高等学校“十三五”规划教材

大学物理学习指导

概念解析与一题多解

任保文 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划教材

大学物理学习指导

概念解析与一题多解

任保文　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书包括高等教育理工科“大学物理”课程教学大纲要求的基本教学内容。全书共分为八部分，每部分中又包括三个板块：内容提要——便于读者复习；问题解析——用于解惑答疑；一题多解——提供了较多的解题思路和方法。另外在附录中精选了八套西安电子科技大学“大学物理”课程结业水平的模拟试题和四套综合模拟试题，并附参考答案。本书许多内容为作者悉心研究之成果，是国内较罕见的一题多解类物理参考书。

本书可供高等院校理工科各专业学生学习及考研复习使用，也可供教师备课参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导：概念解析与一题多解/任保文编著.—西安：西安电子科技大学出版社，2015.11
高等学校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5606-3780-8

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①任…　Ⅲ.①物理学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第256359号

策划编辑　李惠萍
责任编辑　李惠萍　宁晓蓉
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2015年11月第1版　2015年11月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张　25
字　　数　595千字
印　　数　1～2000册
定　　价　43.00元
ISBN 978-7-5606-3780-8/O
XDUP　4072001-1

前言

物理学是一门研究物质、能量及其相互作用的学科。“大学物理”则是高等院校理工科类专业大学生的一门重要的基础课。

本书以高等院校理工科“大学物理”课程教学大纲为基础，以提高学生的科学素质、思维水平、解题能力，掌握物理思想、概念、知识为目的，并不拘泥于某教材，而是从“大学物理”课程的特点出发来讲解的。全书共八部分，每部分均设计了以下三个板块：

(1) 内容提要。列出了主要内容、基本概念及定理，对核心内容及难点作了不同程度的解释，并以注的形式对许多问题作了一些扩充，以适应于不同读者。

(2) 问题解析。精选了“大学物理”课程中的一些基本问题，这些问题的内容涵盖了物理学的基本思想、概念和方法；解析了初学“大学物理”者常犯的错误及较难理解的问题。在部分问题后，还选编了针对性很强的思考题，以便强化训练，检验复习效果，培养学生独立处理问题的能力。

(3) 一题多解。编选了“大学物理”中的基础题、典型题、课程结业常考题及少量难题，并给出了较为详尽的解法，多者达七种。这些题目涉及理工科“大学物理”课程中的大部分常见类型，涉及初学“大学物理”者常犯的错误及解题的技巧和方法。在部分题目之后，有针对性地选编了若干思考题作为练习，可开拓学生思路，训练解题技巧与解题能力，以达到提高学生综合素质之目的。

书后选编了八套西安电子科技大学“大学物理”课程结业水平考试的模拟题及四套综合模拟题，并附参考答案。

书中一些题的解法对学生高等数学的知识水平要求较高，部分问题稍难。具体要求以教学大纲为准或以授课教师要求为准。读者可酌情处理。

书中部分内容属作者原创，更多内容采编自不同的文献。书中引用他人的原创性内容一般都作了注释，不能确定出处或已被常识化的引用就不在此处一一表示感谢了。

由于作者水平所限，不妥之处难免，恳请读者指正。

作　者

2015年10月

目　录

第一部分 质点力学

1.1 内容提要

1.1.1 质点运动学

1. 质点、参考系和坐标系

质点：忽略物体形状和大小的一种理想模型，可看成几何点加上质量的物体。

参考系：被选作参照的物体，此物体有一定大小且不变形，或几个不变形的物体相对位置保持不变时可作为参考系，一个质点不能作为参考系。

坐标系：参考系的数学抽象。可看成是由坐标曲线组成的带有标度的空间网格。

2. 质点的运动方程

位矢法：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$\boldsymbol{r}$ 的末端点构成的集合为运动轨迹。

坐标法：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$。

自然坐标法：$s=s(t)$。

平面极坐标法：$r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$。

3. 质点的位移、速度、加速度

位移：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$。

速度：$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}(t)$。

加速度：$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。

4. 位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的表示

位矢：$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$x=r\cos\alpha$，$y=r\cos\beta$，$z=r\cos\gamma$；$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

位移：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$。

速度：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$。

加速度：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$。

一维直线运动：$x=x(t)$；速度：$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；加速度：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$。

