



中学课外辅导丛书

高中立体几何 单元能力训练

辽宁教育出版社

高中立体几何单元能力训练

岑志林 欧阳淑珍 申炳蔚 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 喀左县印刷厂印刷

字数：100,000 开本：787×1092¹/32 印张：4¹/₂

印数：145,259—198,859

1986年1月第1版

1988年6月第4次印刷

责任编辑：周广东 责任校对：理 广

封面设计：安 迪

ISBN 7-5382-0052-5/G 47

定 价：0.76 元

目 录

	习题	解答
第一章 直线和平面	(1)	(52)
一、平 面	(1)	(52)
二、空间两条直线	(2)	(53)
三、空间直线和平面	(4)	(56)
四、空间两个平面	(8)	(60)
综合练习一	(14)	(70)
第二章 多面体和旋转体	(25)	(84)
一、多面体	(25)	(84)
二、旋转体	(31)	(93)
三、多面体和旋转体的体积	(36)	(106)
综合练习二 ...	(40)	(113)
总复习题	(44)	(120)

3. 试证：在空间过直线外一点有且只有一条直线与该直线平行。
4. 已知直线和三条平行直线都相交，求证这四条直线在同一平面内。

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，
 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点，若 $EFGH$ 是平面四边形且 GH 和 EF 的延长线交于点 P ，求证 $P \in AC$ 。

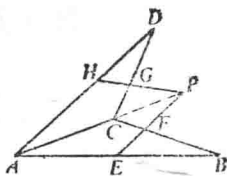


图 1-2

6. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 和平面 DC_1B 交于 O 点， AC 和 BD 交于 M 点。求证 C_1, O, M 三点共线。
7. 一条直线和这直线外不在同一直线上的三点可以确定几个平面？分别讨论说明之。

二、空间两条直线

1. 不重合的三条直线在什么情况下可以确定两个平面，画图说明。
2. 求证分别在两个相交平面内，且与交线交于不同点的二直线是异面直线。
3. 若空间四边形两组对边相等，则连结两对角线中点的线段垂直于两对角线。
4. 两条相交直线的每一条能否与另两条异面直线都相交，画图并说明理由。

5. 三个平面两两相交，它们的交线中有没有两条直线是异面直线？为什么？

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 AB 中点， F 为 AA_1 中点。（1）求证 E, C, D_1, F 共面。（2）求证 CE, DA, D_1F 三线共点。

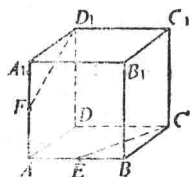


图 2-1

7. A, B, C 是平面 α 内共线的三点， P, Q 是平面 α 外同侧的两点， $PB=QB, PA=QA$ ，求证 $PC=QC$ 。

8. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 1 的正方体，填空：

(1) 直线 AC 和 BC_1 是_____直线，它们成的角是_____。

(2) 直线 AC 和 BB_1 是_____直线，它们成的角是_____。

(3) 直线 AC 和 B_1C_1 是_____直线，它们成的角是_____。

(4) 直线 AC 和 A_1C_1 是_____直线，它们成的角是_____。

(5) 直线 BD_1 和 B_1D 是_____直线。

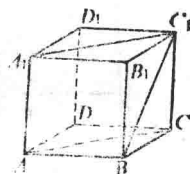


图 2-2

9. 选择正确结论，填在括号内：

(1) 在正方体的十二条棱所在的直线中，共有异面直线 () 对。

(A) 12, (B) 16, (C) 24, (D) 48。

(2) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各面上的对角线中，

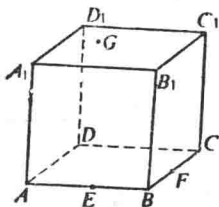
与 AC 成 60° 角的异面直线有()条。

(A) 2条, (B) 4条, (C) 5条, (D) 6条。

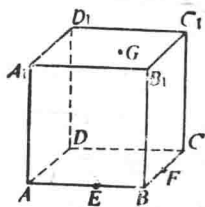
10. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ 不在同一平面内, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, 求证 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 。

三、空间直线和平面

1. 如图3-1, 画出过点 E, F, G 的截面图。 G 在正方体的上底面, E, F 在下底面的棱上。



(1)



(2)

图 3-1

2. 选择正确结论, 填在括号内:

(1) 如果一条直线和一个平面平行, 则()。

(A) 该直线与平面内的一条直线平行

(B) 该直线与平面内的所有直线平行

(C) 该直线与平面内的无数条直线平行

(D) 该直线与平面内的所有直线都不相交

(E) 该直线与平面内的无数条直线是异面直线

(2) 同平行于一个平面的两条直线的位置关系是

()。

(A) 异面, (B) 相交, (C) 平行, (D) 前者都不对, (E) 平行或相交或异面。

3. 选择正确结论, 填在括号内:

(1) 如果平面外的一条直线上有两点到这个平面的距离相等, 则这条直线和平面的位置关系是 ()。

(A) 平行, (B) 相交, (C) 共面, (D) 平行或相交

(2) 在一个平面内和这个平面的斜线成 60° 角的直线 ()。

(A) 只有一条, (B) 有相交的两条, (C) 有无数条, (D) 不存在。

(3) 具备 () 条件的两直线必平行。

(A) 垂直同一直线, (B) 平行于同一平面, (C) 垂直于同一平面, (D) 与同一个平面所成的角相等。

(4) 如果平面外的一条直线 L 与平面 α 内的两条平行直线垂直, 那么 ()。

(A) $L \perp$ 平面 α , (B) $L \parallel$ 平面 α , (C) L 与平面 α 斜交, (D) 前三个结论都不对。

(5) 在空间, () 命题是正确的。

(A) 若两条直线都和同一平面平行, 则这两条直线平行, (B) 两条直线在同一平面内的射影平行, 则两条直线平行, (C) 和两条异面直线都平行的平面有无数个, (D) 和两条异面直线都垂直的平面只有一个。

(6) 若从平面外一点向平面引垂线和若干条斜线, 如果斜线和平面所成的角相等, 则 ()。

(A) 斜足一定是正多边形的顶点, (B) 垂足是以斜

足为顶点的多边形的内切圆圆心，(C) 垂足是以斜足为顶点的多边形的重心，(D) 垂足是以斜足为顶点的多边形的外接圆圆心。

(7) 两条异面直线在同一平面内的射影是 ()。

(A) 平行直线，(B) 相交直线，(C) 平行或相交，
(D) 以上结论都不对。

(8) 一条直线和一个平面内的无数条直线垂直，那么这条直线和这个平面的位置关系是 ()。

(A) 垂直，(B) 相交但不垂直，(C) 平行，(D) 相交或平行或在平面内。

(9) 已知四个不共面的点，在空间和此四点距离都相等的平面有 ()。

(A) 1个，(B) 4个，(C) 3个，(D) 7个。

4. 空间四边形 $ABCD$ 中，对角线

$BD \perp AC$ ， $AC = a$ ， $BD = b$ ，

E, F, H 在 BC, CD, AB 上，

且 $\frac{BE}{BC} = \frac{DF}{DC} = \frac{BH}{BA} = \frac{1}{3}$ 。

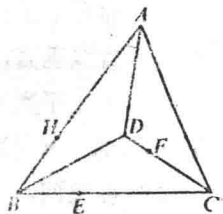


图 3-2

(1) 画出过 E, F, H 的平面与 AD 的交点 G 。

(2) 求四边形 $EFGH$ 的面积。

5. 平面 M 和平面 N 交于 AB ， C 点在平面 M 内， $CD \perp$ 平面 N ， D 在平面 N 内， $DE \perp$ 平面 M ， E 是垂足，求证 $CE \perp AB$ 。

6. AB, CD 是两条异面直线， $CA = CB, DA = DB$ 。求证

$AB \perp CD$ 。

7. 如图所示的一个三棱锥形木块中, $\triangle ABC$ 平面内有一点 P , 经过 P 点在 $\triangle ABC$ 内画一条直线, 使它和棱 AD 垂直, 并说明根据什么定理。

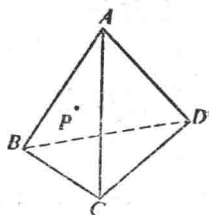


图 3-3

8. EF 为平面 α, β 的交线, $AB \perp \alpha$ 于 $B, AC \perp \beta$ 于 $C, CD \perp \alpha$ 于 D , 求证 $BD \perp EF$ 。
9. 已知异面直线 a, b 所成的角为 θ , 由 a 上两点 A, B 引 b 的垂线, 垂足分别是 A_1, B_1 , 求证: $A_1B_1 = AB \cos \theta$

10. 已知长方体 AC_1 中, 相邻两侧面上两条不相交的对角线 AB_1 和 BC_1 分别和底面相交成 β, α 角, 求 AB_1 和 BC_1 所成的角的余弦值。

