

胡金德 谭泽光 考研数学系列

命题人与阅卷人 联袂打造

2017 考研数学

辅导全书

(数学二)

清华大学 胡金德 主 编
清华大学 谭泽光

- 权威名师主笔，紧扣考纲，夯实基础，突出核心考点
- 典型真题例题详解，提供多种解题思路
- 归纳提炼常考题型，贴心提示知识点理解误区
- 揭秘解题方法奥妙，举一反三，成功过关



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

2017 考研数学

辅导全书

(数学二)

清华大学

清华大学

胡金德

谭泽光

主 编



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

2017 考研数学辅导全书(数学一)、(数学二)、(数学三)是本系列丛书的主干书目,是考生进行考研基础复习的主要教材。本书分为高等数学和线性代数两部分,每一部分包含若干章节,每个章节包含大纲解读、大纲知识点精解(考点梳理、例题解析)、习题精选与预测等板块,知识点全面,讲解详细,以帮助考生全面掌握考研数学的基础知识,为后续的复习打下坚实的基础。

本书可供参加 2017 年全国硕士研究生入学统一考试的考生备考使用。

图书在版编目(CIP)数据

2017 考研数学辅导全书. 数学二 / 胡金德, 谭泽光

主编. — 北京:北京航空航天大学出版社, 2015.12

ISBN 978-7-5124-2015-1

I. ①2… II. ①胡… ②谭… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 317587 号

版权所有,侵权必究。

2017 考研数学辅导全书(数学二)

胡金德 谭泽光 主编

责任编辑 冯 颖

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:22.5 字数:576 千字

2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-2015-1 定价:40.80 元

前 言

数学是考研中特别重要的一个科目。考生要想在最后取得理想成绩,除了需要不懈的努力外,还必须要学会使“巧劲”,而非“蛮劲”。正确选择自己在不同复习准备阶段的考试辅导用书,可以在复习过程中达到事半功倍的效果。本书就是这样一本为考生在考前基础复习阶段用心编写、量身定做的考研辅导书。

本书作为一本系统、全面的考研(数学二)知识点梳理及能力提高的训练用书,适合考生在考研复习初期使用。全书分两部分进行编写,高等数学和线性代数。每一部分都是严格按照教育部考试中心的最新《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(数学二)的要求,精心编写体例,概括总结每章知识点,突出重点,知识点讲解详略得当,帮助学生在复习时有的放矢,快速提升学习效率,达到良好的复习和备考效果。

本书编排结构及特点如下:

一、考点清晰,内容权威

每章的开始部分介绍考试内容与考试要求,明确给出最新数学考试大纲中的考试内容与考试要求,旨在让考生在复习时明确目标,突出重点,做到有的放矢。同时,方便考生在复习过程中不断地查缺补漏,完善知识体系。

另外,作者在编写过程中,通过深入研究考试大纲,把握其要求和精神,并结合近10年来的考研数学真题,分析其命题特点和动向,结合作者多年来的教学经验,精心编写此书,内容权威。

二、知识全面,详略得当

每节的考点梳理部分由“基本概念”和“重要性质、公式与结论”两大部分组成,涵盖考研大纲的所有知识点,并做到讲解详略得当。对于重要知识点给予详细的论述,对于常考的题型给出常用的解题方法和解题步骤,旨在帮助考生熟悉考点,复习定理与公式,掌握考试的基本题型,建立考研数学的整体知识架构。

三、归纳总结,指点迷津

在体例设计上,作者通过精心研究考研数学的命题规律,将考试内容分为不同的专题进行讲解,通过归纳总结历年考试题型,为考生指点迷津。在题目选择上既有紧扣考试内容、常考的经典题目,又有许多发散思维的新题目。考生对常考题型要做到了然于胸,对一些新颖的题目要做到先记后用、触类旁通。



四、答案解析详细,解题方案多样

本书在题目讲解上,力求做到准确、详细,并在一些解题的关键处给出提示和注解,为考生提供详细的答案解析,从解析一道题学会分析解答类似的题目。同时,对于同一问题,本书给出了多种思路的解题方案,以帮助考生灵活地运用所学知识,发散思维。考生在阅读完此部分后,定能加深对定义、定理的理解,大大提升解题的能力。