注：直角坐标系的最大特点是三个轴等价，处理问题时要充分利用其轮换对称性。其最简单的缘由是坐标曲线是直线，坐标曲面是平面。

5. 自然坐标系中的速度和加速度

速度：$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$。

自然坐标系(单参数活动标架)$(\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{n})$：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{n}$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{\tau}$。

切向加速度和法向加速度：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau})=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}$，$a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$。其中，$\rho=\left|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|=\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{[1+(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)^2]^{\frac{3}{2}}}{|\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}y^2|}=\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}$
$=\dfrac{(r^2+\dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2\dot{r}^2-r\ddot{r}|}=\dfrac{|\dot{r}|^3}{|\dot{r}\times\ddot{r}|}=\dfrac{v^3}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}$，$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2}$，
$\rho=\dfrac{v^2}{\sqrt{a^2-a_\tau^2}}$(惠更斯公式)。

注：矢量的变化率为矢量大小的变化率与矢量方向的变化率二者的综合效果。自然坐标描述并不是自然坐标系中的描述。

6. 圆周运动的角量表示

角坐标：$\theta=\theta(t)$，$s=R\theta$，$s=s(t)$，$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$。

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$。

加速度：$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$，$a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=R\beta$，$a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2R$。

7. 常见的几种运动

匀加速圆周运动和匀加速直线运动的描述方程如表 1－1 所示。

表 1－1　常见运动类型

匀加速圆周运动	匀加速直线运动
$\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$	$v=v_0+at$ $x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$

8. 相对运动

由牛顿绝对时空观可知，S'相对于S作平动时有：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0$。

位移变换：$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}'+\Delta\boldsymbol{r}_0$。

绝对速度等于相对速度加牵连速度：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0$ 或 $\boldsymbol{v}_{B对A}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$。

绝对加速度等于相对加速度加牵连加速度：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0$ 或 $\boldsymbol{a}_{B对A}=\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}_A$。

研究物体的运动要注意描述的瞬时性、矢量性、相对性和绝对性。牵连速度是由于动系的运动而使质点具有的相对静系的速度，不一定是动系相对于静系的速度。加速度亦类似。

1.1.2　牛顿运动定律

1. 牛顿运动定律

质点动力学研究质点的运动和周围其他物体与之相互作用的关系。

(1) 第一定律：任何质点都保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体对它作用的力迫使它改变这种状态为止(孤立质点保持静止或匀速直线运动状态)。

孤立质点相对其静止或作匀速直线运动的参考系为惯性参考系。

(2) 第二定律：惯性参考系中，质点所获得的加速度的大小，与它所受作用力的大小成正比，与它的质量成反比；加速度的方向与所受作用力的方向相同，即 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。

说明：牛顿第二定律一方面给出了惯性质量和力的操作性定义，另一方面，它又是建立质点动力学微分方程的基础。质量衡量的是物体处于动力学运动状态时所表现出来的物质的数量。一个物体对速度改变的抵抗能力称为惯性质量。质量亦是物体含能量的多少，是阻碍物体产生加速度的缘由。对物体施加相同的力，质量小的物体与质量大的物体相比其速度改变得更快一些(加速度大一些)。

经典力学中质点的质量是常量，与位置、速度及加速度皆无关，这也是个基本假设。请勿混淆与相对论情况的差别，请勿忘记经典力学这个大前提，否则常常出错。

注：在杨-米尔斯方程($D_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu$)支撑的标准模型中，质量并不是自然界的基本组分所具有的内禀属性，质量作为物质量的度量的概念已经不复存在了，取而代之的是能量，即质量完全是由发生在基本量子场及其粒子之间相互作用的能量构成的，自然相互作用包括了无质量的粒子。顺便指出，杨振宁对物理学的众多贡献中，其规范不变性对后世的影响最大。

直角坐标系：$F_x=ma_x=m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，$F_y=ma_y=m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，$F_z=ma_z=m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$。

自然坐标系：$F_\tau=ma_\tau=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$F_n=ma_n=m\dfrac{v^2}{\rho}$，$F_\eta=0$。

平面极坐标系：$r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$，$\boldsymbol{r}=r(t)\boldsymbol{r}^0$；$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{\theta}^0$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}^0}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{r}^0$，$F_r=ma_r=m\left[\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2r\right]$，$F_\theta=ma_\theta=m\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\right]$。

