1)$

解法二：由$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，得$(y-1)e^x=-(y+1)$.

当$y\neq1$时，有$e^x=-\dfrac{y+1}{y-1}$

$\because\quad e^x>0$，$\therefore\quad -\dfrac{y-1}{y+1}>0$，解之，得$-1<y<1$

$\therefore\quad y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域就是$(-1,1)$.

为了进一步加深对函数定义域的理解，请读者接着思考：

例 8 (1)若函数$y=x^{\frac{3}{1+k}}$的定义域为$(0,+\infty)$，则绝对值最小的整数$k=$________.

(2)设函数$y=\lg[x(x-2a)]$，$1\leqslant x\leqslant2$，则a为何值时，函数的定义域不是空集？

评 析：就题型来说，这两个小题颇有新意. 由于$y=x^{\frac{3}{1+k}}$的定义域为$(0,+\infty)$，因此首先应有$\dfrac{3}{1+k}<0$，而$1+k$必须为偶数，故满足题意的$k=-3$.

读完第(2)小题，最鲜明的感觉是，必须对a进行分类讨论.

若$a<0$，由$x(x-2a)>0$，得$x<2a$或$x>0$，当$1\leqslant x\leqslant2$时，定义域不空；

若$a=0$，$x(x-2a)=x^2>0$，定义域不空；

若$a>0$，由$x(x-2a)>0$，得$x<0$或$x>2a$，当$0<a<1$时，定义域不空.

综合上述，当$a<1$时，函数定义域不空.

例 9 设函数$f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$$(a,b,c\in Z)$是奇函数，且在$[1,+\infty]$上单调递增，$f(1)=2$，$f(2)<3$.

(1)求a、b、c的值；(2)证明$f(x)$在$(0,1)$上是减函数；(3)作

出 $y=f(x)$的图象.

思路分析：要求 a、b、c 的值，由题设可知这是待定的系数，可根据已知条件求 a、b、c；而证明 $f(x)$的单调性，可利用单调性的定义.

解：(1)由题意，有

$$\begin{cases} c=0 \\ a=2b-1 \\ 2<\dfrac{4a+1}{2b}<3 \end{cases}$$

$\therefore\quad c=0, b=1, a=1.$

$\therefore\quad f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}.$

(2)任取 $x_1x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)$$

$$=\frac{x_1^2+1}{x_1}-\frac{x_2^2+1}{x_2}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2>0}>0$$

$\therefore\quad f(x)$在$(0,1)$上是减函数.

(3)$y=f(x)$的图象如图 1－2 所示

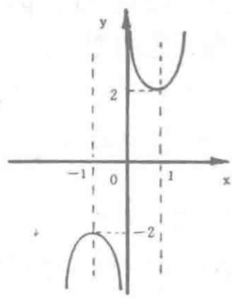


图 1－2

评析：由奇函数确定 $c=0$，因为 $f(x)$在$[1,+\infty]$上单调递增，故 $f(2)>f(1)=2$，这是由一般到特殊的推理方法，熟练地掌握这一逻辑思维方法，往往是化繁为简的关键.

一般地，求作函数的图象，必须考虑：

(i)函数定义域；(ii)函数值域；(iii)函数的奇偶性、单调性、对称性；(iv)特殊点的处理.

例 10　求作函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$的图象

思路分析：已知函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；值域为$y\in(0+\infty)$；奇偶性：非奇非偶；不是周期函数；单调性：$x\in(-\infty,1)$时函数单调递增；$x\in(1,\infty)$时函数单调递减；对称轴为$x=1$.

因此其图象如图1—3所示.

评析：求作函数的图象，是函数知识的综合应用.在熟悉基本初等函数的图象的基础上，通过平移、对称等变换，再讨论其性质，描出特殊点，方能得到理想的图形.

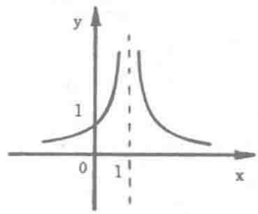


图1—3

例11 设$x\in[2,4]$，函数$f(x)=\log_{\frac{1}{a}}(a^2x)\cdot\log_{\frac{1}{a^2}}(ax)$的最大值为0，最小值为$-\frac{1}{8}$，求a的值.

思路分析：对f(x)的表达式进行恒等变形，将规律揭示出来，这是首先必须做的工作.考虑条件$x\in[2,4]$，可知这是闭区间上的条件最值问题，再联想求二次函数最值时常用的方法——配方法，解题的方法基本上勾画出来了.

解：$f(x)=[-(\log_a x+2)]\cdot[-\frac{1}{2}(\log_a x+1)]$

$$=\frac{1}{2}(\log_a x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{8}$$

$\because$ f(x)的最大值为0，最小值为$-\frac{1}{8}$，

$\therefore$ 当$\log_a x=-\frac{3}{2}$时，取得最小值.

而$x\in[2,4]$，故必有$0<a<1$.

因此有$\frac{1}{2}(\log_a 2+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{8}=0$，