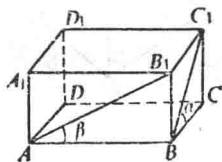


图 3-4

11. 等腰直角三角形的一条腰在一个平面内, 另一条腰和这平面成 45° 角, 求这直角三角形的斜边和这个平面所成的角。
12. 已知直线 l 上有两个定点 A, B , 线段 $AC \perp l, BD \perp l, AB = AC = BD$, 且 AC, BD 成 120° 角, 求 AB, CD 成的角。
13. AB 是平面 α, β 的交线, 在 AB 上取一点 O , 在平面 α 内作 $OC \perp AB, OD$ 不垂直 AB 。(1) OC, OD 与 β 平面成的角 θ_1, θ_2 哪一个大? (2) 证明你的结论。

14. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=10$, $BC=6$, $BB_1=8$ 。求异面直线 CD 与 BD_1 的距离。

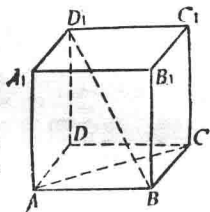


图 3-5

15. 如图3-5, 试证正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 对角线 BD_1 与正方体底面上和它不相交的对角线 AC 互相垂直, 并求它们之间的距离。

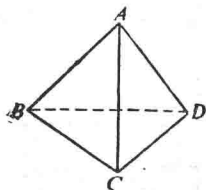


图 3-6

16. 如图3-6, 四面体 $ABCD$ 各个面都是边长为 a 的正三角形。(1) 求证 $AB \perp CD$ 。(2) 求 AB, CD 的距离。

17. A 是平面 M 外一点, B 是平面 M 内一点, 在平面 M 内过 B 引一直线 l , 由 A 引 $AK \perp l$, 垂足为 K , 当 l 绕 B 点旋转一周时, 求垂足 K 的轨迹。

四、空间两个平面

1. 判断命题的对错, 对的填 \checkmark 号, 错的填 \times 号。

(1) 一个平面内的两条直线都和另一个平面平行, 则此两个平面平行。 ()

(2) 一个平面内的无数条直线都和另一个平面平行, 则此两个平面平行。 ()

(3) 一个平面内的无数条直线都和另一平面内的无数条直线是异面直线, 则此两平面平行。 ()

- (4) 一个平面内的任意直线都和另一个平面平行，则此两个平面平行。()
- (5) 两个平面互相平行，则分别在两个平面内的两条直线的位置关系是：平行或异面。()
- (6) 一个平面内的任意一条直线都和另一平面不相交，则此两个平面平行。()

2. 填空：

- (1) 平行的三直线 m, n, l 分别与两个平行平面 p, Q 交于 A, B, C 和 A', B', C' ，则 $ABB'A'$ 是 _____， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是 _____。
- (2) 有公共点 O 的三直线 l, m, n 分别与两个平行平面相交于 A, B, C 和 A', B', C' ，则 $ABB'A'$ 是 _____， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是 _____。

3. 求证平行于二异面直线的两个平面平行。

4. 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 γ ，平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，求证：平面 $\beta \perp$ 平面 γ 。

5. 如图 4-1，正方形 $ABEF$ ，边长为 a ， $CB \perp$ 平面 $ABEF$ ， $CB = a$ 。连 AC, BF, M, N 为 AC, BF 上的点，且 $AM = FN$ 。求证 $MN \parallel$ 平面 BEC 。

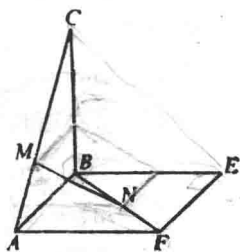


图 4-1

6. 如图 4-2，两条异面直线 AC, DF ，分别与三个平行平面 α, β, γ 相交于 A, B, C ，与 D, E, F 。又

AF , CD 与平面 β 的交点为 G , H , 求证 $BGEH$ 为平行四边形。

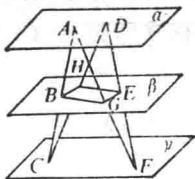


图 4-2

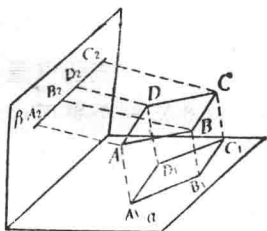


图 4-3

7. 如图 4-3, 四边形 $ABCD$ 在平面 α , 平面 β 之外, A, B, C, D 在 β 内的射影 A_2, B_2, C_2, D_2 共线, A, B, C, D 在平面 α 内的射影为 A_1, B_1, C_1, D_1 , $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形, 求证 $ABCD$ 是平行四边形。