(3) 第三定律：$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$。两个质点间的作用力和反作用力总是同时成对出现，大小相等，方向相反，作用在同一条直线上。

注：牛顿运动第三定律对参考系没有特殊要求，对场力近似成立或者不成立，如两个运动电荷之间的洛伦兹力。牛顿运动第三定律亦隐含动量守恒和角动量守恒，即空间平移不变和空间各向同性。例如，$\boldsymbol{F}_1=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{F}_2=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}$，即 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=$常量($\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 为动量)。

2. 力的独立作用原理

如果一个质点同时受多个力的作用，则这些力各自产生的动力学效果不受其他力的存在的影响。

注：牛顿运动三定律及力的独立作用原理是经典力学的基本假设。拉普拉斯的决定性原理依赖于微分方程解的唯一性定理，若唯一性条件被破坏，则决定性原理不成立。随着“混沌动力学”的建立，牛顿力学面临更大的挑战。牛顿的宇宙观的影响远远超出了科学的范畴，已成为时代文化的组成部分。感性的知觉(重量、温度)不属于客观存在。

爱因斯坦认为："西方科学的发展是以两个伟大成就为基础的，那就是古希腊哲学家发明的形式逻辑体系（在欧几里德几何学中）以及在文艺复兴时期发现通过系统的实验可能找出因果关系。"

3. 国际单位制和量纲

国际单位制(SI)中的七个基本物理量如表 1-2 所示。

表 1-2　国际单位制基本单位

物理量	长度	质量	时间	电流强度	热力学温度	物质的量	发光强度
单位名称	米	千克	秒	安(培)	开(尔文)	摩尔	坎(德拉)
符号	m	kg	s	A	K	mol	cd

量纲：基本量的组合式。例如，基本量长度的量纲为[L]，质量的量纲为[M]，时间的量纲为[T]，速度的量纲为$[V]=[L][T]^{-1}$。

4. 几种常见的力

万有引力定律：任何两质点间都存在相互作用的引力，力的方向沿两质点连线，大小为 $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$，其中 m、M 为引力质量，与惯性质量相等；万有引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$，即 m 受的力为 $\boldsymbol{F}=-G\dfrac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$，对弱场$\dfrac{GM}{rc^2}\ll1$ 成立。引力质量是物体产生引力场的能力大小，惯性质量和引力质量相等，且通常是等价的，到目前为止对此并没有令人满意的理论解释。

经典力学中其他常见的力有：重力、弹簧弹性力、柔软绳的张力、刚性面的支撑力、刚性线或面的摩擦力、洛伦兹力和质点在流体中受到的阻尼力等。耗散力为力与其反作用力做功恒小于零的力。

5. 惯性系和非惯性系

牛顿定律成立的参考系叫惯性系，不成立的参考系叫非惯性系。相对于惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系。

平动非惯性系中质点动力学方程为

$$\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_0)=m\boldsymbol{a}'$$

其中 $\boldsymbol{f}=-m\boldsymbol{a}_0$ 为惯性力，是虚拟的一种力，没有施力物体，也没有反作用力，不满足牛顿第三定律。惯性力属于运动学效应，不属于相互作用的范畴。

经典力学时空观：经典力学中认为时间和空间都是均匀的、各向同性的；时间和空间是互相独立的；空间距离和时间间隔是绝对的，和参考系的选取无关，不因参考系的运动而变化。经典力学时空观又称绝对时空观。

伽利略相对性原理：在所有惯性系中，力学规律的数学表达形式都相同，即在伽利略变换下力学规律的数学形式保持不变，常数亦不变。物理规律是不因人而变的绝对真理。

伽利略变换：$x'=x-vt$，$y'=y$，$z'=z$，$t'=t$，是力学相对性原理和经典力学时空观的集中体现。

转动参考系中质点动力学方程为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\quad\text{（科里奥利定理）}$$

其中，$\boldsymbol{a}_0$ 是转动系原点的加速度。我们把 $\boldsymbol{f}=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=-m[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})-\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})]$ 称为惯性离心力，把 $\boldsymbol{f}_c=2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$ 称为科里奥利力。绝对参考系中的观察者能否区分 $\boldsymbol{a}'$、

