

UMSS

大学数学科学丛书 — 33

巴拿赫空间几何与 最佳逼近

张子厚 刘春燕 周 宇 著



科学出版社

大学数学科学丛书 33

巴拿赫空间几何与最佳逼近

张子厚 刘春燕 周 宇 著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是关于 Banach 空间几何理论及其在最佳逼近理论和远达点问题中应用的专著. 全书共五章. 第 1 章主要介绍线性拓扑空间概述、局部凸空间的分离性定理、Banach 空间的弱拓扑与自反性以及本书后续章节将要用到的一些重要定理. 第 2 章主要介绍与最佳逼近相关的 Banach 空间几何理论. 一方面, 介绍近二十多年来出现的强凸性和很凸性等一些新的空间凸性与光滑性、渐近和局部渐近赋范性质以及 $(C-\kappa)$ 性质等几何性质; 另一方面, 对一些经典的凸性与光滑性, 着重介绍这些凸性与光滑性近二十年来一些新的推广形式及其相应性质. 第 3 章主要在 Banach 空间的框架下介绍滴性质、弱滴性质、弱*滴性质和弱*-弱滴性质四种滴性质以及它们与 Banach 空间其他几何性质的关系. 第 4 章主要介绍第 2、3 章中 Banach 空间几何性质在逼近论中最佳逼近元存在性、唯一性、逼近紧性及度量投影连续性方面的应用. 第 5 章主要介绍 Banach 空间几何性质在远达点存在性、唯一性及远达点映射部分连续性等问题中的应用. 本书结合国内外相关研究成果, 将 Banach 空间几何理论和最佳逼近理论及远达点问题有机结合, 特色鲜明, 内容新颖.

本书内容属于泛函分析和逼近论交叉学科领域. 它既可作为泛函分析、非线性分析、逼近论、优化理论等方向的研究生教材或参考书, 也可供相关领域科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

巴拿赫空间几何与最佳逼近/张子厚, 刘春燕, 周宇著. —北京: 科学出版社, 2016.2

(大学数学科学丛书; 33)

ISBN 978-7-03-047166-6

I. ①巴… II. ①张… ②刘… ③周… III. ①巴拿赫空间 ②最佳逼近
IV. ①O177.2 ②O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 014223 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 杜子昂

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 2 月第一次印刷 印张: 20

字数: 381 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法,数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.从恩格斯那时到现在,尽管数学的内涵已经大大拓展了,人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比,数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系,但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括,科学地反映了数学这一学科的内涵.正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界,数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点,具有特殊的公共基础地位,其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的.作为一种先进的文化,数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用,而且是人类文明的一个重要的支柱.数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视.数学教育本质是一种素质教育;学习数学,不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论,更要着重领会数学的精神实质和思想方法.在大学学习高等数学的阶段,更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材,教学参考书或课外读物的系列,本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则,力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助,并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材,相信并希望在各方面的支持及帮助下,本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003年12月27日

序

由张子厚、刘春燕和周宇三位老师撰写的《巴拿赫空间几何与最佳逼近》是一部具有鲜明特色、内容新颖的学术专著.

众所周知, Banach 空间凸性与光滑性及相关几何性质是 Banach 空间几何理论的重要内容之一. 由于最佳逼近元的存在性和唯一性等问题必然取决于相应的空间结构, 因此 Banach 空间的凸性与光滑性理论等空间几何性质必然与最佳逼近问题有着非常密切的联系. 事实上, Banach 空间几何理论的确是最佳逼近理论研究的重要基础, 因此, Banach 空间几何理论在逼近论中的应用一直是空间理论学者经久不衰的研究内容.

该书结合 Banach 空间凸性和光滑性等几何性质近二十多年来的发展, 选择了在最佳逼近理论有着重要应用的 Banach 空间几何理论的相关内容, 以及与 Banach 空间几何性质相关的最佳逼近理论予以介绍, 系统地反映了 Banach 空间几何理论在最佳逼近问题中的应用. 凸显了 Banach 空间几何理论和逼近论紧密结合的特色, 展示了此交叉学科分支的新活力.

在该书中, 尽管介绍的内容有一些经典的凸性与光滑性, 但作者着重介绍的是这些凸性与光滑性近二十年来新的推广形式及相应性质. 而对于最佳逼近理论的内容, 作者则着重选择与 Banach 空间几何性质相关的最佳逼近理论来介绍, 其中有不少是作者近年来新的研究成果.

