高等学校（独立学院）重点规划经济数学系列精品教材

李延敏　总主编

经济数学Ⅲ

概率论与数理统计

主　编　管建民　曲　爽
副主编　张继超　王　艳

科学出版社

高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材

李延敏　总主编

经济数学 III

概率论与数理统计

主　编　管建民　曲　爽
副主编　张继超　王　艳

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是吉林省精品课程经济数学项目及吉林省高等教育教学“十二五”规划项目(2014)研究成果之一，是高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材第三部《经济数学Ⅲ 概率论与数理统计》. 内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验，且每章配有习题和适当的选做题，书后给出参考答案，便于对照自测学习.

本书可作为高等学校经济管理类本科生的学习教材，也可作为报考研究生的数学复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 Ⅲ，概率论与数理统计/管建民，曲爽主编. —北京：科学出版社，2016.1

高等学校（独立学院）重点规划经济数学系列精品教材/李延敏主编

ISBN 978-7-03-046733-1

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①管… ②曲… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 308772 号

责任编辑：张中兴 王胡权／责任校对：邹慧卿
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 2 月第二次印刷 印张：14 1/4
字数：287 000

定价：31.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等学校 (独立学院) 重点规划经济数学系列精品教材由《经济数学 I　微积分》《经济数学 II　线性代数》《经济数学 III　概率论与数理统计》三部教材组成. 经济数学是高等学校经济管理类专业的核心课程之一, 是学习计量经济学、西方经济学、统计学、管理学等大多数专业基础课以及专业课之前必修的重要基础课, 也是几乎所有经济管理类专业考研的必考科目.

本教材是吉林省精品课程经济数学项目及吉林省高等教育教学 "十二五" 规划项目 (2014) 研究成果之一, 是高等学校 (独立学院) 重点规划经济数学系列精品教材的第三部:《经济数学 III　概率论与数理统计》. 随着科学技术的进步与发展, 概率论与数理统计在自然科学、社会科学及其他领域中都有着十分广泛的应用. 为了满足我国高等教育从精英教育转变为大众教育需要培养 "实用性、应用型" 人才的要求, 我们在多年的概率论与数理统计教学基础上, 经过统一规划、集体研究编写了本教材.

本教材是依据教育部《经济管理类数学课程基本要求》及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的精神编写的, 兼顾学生考研需要, 补充了一些新内容, 删除了一些过时不用的知识, 在保持传统体系的基础上略作改变. 本教材既注重对基本概念、基本理论和基本方法的阐述, 又力求融入一些增强思想性、趣味性和使用性的新内容, 使学生通过对本课程的学习, 能较好掌握研究随机现象的思想方法, 并具备一定的实际运用能力.

本教材的选材都是最基本的, 例题尽量采用具有代表性的典型题目或结合专业背景的实际题目, 以期达到举一反三的效果. 本教材在每章后面都安排了适量的基础题和有着较高难度的选做题, 便于不同层次的学生自学、复习和巩固所学内容. 其中带 $*$ 的章节只作介绍, 可不讲授.

本教材内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验, 教材后附习题参考答案及部分解答、附录 (常用概率统计数值表).

本教材由管建民 (第 1、2 章)、曲爽 (第 3、6、7 章)、张继超 (第 4、5 章)、王艳 (第 8 章) 编写, 管建民统编统纂.

本教材出版得到科学出版社和长春财经学院 (原吉林财经大学信息经济学院)、长春师范大学等的大力支持, 策划编辑张中兴为本教材出版做了大量工作, 在此一并表示衷心感谢.

限于作者水平, 不当之处在所难免, 最后, 真诚欢迎读者对本教材提出批评、指正.