$\boldsymbol{a}_c$、$\boldsymbol{a}_t$ 呢？推导时要用到公式 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{惯}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{转}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。

牛顿的决定性原理：一个力学系统的初始状态唯一地决定其运动。

6. 应用牛顿定律解题的一般步骤

应用牛顿定律解题的一般步骤如下：选取研究对象，分析受力情况，画出受力图，选取坐标系，列方程求解，讨论。

注：正确选用适当的坐标系及恰当的变量是很重要的，这关系到求解问题的繁简甚至成败，而且又没有简单的规则可以遵循，读者在学习过程中，应对这个问题给予足够的重视。

7. 牛顿运动定律的适用范围

牛顿运动定律适用于宏观、低速(速度 v 与光速 c 之比趋于零)运动的物体，以及以牛顿三定律为基础的动力学理论和牛顿的万有引力定律等；对于高速、微观情况是否适用要具体讨论。(可参考漆安慎、杜婵英著《力学》的有关章节。)

1.1.3 功与动能定理

1. 功的定义及计算

元功：$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\theta\mathrm{d}s$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为力作用点的位移或物体的位移。

功：$A=\int\mathrm{d}A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$A=\sum\limits_{i}\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$，一般与路径有关。

对弧长的积分：$A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{a(L)}^{b}F\cos\theta\mathrm{d}s$，此即第一类曲线积分。

直角坐标系中对坐标的积分：$A=\int_{a(L)}^{b}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$，此即第二类曲线积分。

柱坐标系中对坐标的积分：$A=\int_{a(L)}^{b}F_r\mathrm{d}r+F_\theta r\mathrm{d}\theta+F_z\mathrm{d}z$。

球坐标系中对坐标的积分：$A=\int_{a(L)}^{b}F_r\mathrm{d}r+F_\theta r\mathrm{d}\theta+F_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$。

滑动摩擦力的功：$A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{a(L)}^{b}\mu mg(-1)\mathrm{d}s=-\mu mgs$。

功率：$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$。

2. 几种常见力的功

重力的功：$A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{z_1}^{z_2}F_z\mathrm{d}z=\int_{z_1}^{z_2}-mg\mathrm{d}z=-mg(z_2-z_1)$。

万有引力的功：$A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{a(L)}^{b}-G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=GmM\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)$。

弹簧弹力的功：$A=\int_{a(L)}^{b}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{x_a}^{x_b}-kx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}k(x_b^2-x_a^2)$。

注：重力、万有引力、弹性力做功与质点走过的路径无关；摩擦力做功与路径有关。弹簧的弹性力做功与路径无关的一般证明如下：因为有心力($\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}^0$)做功与路径无关$\left(A=\int_a^b f(r)\boldsymbol{r}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_a}^{r_b}f(r)\mathrm{d}r\right)$，弹簧的弹性力 $\boldsymbol{F}=-k(r-r_0)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 是有心力，所以弹性力做功与路径无关。论证时注意大小前提不要颠倒。

3. 动能定理

质点的动能：$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$（托马斯·杨将其命名为“能”）。

质点动能定理：$dE_k=dA$ 或 $\Delta E_k=A$。

质点系：质点之间相互作用满足牛顿第三定律的质点的集合。此处体现了牛顿第三定律作为牛顿力学基本出发点的重要地位。

质点系的动能：$E_k=\sum\limits_i \dfrac{1}{2}m_i v_i^2$。

质点系动能定理：$dE_k=dA_{外}+dA_{内}$ 或 $\Delta E_k=A_{外}+A_{内}$。

注： 动能定理适用于惯性系、内力和 $\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i=0$，但 $\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i\neq 0$，对质点系合力做功无意义，只能先计算每个力的功然后对功求和。虽说功和动能都是与参考系选择有关的量，但各种惯性系中动能定理的形式不变，即满足相对性原理。如考虑惯性力做功，则非惯性系中动能定理的形式亦不变。质心系中惯性力做功为零，动能定理的形式亦不变（$dE_{kr}=dA_{r外}+dA_{r内}$）。

4. 应用动能定理解题的一般步骤

应用动能定理解题的一般步骤如下：选取研究对象、分析受力及各个力做的功、选取坐标系及始末状态、列方程求解、讨论结果。

5. 保守力场

保守力：做功与路径无关的力，或$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$。实质是一对做功与相对路径无关的力。