张子厚教授 1999 年 9 月至 2000 年 7 月在南开大学跟我做访问学者, 尽管他当时已过不惑之年, 但他勤奋学习、刻苦钻研的学习精神给我留下了深刻的印象. 离开南开大学十五年来, 我欣喜地看到, 他除了出色地做好各种行政工作之外, 依然始终孜孜不倦地在 Banach 空间理论和应用研究上辛勤耕耘, 不断有新成果发表, 特别是近年来他和他的科研团队, 致力于 Banach 空间几何理论在逼近论中的应用的研究, 并承担了国家自然科学基金资助项目, 取得丰硕成果.

得知作者将撰写一本介绍反映 Banach 空间几何理论在逼近论中应用的专著时, 我甚为高兴, 在写作之初, 我就对此书寄予希望, 并于此书正式出版之时, 欣然为此书作序.

定光桂

2015 年夏于南开大学

前 言

Banach 空间几何理论是泛函分析的重要分支, 内容十分丰富, 其中凸性与光滑性内容是其重要组成部分. 自从著名数学家 Clarkson 引入 Banach 空间的一致凸性, 得到了取值于一致凸 Banach 空间的向量测度的 Radon-Nikodym 定理以来, 利用 Banach 空间单位球的各种凸性与光滑性等几何性质已成为研究 Banach 空间理论及其应用的重要方法. Banach 空间的一系列凸性与光滑性被引入并加以研究, 已基本形成了 Banach 空间凸性与光滑性理论.

抽象的最佳逼近理论是逼近论的重要分支, 它是具体函数逼近的基础, 一般是在 Banach 空间的框架下予以讨论的. 最佳逼近元的存在性和唯一性等问题必然取决于相应的空间结构. 因此最佳逼近问题与 Banach 空间几何理论, 特别是与 Banach 空间的凸性和光滑性理论有十分密切的联系. Banach 空间几何理论是逼近论的重要基础.

随着 Banach 空间几何理论的发展, 人们必然会研究这些理论在最佳逼近问题中的应用, 从而促进了逼近论的发展. 当然, 逼近论的发展也对 Banach 空间几何理论的发展提出新的需求, 同样也促进了 Banach 空间几何理论的发展. 因此对于 Banach 空间几何理论和最佳逼近理论两个联系紧密的研究分支, 出版一本从两者结合角度系统地反映 Banach 空间几何理论在最佳逼近理论中应用的专著, 我们认为很有意义的.

我们在撰写此书时力求做到如下四点:

特色明显. 本书不同于其他 Banach 空间理论专著, 也不同于其他逼近论的专著. 我们着重选择了一些在最佳逼近理论有重要应用的 Banach 空间几何理论及其新发展的内容予以介绍, 选择与 Banach 空间几何性质相关的最佳逼近理论予以介绍. 力求凸显 Banach 空间几何理论和最佳逼近理论有机结合的特色.

自成体系. 为了让本书既有学术专著的特点, 又可作为研究生选修课教材. 除个别证明篇幅很长且易于查找的结论之外, 所给出的结论都予以证明. 为此对有些引用的文献的定理进行了归纳和整理, 有些证明过程予以简化和改进, 个别定理还给出简化证明.

内容新颖. 我们查阅了近二十多年来的相关文献, 书中不仅对在最佳逼近问题中有重要应用的强凸、很凸及其推广、渐近和局部渐近赋范性质及 $(C-\kappa)$ 性质等新

几何性质及应用予以介绍,而且还介绍了一些经典凸性与光滑性近二十年来新的推广形式及其性质与应用.书中涉及的内容都尽量选取我们所知道的最好的结果.

注意反映作者所做的工作.为了突出本书是一本专著的特点,我们对自己的工作予以较多的介绍.书中第2~4章约三分之一以上内容和第5章少量内容是我们自己的成果.其中对于我们关于Banach空间几何理论在最佳逼近理论和远达点问题方面的应用所做的工作都是近年来的新成果.本书也对我们发表过的有些文章进行了改进和完善.