编　者

2014 年 10 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

在自然界和人类社会普遍存在两类现象. 一类现象是在一定条件下一定会发生. 例如, 在标准大气压下水加热到 100°C 必然沸腾; 同性电荷相斥, 异性电荷相吸; 向上抛一石子必然下落, 等等; 这类现象称为**确定性现象**(或称必然现象). 还有一类现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生. 例如, 抛一枚硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 并且在每次抛之前无法肯定抛的结果是什么; 用同一门炮向同一目标射击, 各次弹着点不同, 在一次射击前无法预测弹着点的确切位置; 这类现象称为**随机现象**(或偶然现象). 在客观世界中随机现象是极为普遍的. 在一定的条件下, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 而在试验或观察之前不能预知确切的结果. 但人们经过长期实践并深入研究之后, 发现这类现象在大量重复试验或观察下, 结果却呈现出某种规律性. 例如, 多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的大致有一半, 同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性就是以后所说的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的一门数学学科, 由于随机现象的普遍性, 使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 特别是在当前一些最具活力的行业中, 如信息与通信、金融与保险等, 概率论与数理统计的应用为它们的发展起到了推动作用.

1.1　随机事件和样本空间

1.1.1　随机试验

我们把对随机现象进行的实验或观察统称为**随机试验**, 简称**试验**, 通常用字母 E 表示. 随机试验具有以下三个特点:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不唯一, 但其全部结果是事先知道的;

(3) 试验前不能确定哪一个结果发生.

关于 “相同条件” 只能是相对而言, 事实上正因为有许多不确定的因素的影响, 才造成了结果的不确定性.

1.1.2 随机事件

随机试验的每一种可能的结果称为**事件**. 在一次试验中可能出现的也可能不出现的事件称为**随机事件**, 简称为**事件**. 记为 $A, B, C, \cdots$.

特殊的随机事件有

基本事件: 随机试验的每一种可能的基本结果;

必然事件: 每次试验中必然发生的事件, 记作 Ω;

不可能事件: 每次试验中必然不发生的事件, 记作 $\varnothing$.

例 1　设试验 E 为掷一颗骰子. 在这个试验中, 记事件 A_n =“出现 n 点”, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 显然, $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 都是基本事件. 若记 A =“出现奇数点”, B=“出现能被 3 整除的点”, 则 A, B 都是随机事件. 其中事件 A 是由 A_1, A_3, A_5 这三个基本事件组成的.

显然, 必然事件、不可能事件都是确定性事件, 为了今后讨论问题方便, 也可将它们看成是两个特殊的随机事件. 再者, 事件都是相对于一定试验而言的, 如果试验的条件变化了, 事件的性质也将可能发生变化. 例如, 掷 m 颗骰子的试验, 观察它们出现的点数之和, 事件 “点数之和小于 15”, 当 $m = 2$ 时为必然事件, 当 $m = 3$ 时是随机事件, 而在 $m = 20$ 时则是不可能事件.

1.1.3 样本空间

随机试验的一切可能的基本结果组成的集合称为**样本空间**, 记为 $\Omega = \{\omega\}$, 其中 ω 表示基本结果, 又称为**样本点**.

每一个基本事件用由这个基本事件所对应的样本点所构成的单点集表示. 由于任何一次试验必然出现全部基本事件之一, 也就是一定有样本空间中的一个样本点出现, 所以样本空间作为一个事件是必然事件. 由一些基本事件复合而成的随机事件用由这些基本事件对应的样本点所构成的集合表示, 它是样本空间的一个子集.

我们称在一次试验中某随机事件发生, 当且仅当该随机事件所包含的某个样本点在试验中出现. 例如, 在例 1 的试验 E 中, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 随机事件 $A = \{1, 3, 5\}$ 是含三个样本点的集合, 所谓事件 A 发生, 即 1, 3, 5 这三个样本点中有一个出现.

1.2 事件间的关系与事件的运算

在研究随机现象时, 我们看到同一个试验可以有很多随机事件, 其中有些比较简单, 有些相当复杂. 为了从较简单的事件出现的规律中寻求比较复杂事件出现的规律, 需要研究同一试验的各种事件之间的关系和运算.