对保守力场可引入势能，其定义为$E_P(M)=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$。势能$E_P(M)$是质点与保守力场共同具有的。$E_P(R)=\int_R^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$，$R$ 参考点就是零势能点，势能只具有相对意义。

同一质点在保守力场中任意两点上势能的差值与参考点的选择无关，即

$$E_P(M)-E_P(N)=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_N^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_R^N \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_M^N \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

重力 $\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{k}$ 的势能为

$$E_P(M)=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_z^0 -mg\,dz=mgz$$

万有引力 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$，求 m_2 在 m_1 的引力场中的势能，设 m_2 和 m_1 相距为 r，则

$$E_P(r)=\int_r^\infty \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_r^\infty F_r dr=\int_r^\infty -\frac{Gm_1m_2}{r^2}dr=-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

m_2 在 m_1 的引力场中的势能等于 m_1 在 m_2 的引力场中的势能，等于 m_1 和 m_2 共同具有的引力势能。以相距∞远状态为参考点时，引力势能才是这一表达式。

弹性力 $\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$ 的势能为

$$E_P(x)=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_x^0 -kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2$$

或

$$E_P(x)=\int_M^R \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_r^{r_0} -k(r-r_0)dr=\frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

以弹簧原长为参考，弹簧的弹性力势能为

$$E_P(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

注：势能等于每一种势能的代数和，不同的保守力场，势能的参考点不必相同。

6. 保守力与势能的关系

保守力做功等于势能增量的负值：$A=-\Delta E_P$。

保守力等于势能梯度的负值：$\boldsymbol{F}=-\nabla E_P=-\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial E_P}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial E_P}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$，或 $F_l=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}=-\frac{\partial E_p}{\partial l}$。

7. 功能原理

功能原理的微分形式：$\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{非保内}=\mathrm{d}E$。

功能原理的积分形式：$A_{外}+A_{非保内}=E_2-E_1=\Delta E=\Delta(E_k+E_P)$。

8. 机械能守恒定律

在动能和势能的相互转化过程中，只有保守力做功，外力、非保守内力都不做功，系统的总机械能守桓，即

$$\mathrm{d}A_{外}\equiv\mathrm{d}A_{非保内}\equiv 0\Rightarrow E=C$$

注：功能原理和机械能守恒定律适用于惯性系。所谓某个物理量守恒，是指这个物理量的量值始终保持不变，仅仅是始末状态相等不叫守恒。机械能守恒是保守力场的性质。机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律的特例，其意义在于不究过程的细节而对系统的始末状态下结论。

能量守恒定律：能量既不能消失，也不能创造，只能从一种形式转化为另一种形式。对于孤立系统，各种形式的能量可以相互转化，但它们的总和是一个常量。

注：能是物体具有的做功的本领，功是能量转化的量度。要认识一种物质的能量，通常要从能量转化入手，如热能是从机械能转化的角度来认识，从而得到其量度的。电磁能是从电磁场对带电体系做功来认识的。

1.1.4　动量及动量定理

1. 动量定理

质点的动量：$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$。

质点动量定理：积分形式为$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$，其中 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$ 为冲量；微分形式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 为合外力的元冲量。

力的平均值：$\bar{\boldsymbol{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}$，则冲量为 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\bar{\boldsymbol{F}}(t_2-t_1)=\bar{\boldsymbol{F}}\Delta t$，$\boldsymbol{I}$ 与 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 同方向，有 $\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}=\bar{\boldsymbol{F}}\Delta t$，即 $\bar{\boldsymbol{F}}=\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t}$。

质点系(其相互作用满足力学基本假设的质点的集合)的动量：$\boldsymbol{P}=\sum\boldsymbol{P}_i=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$。

质点系所受的合外力：$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$，合内力为$\sum\boldsymbol{F}_i=0$。

质点系动量定理：$\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 或 $\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$。即在一段时间内质点系动量的