全书共五章.第1章为预备知识,主要是为了后四章讨论需要.由于线性拓扑空间的相关内容学习Banach空间几何理论的基础,我们介绍线性拓扑空间的一些基础知识.同时,本书中多次用到局部凸空间的分离性定理、局部自反原理、James定理、Brøndsted-Rockafellar等重要定理,我们在本章也介绍了这方面内容.第2章为与最佳逼近相关的空间几何性质,着重介绍与最佳逼近理论相关的Banach空间一些新的几何性质以及一些经典凸性与光滑性近二十多年来的新的推广形式及其性质.考虑到滴性质在最佳逼近问题中的应用,第3章在Banach空间的框架下介绍滴性质、弱滴性质、弱*滴性质和弱*-弱滴性质.第4章为与几何性质相关的最佳逼近有关结果,主要介绍Banach空间几何性质在最佳逼近理论存在性、唯一性及度量投影连续性方面中的应用.由于远达点问题与Banach空间几何及最佳逼近理论的密切关系,第5章介绍远达点问题,主要介绍与空间几何性质相关的远达点的存在和唯一等问题.由此读者可了解到Banach空间几何性质在最佳逼近、远达点问题中的广泛应用.

本书由张子厚策划和最后统稿,并且撰写了第2章和第3章.刘春燕撰写了第4章.周宇撰写了第1章和第5章.为了帮助读者学习,我们在一些内容后加了一些注释,希望读者通过本书的学习,能由此继续直接阅读有关文献,进入相关研究的前沿.

我国著名泛函分析学者定光桂教授在百忙中认真阅读了本书,对本书提出了许多指导意见,还专门为本书作序,定先生提携后学,让我们深为感动和鼓舞.

作者对张子厚的导师南朝勋教授、王建华教授、定光桂教授和石忠锐教授,刘春燕的导师王建华教授和石忠锐教授,周宇的导师程立新教授致以深深的谢意.程立新教授和步尚全教授对本书的撰写也提出了一些很好的指导建议.没有他们多年以来的指导、鼓励和关爱,我们是不可能写出此本专著的.

我们的同事刘瑞娟老师负责本书的排版,张子厚的研究生张云、李梦林录入了本书的第2章和第3章.在此表示感谢.

本书得到了国家自然科学基金项目(项目编号:11271248;11401370)和上海工

程技术大学学术专著基金的支持. 在此一并表示感谢!

限于作者的水平和经验, 再加之掌握的资料有限, 本书错误和不当之处在所难免, 恳请有关专家和读者批评指正.

作 者

2015 年夏于上海工程技术大学

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 线性拓扑空间简介	1
1.2 Banach 空间 Hamel 基与 Schauder 基的基础知识	4
1.3 Hahn-Banach 定理与分离性定理	7
1.4 弱拓扑的基本概念	12
1.5 弱拓扑的可距离化	18
1.6 紧性与 Eberlein-Smulian 定理	21
1.7 James 定理	27
1.8 局部自反原理	36
1.9 Brøndsted-Rockafellar 定理和 Bishop-Phelps 定理	38
1.10 Krein-Milman 定理与 Huff-Morris-Stegall 定理	45
1.11 评注与参考文献	48
第 2 章 最佳逼近相关的空间几何性质	50
2.1 对偶映射和准对偶映射	50
2.1.1 对偶映射	50
2.1.2 准对偶映射	65
2.2 严格凸性与光滑性的推广	70
2.2.1 严格凸性的推广	70
2.2.2 光滑性的推广	82
2.2.3 严格凸性和光滑性及其推广的对偶关系	85
2.3 很凸性与很光滑性	86
2.3.1 很凸性及其推广	86
2.3.2 很光滑性及其推广	95
2.3.3 很凸性和很光滑性及其推广的对偶关系	100
2.4 强凸性与强光滑性	102
2.4.1 强凸性及其推广	102
2.4.2 强光滑性及其推广	110
2.4.3 强凸性和强光滑性及其推广的对偶关系	115