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω(即同一个随机试验) 中进行, 事件间的关系和运算与集合间的关系和运算一样, 主要有以下八种.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称**事件B包含事件A**, 或事件 A 包含于事件 B, 也称事件 A 是事件 B 的子事件. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 显然, 对于任何事件 A, 有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

2. 相等关系

若事件 A 与事件 B 互为包含, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称**事件A与事件B相等**, 记作 $A = B$.

3. 事件的和 (并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生, 即 "A 或 B" 也是一个事件, 这一事件称为**事件A与事件B的和 (并)**, 记作 $A + B$ 或 $A \cup B$.

类似地, 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生, 这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和, 记作

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \text{或} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \text{简记为} \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ 或} \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

显然有:

(1) $A \subset (A + B), B \subset (A + B)$.

(2) 若 $A + B = A$, 则 $B \subset A$.

(3) $A + \varnothing = A, A + \Omega = \Omega$.

(4) $A + A = A$.

4. 事件的积 (交)

事件 A 与事件 B 同时发生, 即 "A 且 B", 也是一个事件, 这一事件称为**事件A与事件B的积 (交)**, 记作 AB 或 $A \cap B$.

类似地, 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生, 这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积, 记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \quad \text{或} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n, \quad \text{简记为} \prod_{i=1}^{n} A_i \text{ 或} \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

显然有:

(1) $AB \subset A$, $AB \subset B$.

(2) 若 $AB=A$, 则 $A\subset B$.

(3) $A\varnothing=\varnothing A=\varnothing$, $A\Omega=A$.

(4) $AA=A$.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生, 这一事件称为**事件A与事件B的差**, 记作 $A-B$.

6. 互不相容事件 (也称互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB=\varnothing$, 则称**事件A与事件B是互不相容 (或互斥) 事件**. 类似地, 称 n **个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是互不相容的**, 如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$ 都互不相容; 称**可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容**, 如果它们中任何两个事件 A_i 与 $A_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$ 都互不相容.

7. 对立事件 (互逆事件)

若事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生, 即

$$A+B=\Omega \quad 且 \quad AB=\varnothing,$$

则称**事件A与事件B为对立事件 (互逆事件)**, 事件 A 与 B 互逆, 也常常说**事件A是事件B的逆事件**, 当然事件 B 也是事件 A 的逆事件. A 的逆事件记作 $\overline{A}$. 由定义可知两个对立事件一定是互不相容事件; 反之, 两个互不相容的事件不一定为对立事件. 对立事件满足下面关系式:

(1) $\overline{\overline{A}}=A$.

(2) $A\overline{A}=\varnothing$.

(3) $A+\overline{A}=\Omega$.

8. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容, 并且它们的和是必然事件, 则称这n**个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$构成一个完备事件组**. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个事件. 当 $n=2$ 时, A_1 与 A_2 就是对立事件. 类似地, 称**可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$构成一个完备事件组**. 如果 $\sum\limits_i A_i=\Omega$, 并且对于任何 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots)$, 有 $A_iA_j=\varnothing$.

各事件间的关系和运算如图 1.1 所示.

事件的运算满足如下运算律:

(1) 交换律: $A+B=B+A, AB=BA$.

(2) 结合律: $A+(B+C)=(A+B)+C$, $A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律: $(A+B)C = AC+BC$, $(AB)+C = (A+C)(B+C)$.

(4) 对偶律 (德摩根公式): $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$.