增量等于作用于质点系的各个外力在这一段时间内的冲量之和。

注：动量定理只适用于惯性系，非惯性系时要考虑惯性力的冲量，且质点系质量不变。

2. 动量守恒定律

动量守恒定律：质点系受到的合外力 $\boldsymbol{F}=\sum \boldsymbol{F}_i\equiv 0$，质点系在运动过程中动量守恒，即 $\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{C}$。如果 $\boldsymbol{F}\neq 0$，但 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影为零，则在该方向上动量的分量守恒，即 $\sum m_i v_{il}=c$；或外力 $\boldsymbol{F}$ 方向恒定，则在垂直于 $\boldsymbol{F}$ 方向上的动量守恒。此条件相对较易满足，因而更常用。

说明：动量守恒是指系统动量始终保持不变。只是始末时刻动量相等，动量不守恒。动量守恒的条件是 $\boldsymbol{F}_{外}\equiv 0$，不是 $\boldsymbol{I}=0$ 或 $\Delta\boldsymbol{P}=0$。$\boldsymbol{F}_{外}\equiv 0$ 是惯性系中动量守恒的充要条件。内力只能改变个别质点的动量。动量守恒定律在微观情况下仍然成立。动量守恒定律只适用于惯性系。内力远大于外力且持续时间较短的过程，如爆炸、强烈碰撞过程，虽然有外力，也可以近似使用动量守恒定律近似处理此类问题。

3. 质心及质心运动定理

质心是质点系质量中心的简称，是各质元位矢对质量的平均值。

质心 C 的位矢：$\boldsymbol{r}_C=\dfrac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}$ 或 $\boldsymbol{r}_C=\dfrac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$。

质心速度：$\boldsymbol{v}_C=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\sum m_i\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum m_i}=\dfrac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum m_i}$。

系统的动量：$\boldsymbol{P}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\sum m_i\boldsymbol{v}_C=m\boldsymbol{v}_C$。

质心参考系为零动量系：$\boldsymbol{P}_r=\sum m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_C)=\sum m_i\boldsymbol{v}_{iC}=0$。

系统的动能：$E_k=\sum \dfrac{1}{2}m_iv_i^2=\dfrac{1}{2}mv_C^2+\sum \dfrac{1}{2}m_{ir}v_{ir}^2$（科尼希定理）。

质心运动定理：在惯性系中为 $\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_C=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}$，其中 m 是系统总质量，且是不变的。由上式得 $\boldsymbol{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv_C^2\right)$，与动能定理形式类似但本质不同。

4. 两体碰撞

碰撞中动量总是守恒的。弹性碰撞中动能不变，非弹性碰撞中动能变化。两体碰撞中的公式不必死记，用时直接求解即可。

牛顿恢复系数的定义：$e=\dfrac{I'}{I}=\dfrac{|(\boldsymbol{v}'_2-\boldsymbol{v}'_1)\cdot\boldsymbol{n}|}{|(\boldsymbol{v}'_1-\boldsymbol{v}'_2)\cdot\boldsymbol{n}|}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为接触面的法向；v_1 和 v_2 分别为两球碰撞前速度，v'_1 和 v'_2 分别为两球碰撞后速度。若 $e=1$，此碰撞为弹性碰撞；若 $e=0$，此碰撞为完全非弹性碰撞；若 $0<e<1$，此碰撞为非完全弹性碰撞。存在摩擦力时切线方向由冲量定理确定。成立条件为法向合外力为零。

正碰：

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2,\quad v'_1-v'_2=-e(v_1-v_2)$$

斜碰：

$$m_1v_{1n}+m_2v_{2n}=m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n},\quad v'_{1n}-v'_{2n}=-e(v_{1n}-v_{2n})$$

光滑：

$$v_{1\tau}=v'_{1\tau},\ v_{2\tau}=v'_{2\tau}$$

非光滑：

$$m_1v_{1\tau}+m_2v_{2\tau}=m_1v'_{1\tau}+m_2v'_{2\tau},\ v'_{1\tau}-v_{1\tau}=\mu(v'_{1n}-v_{1n}),\ v'_{2\tau}-v_{2\tau}=\mu(v'_{2n}-v_{2n})$$

5. 变质量系统的运动

密舍尔斯基方程

$$\boldsymbol{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中 $m=m(t)$ 是主体 t 时刻的质量，$\boldsymbol{u}$ 是 $\mathrm{d}m$ 相对于参考系的速度，$\boldsymbol{F}_{外}$ 是主体所受的外力。条件为惯性系及 $\mathrm{d}m\ll m$。