希望本书能成为广大考生的良师益友。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请各位专家和读者批评指正。

最后,祝愿每一位考生都取得优异的成绩,考取理想的学府。

编 者

2016年1月

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数 极限 连续	3
大纲解读	3
考试内容	3
考试要求	3
大纲知识点精解	3
§1 函 数	3
考点梳理	3
一、基本概念	3
二、重要性质、公式与结论	6
例题解析	7
题型一 求函数的定义域与函数表达式	7
题型二 函数的性质	8
§2 极 限	10
考点梳理	10
一、基本概念	10
二、重要性质、公式与结论	11
例题解析	14
题型一 求函数极限	14
题型二 求数列极限	19
题型三 无穷小的比较	22
题型四 已知极限或无穷小求待定参数	24
§3 函数的连续与间断	26
考点梳理	26
一、基本概念	26
二、重要性质、公式与结论	27
例题解析	27
题型一 初等函数和抽象函数的连续与间断	27
题型二 分段函数的连续性	28
题型三 由极限定义的函数的连续性	29
题型四 连续函数的零点问题	30
题型五 综合题	31
习题精选与预测	33
第二章 一元函数微分学	36
大纲解读	36
考试内容	36



考试要求	36
大纲知识点精解	37
§1 导数与微分	37
考点梳理	37
一、基本概念	37
二、重要性质、公式与结论	38
例题解析	38
题型一 利用导数与微分的定义解题	38
题型二 可微、可导、连续与极限的关系	41
题型三 导数的物理、几何应用	41
§2 导数的计算	42
考点梳理	42
重要性质、公式与结论	42
例题解析	44
题型一 利用导数公式与运算法则求导	44
题型二 求分段函数导数或微分	45
题型三 幂指函数的导数或微分	46
题型四 由参数方程确定的函数的导数	46
题型五 隐函数求导	47
题型六 求 n 阶导数	47
§3 利用导数研究函数的性态	49
考点梳理	49
一、基本概念	49
二、重要性质、公式与结论	50
例题解析	51
题型一 求曲率与曲率半径	51
题型二 利用导数讨论函数单调性、极值与最值	52
题型三 函数的凹凸性与拐点	53
题型四 求曲线的切线、法线和渐近线	55
题型五 综合题	56
§4 微分中值定理、零点问题与不等式证明	58
考点梳理	58
重要性质、公式与结论	58
例题解析	60
题型一 函数零点的存在性与个数问题	60
题型二 证明项中包含 $\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots$ 的问题	62
题型三 证明项中包含 $\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)$ 的问题	65
题型四 不等式证明	66
习题精选与预测	68
第三章 一元函数积分学	74
大纲解读	74
考试内容	74
考试要求	74



大纲知识点精解	74
§ 1 不定积分与定积分的概念与性质	74
考点梳理	74
一、基本概念	74
二、重要性质、公式与结论	75
例题解析	77
§ 2 不定积分与定积分的计算	79
考点梳理	79
重要性质、公式与结论	79
例题解析	81
题型一 有理函数的积分	81
题型二 无理函数的积分	81
题型三 三角函数的积分	82
题型四 乘积的混合式积分	84
题型五 分段函数与绝对值函数的积分	86
题型六 变限积分问题	88
§ 3 反常积分	90
考点梳理	90
一、基本概念	90
二、重要性质、公式与结论	91
例题解析	92
题型一 反常积分的计算	92
题型二 判定反常积分的敛散性	93
§ 4 定积分的应用	95
考点梳理	95
重要性质、公式与结论	95
例题解析	96
题型一 几何应用	96
题型二 物理应用	99
§ 5 定积分的证明	100
例题解析	100
题型一 等式的证明	100
题型二 不等式的证明	101
习题精选与预测	103
第四章 多元函数微积分学	115
大纲解读	115
考试内容	115
考试要求	115
大纲知识点精解	115
§ 1 多元函数的极限与连续性	115
考点梳理	115
一、基本概念	115
二、重要性质、公式与结论	116