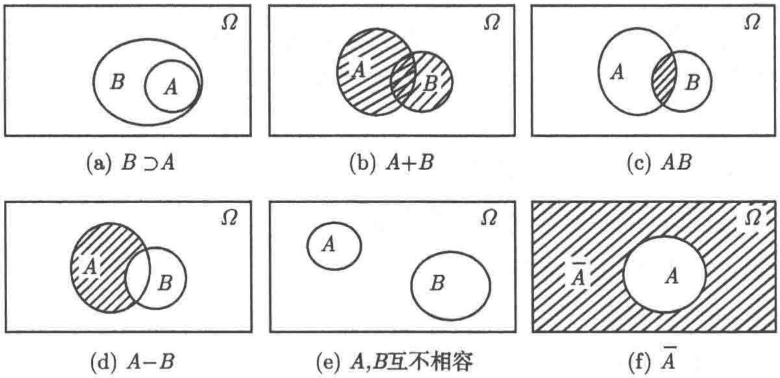

图 1.1

德摩根公式推广: $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$,

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n} = \overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}.$$

例 2　设 E 仍为 1.1 节例 1 中掷骰子的随机试验, 已定义的事件 A, B 不变, 再令 $C=$“出现点数小于 2”, $D=$“出现偶数点”, $F=$“出现点数不超过 4”, 写出各事件间的关系.

解　样本空间

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,　$A=\{1,3,5\}$,　$B=\{3,6\}$,　$C=\{1\}$,

$D=\{2,4,6\}$,　$F=\{1,2,3,4\}$,　$C\subset A$,　$C\subset F$;

B 与 C, D 与 C, A 与 D 都是不相容事件, 其中 A 与 D 是对立事件.

例 3　甲、乙、丙三位射手向同一目标各射击一次, 设 A,B,C 分别代表甲、乙、丙命中目标事件, 试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) A, B, C 均命中目标;

(2) A, B, C 均不命中目标;

(3) 至少有一个命中目标;

(4) 恰有一个命中目标;

(5) 最多有一个命中目标;

(6) 至少有两个命中目标.

解　(1) ABC;　　(2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$;

(3) $A+B+C$;　　(4) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(6) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC=AB+AC+BC$.

例 4　为检查某企业的产品质量, 依次任取三件产品进行检验. 设 A_k 表示第 k 次取得的是合格品 $(k=1,2,3)$, 指出下列运算关系表示什么事件:

(1) $A_1+A_2+A_3$;　　(2) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(3) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$;　　(4) $\overline{A_1A_2A_3}$(或$\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$).

解　(1) 三次抽取中至少有一次取得合格品;

(2) 三次抽取都未取得合格品;

(3) 三次抽取中恰有一次取得合格品;

(4) 三次抽取中至少有一次取得不合格品.

1.3　概　　率

对一个事件 (除必然事件和不可能事件外) 来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如, 为了确定水坝的高度, 就需要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到这一高度的可能性大小. 我们希望找到一个合适的数来度量事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此, 首先引入频率, 它描述了事件发生的频繁程度, 进而引出描述事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

1.3.1　事件的频率

定义 1　在相同条件下重复 n 次试验, $n(A)$ 是事件 A 在 n 次试验中发生的次数, 则称 $\dfrac{n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**, 并记为 $\mu_n(A)$.

频率方法定义概率的缺点是: 在现实世界里, 人们无法把一个试验无限次地重复下去, 因此要精确获得频率的稳定值是困难的. 但用频率方法定义概率提供了概率的一个可供想象的具体值, 并且在试验重复次数 n 较大时, 可用频率给出概率的一个近似值, 这一点是频率方法定义概率最有效的地方, 在统计学中就是如此做的, 且称用频率为概率的估计值. 为进一步建立概率的概念, 需要讨论频率的性质.