注：若 $\boldsymbol{u}=0$，则 $\frac{\mathrm{d}[m(t)\boldsymbol{v}]}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_{外}$；但与牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$ 的意义不同，也与相对论动力学方程 $\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$，$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 的形式相同，但含义也不同。

若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{F}_{外}=m(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m(t)\boldsymbol{a}$；与牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 形式相同，而本质不同。

$\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_C$ 亦然。这是种极容易犯的逻辑错误，请勿混淆。

变质量系统冲量定理

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}_{外}\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{u}\mathrm{d}m,\ m_2\boldsymbol{v}_2-m_1\boldsymbol{v}_1=\int_0^t\boldsymbol{F}_{外}\,\mathrm{d}t+\int_0^t\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m$$

变质量系统动能定理

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}m-\frac{1}{2}v^2\mathrm{d}m$$

讨论略。

不一定要用变质量系统的定轴转动定理 $I_z(t)\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}=M_z^e+M_z^r$ 或变质量系统动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，或 $\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\mathrm{d}t+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}\mathrm{d}m$ 等公式。有关转动定理及角动量定理的适用范围的问题与牛顿定律与动量定理的问题类似。

1.2 问题解析

问题 1－1 如图 1－1 所示，质点在 Δt 时间内沿曲线从 A 运动到 B，试在图中画出：

(1) A、B 两处质点的位矢；它们与坐标原点的选择有关吗？

(2) 质点在 Δt 时间内的 $\Delta\boldsymbol{r}$、Δr、Δs；它们与坐标原点的选择有关吗？

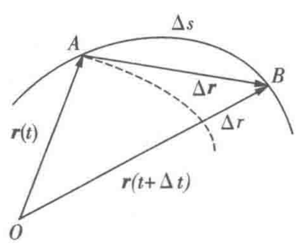

图 1－1　问题 1－1 图

答：(1) A 处的位矢为 $\boldsymbol{OA}$，即 $\boldsymbol{r}(t)$；B 处的位矢为 $\boldsymbol{OB}$，即 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，如图 1－1 所示，很显然位矢定义点不同，位矢就不同，所以位矢与坐标原点(选为位矢的定义点)有关。

(2) 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 与 $\boldsymbol{r}(t)$ 两位矢之差，即 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$。而 Δr 是位矢大小之差，即 $\Delta r=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)|-|\boldsymbol{r}(t)|$。一般地 $\Delta r\neq|\Delta\boldsymbol{r}|$，即矢量增量的大小不等于矢量大小的增量。$\Delta s$ 是质点由 A 到 B 所走过的路程，总大于零，或者表示

自然坐标的增量，是否大于零与自然坐标正向的选择有关，如图 1－1 所示。$\Delta\boldsymbol{r}$、Δs 与坐标系的原点选择无关，而 Δr 与原点选择有关。

思考题 ?

一个质点能否作为参考系呢？

问题 1－2 质点沿 x 轴作直线运动，其速度 v 与时间的关系如图 1－2 所示。

(1) t_1 时刻曲线的切线的斜率代表什么？

(2) t_1 到 t_2 曲线的割线的斜率代表什么？

(3) $t=0$ 到 t_3，质点的位移可用什么表示？

(4) $t=0$ 到 t_3，质点的路程可用什么表示？

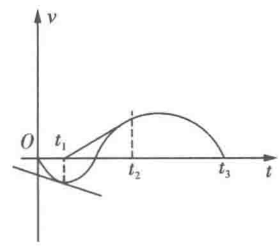

图 1－2　问题 1－2 图

答：(1) 表示 t_1 时刻的瞬时加速度 a。

(2) 表示 t_1 到 t_2 时刻质点的平均加速度 $\boldsymbol{a}$。

(3) 位移可表示为 $\int_0^{t_3} v\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}x = x(t_3) - x(0)$，也可用速度图线与 t 轴间面积的代数和来表示。

(4) 路程可表示为 $\int_0^{t_3} |v|\,\mathrm{d}t = \int |\mathrm{d}x|$，也可用速度图线与 t 轴间面积的算术和来表示。

思考题 ?