41. 8. 判断对错, 对的填 \checkmark 号, 错的填 \times 号。

(1) 自二面角的棱上任意一点, 分别在二面角的两个面内引两条直线, 则此二直线成的角等于二面角的平面角; ()

大于二面角的平面角; ()

小于二面角的平面角。 ()

(2) 过二面角棱上任意一点, 作棱的垂面, 则垂面与二面角的两个面的交线成的角是二面角的平面角。 ()

(3) 由二面角内部任意一点分别作二面角的两个面的垂线, 则二垂线所成的角是二面角的平面角, ()

和二面角的平面角互补。()

(4) 在二面角的一个面内的任意一条直线和它在另一个面内的射影成的角是二面角的平面角。()

(5) 在二面角的一个面内的任意一条和棱垂直的直线和它在另一个面内的射影成的角是二面角的平面角。()

(6) 两个平面互相垂直, 则垂直交线的平面一定和此两个平面都垂直。()

(7) 两个平面互相垂直, 则垂直交线的直线一定和此两个平面垂直。()

(8) 两个平面互相垂直, 和此两平面都垂直的平面一定和交线垂直。()

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求平面 A_1BD 和平面 C_1ED 的夹角。

10. 二面角 $M-l-N$ 的值为 α , 在平面 M 内有一条直线 AB 和棱所成的角为 β , 和平面 N 所成的角为 γ , 求证 $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\gamma$ 。

11. 直线 $AB \parallel$ 平面 P , 自 AB 上一点 C 引平面 P 的斜线 CD , 斜足为 D 。已知 $\angle ACD = 45^\circ$, CD 与平面 P 所成的角为 30° , 求平面 P 与直线 AB, CD 所确定的平面 Q 的交角。

12. 在四面体 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD$, 在 $\triangle ABD$ 内作 $AE \perp BD$, 垂足是 E , 连 CE 。求证 (1) $\angle AEC$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角; (2) $\angle AEC$ 是钝角。

13. 已知线段 AB 两端点在直二面角 $\alpha - CD - \beta$ 两个面内，并与这两个面都成 30° 角，求异面直线 AB 和 CD 成的角。
14. 线段 AB 夹在直二面角 $\alpha - l - \beta$ 内， $A \in \alpha$ ， $B \in \beta$
- (1) 如果 AB 与平面 β 成 45° 角， AB 在平面 β 内的射影与棱 l 成 45° 角，求 AB 与平面 α 所成的角。
 - (2) 如果 AB 与平面 β 成 45° 角，求证 AB 与平面 α 成的角不超过 45° 。
15. 二面角 $M - CD - N$ 为 60° ，线段 $AB = a$ ， $A \in M$ ， $B \in N$ 。 AB 与 M ， N 都成 30° 角。(1) 求 AB 在棱 CD 上射影的长；(2) 求 AB 与 CD 成的角。
16. 已知二面角 $\alpha - AB - \beta$ 等于 θ ， P 为二面角内一点， $PC \perp \alpha$ 于 C ， $PD \perp \beta$ 于 D ， $PE \perp AB$ 于 E ，且 $|PC| = m$ ， $|PD| = n$ 。(1) 试证 PC ， PD 与 PE 在同一平面内；(2) 分别求 $|PE|$ ， $|CD|$ 的长。
17. 四面体 $V - ABC$ 中， $VA = AB = VC = BC$ ， $AC = VB = a$ ， D ， E ， F ， G ， H 分别为 VA ， AB ， BC ， VC ， VB 中点。
- (1) 求证平面 $AHC \perp$ 平面 $DEFG$ 。
 - (2) 求四边形 $DEFG$ 的面积。
18. 直线 l 与二面角 $P - EF - Q$ 的两个面相交于 A ， B ，若 A ， B 到棱 E ， F 的距离相等，求证 l 与平面 P ， Q 交角相等。
19. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内， AA_1 中点为 R ，求平面 B_1RD 与平面 $ABCD$ 成的角。
20. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内，求二面角 $B - A_1C - D$ 的大小。

21. 设 P, Q, R 分别是棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1, AB, BC 的中点, 求二面角 $B-QR-P$ 的大小。

22. 棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, A_1B_1 的中点, H 在 CC_1 上且 $C_1H = \frac{1}{3}C_1C$ 。