事件的频率具有如下性质:

(1) (非负性) 对任何事件 A, 有 $0\leqslant\mu_n(A)\leqslant 1$;

(2) (正则性) $\mu_n(\Omega)=1$;

(3) (可加性) 任意 m 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 满足

$$\mu_n\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_n(A_i).$$

证明　(1) 对任何事件 A, 它在 n 次试验中发生的频数 k 都满足 $0 \leqslant k \leqslant n$, 由于频率 $\mu_n(A) = \dfrac{k}{n}$, 所以有

$$0 \leqslant \mu_n(A) \leqslant \frac{n}{n} = 1;$$

(2) 必然事件 Ω 在每次试验中一定发生, 因此 $k = n$, $\mu_n(\Omega) = \dfrac{n}{n} = 1$;

(3) 事件 $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i$ 表示在试验中, m 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中至少有一个发生. 由于它们互不相容, 故在每次试验中, 它们中的任何两个事件都不会同时出现. 因此, 在 n 次试验中 $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i$ 发生的频数等于各事件发生频数之和, 即

$$n\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n(A_i),$$

所以

$$\mu_n\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \frac{n\left(\sum\limits_{i=1}^{m} A_i\right)}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n(A_i)}{n} = \sum_{i=1}^{m} \mu_n(A_i).$$

1.3.2　概率的定义

参照上述事件频率的三条性质. 下面给出概率的一般定义.

定义 2　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, 如果对于 E 中任一事件 $A \subset \Omega$, 都对应一个实数 $P(A)$, 且 $P(A)$ 满足下面三条公理, 则称 $P(A)$ 为**随机事件A的概率**.

公理 1　对于试验 E 的任一事件 A, 有 $0 \leqslant P(A)$.

公理 2　对于试验 E 的必然事件 Ω, 有 $P(\Omega) = 1$.

公理 3　对于试验 E 的可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有

$$P\left(\sum_{i} A_i\right) = \sum_{i} P(A_i). \tag{1.1}$$

公理 3 也称为概率的可列可加性.

定义 2 称为概率的公理化定义. 概率的公理化定义是建立在概率的三条公理基础之上的, 它既保持了数学概念的严密性, 又对所有的随机试验都适用.

1.3.3 概率的性质

(1) 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\varnothing)=0$.

证明　因为 $\Omega=\Omega+\varnothing$, 所以

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing),$$

从而

$$P(\varnothing)=0.$$

(2) 概率具有有限可加性, 即若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i), \tag{1.2}$$

特别是两个互不相容事件 A 与 B 之和的概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.3}$$

证明　因为

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\cdots,$$

由可列可加性 (1.1) 及 $P(\varnothing)=0$, 即得

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组, 则有

$$\sum_{i=1}P(A_i)=1, \tag{1.4}$$

特别地, 对立事件的概率有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.5}$$

证明　由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为一个完备事件组, 它们一定互不相容, 且 $\sum\limits_{i}A_i=\Omega$, 所以根据可列可加性, 有

$$\sum_{i}P(A_i)=P\left(\sum_{i}A_i\right)=P(\Omega)=1.$$

类似可证, 对于有限个事件构成的完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=1.$$

特别地, 当 $n=2$ 时, A_1 与 A_2 为对立事件, 记 $A_1=A$, $A_2=\overline{A}$, 有 $P(A)+P(\overline{A})=1$, 移项可得到式 (1.5).

(4) 若 $B\subset A$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$. (1.6)

一般地,

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.6$'$}$$

证明　因为当 $B\subset A$ 时, 有

$$A=B+(A-B),$$

且

$$B(A-B)=\varnothing,$$

由有限可加性有

$$P(A)=P(B)+P(A-B).$$

移项后即得欲证的等式, 并从概率的非负性即得下述的推论.

推论 1　若$B\subset A$, 则 $P(B)\leqslant P(A)$. 特别地, 对任意事件 A, 有 $P(A)\leqslant 1$.

(5) 对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.7}$$

证明　因为

$$A+B=A+(B-AB),$$

且

$$A(B-AB)=\varnothing,$$

所以有

$$P(A+B)=P(A)+P(B-AB),$$

又因为 $AB\subset B$, 从而由性质 (4) 即得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

称式 (1.7) 为加法公式.

推论 2　$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$.

性质 (5) 还可以用归纳法推广到任意有限个事件, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个随机事件, 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$