例题解析	116
题型一 二元函数的概念	116
题型二 二元函数的极限	117
§2 偏导数与全微分	118
考点梳理	118
一、基本概念	118
二、重要性质、公式与结论	119
例题解析	119
题型一 简单的二元函数偏导数与微分计算	119
题型二 二元函数连续、可偏导、可微的关系	121
§3 多元函数求导法则	124
考点梳理	124
重要性质、定理与公式	124
例题解析	125
题型一 求复合函数的偏导数与全微分	125
题型二 求隐函数的偏导数与全微分	129
§4 多元函数的极值与最值	133
考点梳理	133
一、基本概念	133
二、重要性质、定理与公式	134
例题解析	135
题型一 求解多元函数的无条件极值	135
题型二 求解多元函数的条件极值	138
题型三 求解多元函数的最值	139
§5 二重积分	142
考点梳理	142
一、基本概念	142
二、重要性质、公式与结论	142
例题解析	146
题型一 二重积分的概念和性质	146
题型二 直角坐标系和极坐标系下二重积分的计算	146
题型三 二次积分交换积分次序	152
题型四 利用对称性计算二重积分	154
习题精选与预测	157
第五章 微分方程	163
大纲解读	163
考试内容	163
考试要求	163
大纲知识点精解	163
§1 一阶微分方程与可降阶的高阶微分方程的解法	163
考点梳理	163
一、基本概念	163
二、重要定理、性质与公式	164



例题解析	165
题型一 变量可分离的方程与齐次方程的求解	165
题型二 一阶线性微分方程	166
题型三 可降阶的高阶微分方程的求解	167
§2 高阶线性微分方程	169
考点梳理	169
一、基本概念	169
二、重要定理、性质与公式	169
例题解析	171
题型一 高阶线性微分方程解的结构、性质与判定	171
题型二 求解二阶线性微分方程	172
§3 微分方程的应用	173
考点梳理	173
重要定理、性质与公式	173
例题解析	173
习题精选与预测	179

第二部分 线性代数

第一章 行列式	185
大纲解读	185
考试内容	185
考试要求	185
大纲知识点精解	185
考点梳理	185
一、基本概念	185
二、重要性质、公式与结论	186
例题解析	188
题型一 行列式的概念及性质	188
题型二 数字型行列式的计算	190
题型三 抽象行列式的计算	194
题型四 有关 $ A =0$ 的证明	195
习题精选与预测	195
第二章 矩 阵	199
大纲解读	199
考试内容	199
考试要求	199
大纲知识点精解	199
§1 矩阵的概念及运算	199
考点梳理	199
一、基本概念	199
二、重要性质、公式与结论	201
§2 可逆矩阵与伴随矩阵	202
考点梳理	202



一、基本概念	202
二、重要性质、公式与结论	203
§ 3 矩阵的初等变换	204
考点梳理	204
一、基本概念	204
二、重要性质、公式与结论	204
§ 4 分块矩阵	205
考点梳理	205
一、基本概念	205
二、重要性质、公式与结论	205
例题解析	206
题型一 矩阵的概念及运算	206
题型二 求方阵的幂	207
题型三 矩阵可逆的判定及逆矩阵的计算	209
题型四 伴随矩阵	211
题型五 矩阵的初等变换	213
题型六 分块矩阵	214
题型七 求解矩阵方程	216
习题精选与预测	220
第三章 向 量	224
大纲解读	224
考试内容	224
考试要求	224
大纲知识点精解	224
§ 1 向量与向量组的线性相关性	224
考点梳理	224
一、基本概念	224
二、重要定理、性质与公式	225
例题解析	226
题型一 线性相关性的判别与证明	226
题型二 向量与向量组的线性表出	229
§ 2 极大线性无关组与向量组的秩	232
考点梳理	232
一、基本概念	232
二、重要定理、性质与公式	233
例题解析	234
题型一 矩阵的秩	234
题型二 向量组的秩与极大线性无关组	235
题型三 向量组的等价	237
§ 3 内积与施密特正交化	239
考点梳理	239
一、基本概念	239
二、重要定理、性质与公式	240