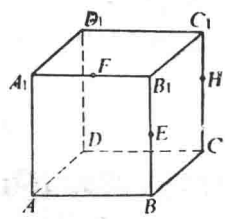


图 4-4

(1) 画出过 E, F, H 的截面。

(2) 求此截面与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 成的角

23. 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = AB$ 。平面 M 与平面 α , 平面 β 分别交于 CE, CD ; 平面 N 与平面 α , 平面 β 分别交于 EF, DF , 又 $CD \perp AB, CE \perp EF$ 。求证: 平面 $M \perp$ 平面 N 。

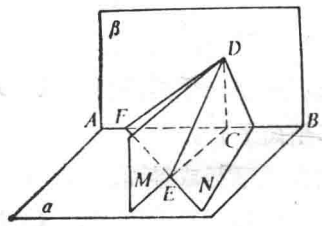


图 4-5

24. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2, AD = CD = \sqrt{15}, \angle ABC = 120^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿四边形对角线 AC 折起来, 使 B 与 D 的距离为 $\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 所在平面与 $\triangle ADC$ 所在平面所成二面角的度数。

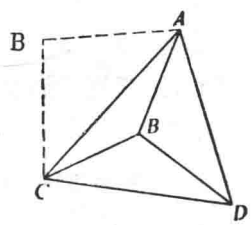
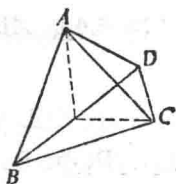


图 4-6

25. 在四边形 $ABCD$ 中, $\triangle BCD$ 是等边三角形, $\triangle ABD$ 是等

腰直角三角形,且 $\angle A = 90^\circ$,
沿对角线 BD 折叠,使二面角
 $A-BD-C$ 为直二面角,求二
面角 $A-DC-B$ 的大小。



综合练习一

图 4-7

44 1. 判断命题的对错, 对的填 \checkmark 号; 错的填 \times 号。

- (1) 两条直线同平行于一条直线, 则二直线平行。()
- (2) 平行于同一直线的一平面和一直线平行。()
- (3) 平行于同一直线的二平面平行。()
- (4) 平行于同一平面的二直线平行。()
- (5) 平行于同一平面的一直线和一平面平行。()
- (6) 平行于同一平面的二平面平行。()
- (7) 垂直于同一直线的二直线平行或异面。()
- (8) 垂直于同一直线的一直线和一平面平行。()
- (9) 垂直于同一直线的两个平面平行。()
- (10) 垂直于同一平面的二直线平行。()
- (11) 垂直于同一平面的一直线和一平面平行。()
- (12) 垂直于同一平面的两个平面平行。()
- (13) 两平行线中的一条与一平面平行, 则另一条也与此平面平行。()
- (14) 两平行直线中的一条与已知直线 l 垂直, 则另一直线也与直线 l 垂直。()
- (15) 一直线与一平面平行, 若该平面与已知平面 α 垂

- 直，则此直线也与平面 α 垂直。()
- (16) 一直线与一平面平行，若该直线与已知平面 α 垂直，则该平面也与平面 α 垂直。()
- (17) 一直线与一平面平行，若该直线与已知直线 l 垂直，则该平面也与直线 l 垂直。()
- (18) 一直线与一平面平行，若该平面与已知直线 l 垂直，则此直线也与直线 l 垂直。()
- (19) 两个平行平面中的一个与一已知平面 α 垂直，则另一个也与平面 α 垂直。()
- (20) 两个平行平面中的一个与一已知直线 l 垂直，则另一个也与直线 l 垂直。()
- (21) 两平行直线中的一条垂直于一平面 α ，则另一条也垂直于平面 α 。()
- (22) 直线 $a \parallel$ 直线 b ，直线 $b \parallel$ 直线 c ，则 $b \parallel c$ 。()
- (23) 平面 α, β, γ 若 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma$ ，则 $\alpha \parallel \gamma$ 。()
- (24) 直线 a, b, c 若 $a \perp b, b \perp c$ ，则 $a \perp c$ 。()
- (25) 平面 α, β, γ 若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$ ，则 $\alpha \perp \gamma$ 。()
- (26) 两条平行直线和同一平面成的角相等。()
- (27) 两条直线和同一平面成等角，则二直线平行。()
- (28) 一条直线和两个平行平面相交，则此直线和两个平面成等角。()
- (29) 一条直线和两个平面成等角，则此两个平面平行。()
- (30) 一条直线上有两点到一平面等距，则此直线与此平面平行。()