质点沿 x 轴作直线运动，其加速度曲线 $a\sim t$ 的切线的斜率代表什么？

问题 1－3 一个质点作如图 1－3 所示的斜抛运动，忽略空气阻力。试回答：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是否变化？

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$是否变化？

(3) 法向加速度 a_n 是否变化？

(4) 图示轨道曲率半径何处最大？何处最小？其数值是多少？

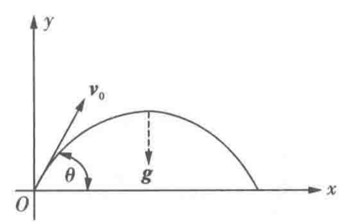

图 1－3　问题 1－3 图

答：(1) 变化。$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是质点作曲线运动时的切向加速度分量，在斜抛运动中$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g\sin\alpha$。其中 α 是 $\boldsymbol{g}$ 与法向的夹角，或速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴(水平)之间的夹角。在轨道上不同点角 α 不同，所以切向加速度变化。

(2) 不变。质点作斜抛运动时的加速度$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}$ 是一个常矢量，故不变化。

(3) 变化。法向加速度是质点加速度在轨道上各点沿法向的分量，即 $a_n=g\cos\alpha$，由于 α 角变化，所以法向加速度大小也是变化的。

(4) 由法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=g\cos\alpha$，及水平方向速度不变 $v\cos\alpha=v_0\cos\theta$，故得 $\rho=\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g\cos^3\alpha}$。在轨迹的起点和落点 $\alpha=\theta$ 处曲率半径最大，其数值是 $\rho=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta}$；在最高点 $\alpha=0$ 处曲率半径最小，其数值是 $\rho=\dfrac{v_0^2}{g}\cos^2\theta$。

思考题

(1) 试画出在斜抛运动中，速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t$ 的矢量叠加的三角形。

(2) 飞行路径角的时间改变率是否为 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-g\cos\alpha}{v}$。

问题 1-4 切向加速度的投影 a_τ 为负的含义是什么？有人说："某时刻 $a_\tau<0$，说明该时刻质点的运动是减速的。"你认为这种说法对吗？如何判断质点作曲线运动是加速的还是减速的？

答： 加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿切线的投影 a_τ 为负的含义是 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的方向与所选自然坐标的正向相反。a_τ 为负是减速的说法是不对的。若加速度与速度之间的夹角是钝角，则是减速的；若是锐角，则是加速的。也可以用矢量点乘来表示：若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\theta=a_\tau v<0$，则是减速的；若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\theta=a_\tau v>0$，则是加速的。注意，在自然坐标系中 a_τ、v 是代数量，在此 $v=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 并不代表 $\boldsymbol{v}$ 的大小。

思考题

试证质点作匀速率曲线运动时，速度总与加速度垂直。

问题 1-5 某人以一定功率划船，逆流而上，当船经过一桥时，船上的渔竿掉入河中。过 t 时间，此人发现，立即返回追赶。追上渔竿之处是桥的下游 l 处，试问河水的流速多大？

答： 河水的流速为 $u=\dfrac{l}{2t}$。

因人以一定功率划船，则船相对于水的速度恒定。以水为参考系，渔竿静止；船和人走一个来回，用时 $2t$；渔竿和水相对于河岸移动了 l 距离，故河水的流速为 $u=\dfrac{l}{2t}$。

注： 此题与在太空观察人相对于地面东西走一个来回类似。

问题 1-6 如图 1-4(a)所示，两船 A 和 B，初始相距 L，分别以速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 行驶，试做图画出 B 船相对于 A 船的速度，它们会不会相碰？

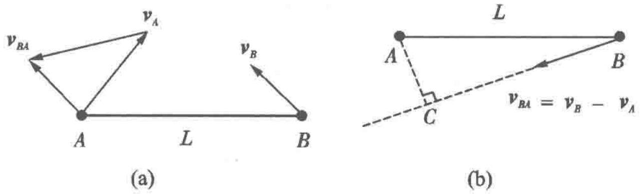

图 1-4 问题 1-6 图

答： 以 A 为参考系，B 船相对于 A 船的速度为 $\boldsymbol{v}_{BA}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，如图 1-4(a)所示。

以 A 为参考系，A 静止，B 船以 $\boldsymbol{v}_{BA}$ 运动，过 B 船作 $\boldsymbol{v}_{BA}$，并作延长线，若此线与 A 相交，说明两船相碰；若不相交，则两船不会相碰。由图 1-4(b)知两船不会相碰。