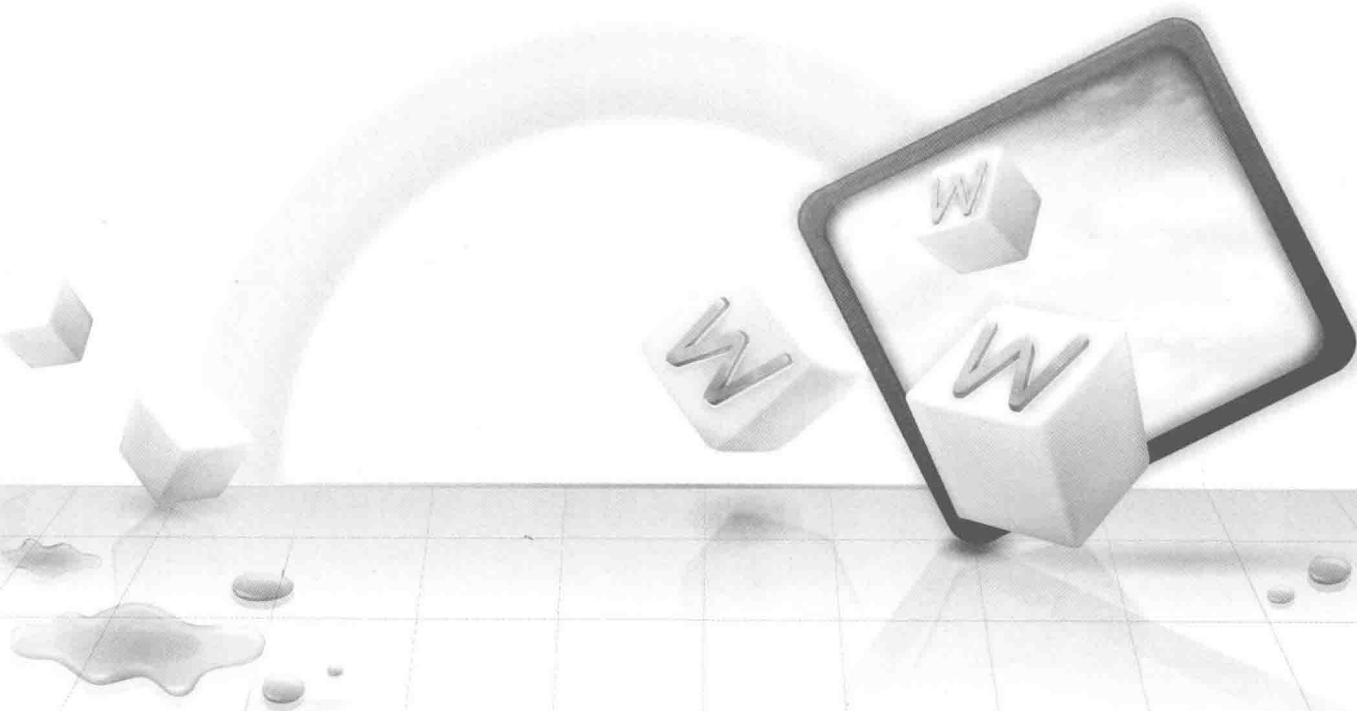
例题解析	241
习题精选与预测	242
第四章 线性方程组	246
大纲解读	246
考试内容	246
考试要求	246
大纲知识点精解	246
§ 1 齐次线性方程组	246
考点梳理	246
一、基本概念	246
二、重要性质、公式与结论	247
§ 2 非齐次线性方程组	249
考点梳理	249
一、基本概念	249
二、重要性质、公式与结论	249
例题解析	250
题型一 线性方程组解的判定、性质与结构	250
题型二 求解齐次线性方程组	254
题型三 求解非齐次线性方程组	257
题型四 两方程组的公共解与同解问题	266
习题精选与预测	270
第五章 矩阵的特征值和特征向量	274
大纲解读	274
考试内容	274
考试要求	274
大纲知识点精解	274
§ 1 特征值与特征向量	274
考点梳理	274
一、基本概念	274
二、重要性质、公式与结论	275
例题解析	276
题型一 求数字型矩阵的特征值与特征向量	276
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量	279
题型三 特征值与特征向量的逆问题	281
题型四 有关特征值与特征向量的证明题	283
§ 2 相似矩阵及矩阵的相似对角化	285
考点梳理	285
一、基本概念	285
二、重要性质、公式与结论	285
例题解析	286
题型一 相似矩阵的性质及其判定	286
题型二 方阵的对角化问题	289
§ 3 实对称矩阵及其相似对角化	293



考点梳理	293
一、基本概念	293
二、重要性质、公式与结论	293
例题解析	294
题型一 实对称矩阵的性质	294
题型二 实对称矩阵的对角化	299
习题精选与预测	302
第六章 二次型	306
大纲解读	306
考试内容	306
考试要求	306
大纲知识点精解	306
§1 二次型的定义、矩阵表示	306
考点梳理	306
基本概念	306
§2 化二次型为标准形和规范形	307
考点梳理	307
一、基本概念	307
二、重要性质、公式与结论	308
§3 合同矩阵	309
考点梳理	309
一、基本概念	309
二、重要性质、公式与结论	309
§4 正定二次型与正定矩阵	309
考点梳理	309
一、基本概念	309
二、重要性质、公式与结论	309
例题解析	310
题型一 二次型的基本概念	310
题型二 线性变换	312
题型三 化二次型为标准形和规范形	313
题型四 矩阵的合同	318
题型五 正定二次型与正定矩阵的判定与证明	320
习题精选与预测	324
附 录	327
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题	327
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二真题解析	330
后 记	345

第一部分

高等数学





第一章 函数 极限 连续

大纲解读

考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数;函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限与右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则;单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

大纲知识点精解

§1 函 数

考点梳理

一、基本概念

定义 1 (邻域) 设 $\delta > 0$, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的一个邻域, 并称此邻域为点 a 的



δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$. 记 $\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, 称为 a 的去心 δ 邻域, 相应地, 称开区间 $(a - \delta, a)$ 为 a 的左 δ 邻域, 称开区间 $(a, a + \delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

定义 2 (函数) 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为 $y = f(x)$, $x \in D$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出, 按照上述定义, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 为了叙述方便, 习惯上常用记号“ $f(x)$, $x \in D$ ”或“ $y = f(x), x \in D$ ”来表示定义在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f .

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在 $\mathbf{R}$ 内, 因此构成函数的要素是: 定义域 D_f 及对应法则 f . 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

对于自变量 x 的不同取值范围, 对应法则用不同的式子来表示, 这样的函数通常叫作分段函数.

【注】 分段函数是一个函数, 不可将每一段的表达式当作一个函数.

常见的几种分段函数:

绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 图形如图 1.1 所示.

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1.2 所示.

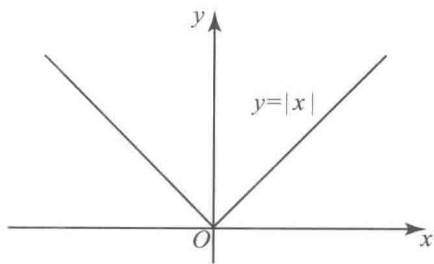


图 1.1

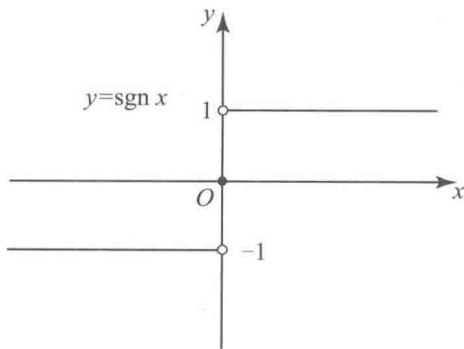


图 1.2