2.5	弱局部一致凸性的推广	115
2.6	局部一致凸性与局部一致光滑性及其推广	119
2.6.1	局部一致凸性的推广	119
2.6.2	局部一致光滑性及其推广	124
2.6.3	局部一致凸性和局部一致光滑性及其推广的对偶关系	125
2.7	Banach 空间渐近和局部渐近赋范性质	128
2.7.1	渐近赋范性质	129
2.7.2	局部渐近赋范空间	134
2.8	Banach 空间 $(C-\kappa)$ 性质	138
2.9	一致凸与一致光滑性的推广	144
2.9.1	一致凸性的推广	144
2.9.2	一致光滑性的推广	154
2.9.3	一致凸与一致光滑性及其推广的对偶关系	155
2.10	Banach 空间一些几何性质的关系	157
2.10.1	凸性与光滑性的蕴涵关系	158
2.10.2	关于凸性与光滑性的一些反例	159
2.11	评注与参考资料	169
第 3 章	Banach 空间的四种滴性质	172
3.1	滴性质	172
3.2	弱滴性质	180
3.3	弱 [*] 滴性质	182
3.4	弱 [*] -弱滴性质	185
3.5	评注与参考资料	187
第 4 章	空间几何性质在最佳逼近中的应用	189
4.1	最佳逼近元的存在性和唯一性	189
4.1.1	基本概念和性质	189
4.1.2	最佳逼近元的存在性与唯一性	196
4.2	中点局部一致凸性与逼近紧性	202
4.3	半空间与超平面的度量投影表达式	204
4.4	很凸性和强凸性与逼近紧性	208
4.4.1	很凸性和强凸性与逼近紧性	208
4.4.2	强凸性、近强凸性与最佳逼近元的 p 阶强唯一性	211
4.5	局部一致凸性与逼近紧性和几乎半 Chebyshev 集	213

4.5.1 局部一致凸性与逼近紧性	213
4.5.2 局部一致凸性与半几乎 Chebyshev 集	215
4.6 光滑性与对偶空间的逼近紧性	222
4.7 WCLUR 和 CLUR 与距离函数的可导及最佳逼近元的存在性	225
4.8 近可凹性和滴性与逼近紧性	229
4.9 k -强凸性与几乎 k -Chebyshev 集	233
4.10 $(C-\kappa)$ 性质和近强凸性与推广度量投影的连续性	242
4.10.1 $(C-\kappa)$ 性质与推广度量投影的连续性	245
4.10.2 近强凸性与推广度量投影的连续性	249
4.11 近严格凸性与度量投影的连续性和线性性	251
4.11.1 近严格凸性与度量投影的连续性	251
4.11.2 严格凸性与度量投影的线性性	252
4.12 一致凸性和一致光滑性与度量投影的一致连续性	255
4.13 光滑性与 W 逼近紧性	261
4.14 各种近迫性之间的关系	268
4.15 评注与参考资料	273
第 5 章 空间几何性质在远达点问题中的应用	275
5.1 远达点的存在性与唯一性	275
5.2 局部一致凸性与远达点函数的可导性及远达点的存在性	281
5.3 远达点映射的部分连续性	285
5.4 评注与参考资料	287
参考文献	288
索引	296
《大学数学科学丛书》已出版书目	300

第1章 预备知识

本章为全书的预备知识. Banach 空间既有线性结构, 又有多种线性拓扑结构, 并且这些结构之间具有密切的联系. 因此, Banach 空间的许多问题必须在更加广泛的线性拓扑空间中予以考虑. 另外, 对 Banach 空间几何理论及最佳逼近问题的讨论, 经常需要利用泛函分析的一些基本而又重要的定理, 如 James 自反性特征定理等. 为此, 根据后面各章节讨论需要, 本着够用为度的原则, 我们有选择地介绍线性拓扑空间的一些基本内容、局部凸空间分离性定理、弱拓扑与自反性以及 Banach 空间一些重要定理. 如无特别说明, 本书所讨论的内容都是在实空间的范畴之内.

1.1 线性拓扑空间简介

本节介绍线性拓扑空间的一些基本概念和性质.

定义 1.1.1 设 X 是线性空间, 如果 X 上有一个拓扑 Γ , 使得对于任意的 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$, 映射

$$(x, y) \rightarrow x + y; \quad (\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

分别为 $X \times X \rightarrow X, \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ 的连续映射, 则称 Γ 为 X 上的一个线性拓扑, 而称 (X, Γ) 为线性拓扑空间, 有时简称 X 为一个线性拓扑空间.

注 1.1.1 对于线性拓扑空间 (X, Γ) , 注意下面一个重要事实. 任取 $x_0 \in X, 0 \neq \alpha_0 \in \mathbb{R}$, 作映射 $T: X \rightarrow X$

$$x \xrightarrow{T} x_0 + \alpha_0 x, \quad \forall x \in X.$$

显然 T 是一一映射, T 的逆 $T^{-1}: X \rightarrow X, T^{-1}(x) = \frac{x - x_0}{\alpha_0}$. 因为 Γ 为线性拓扑, T 和 T^{-1} 都是连续映射, 所以 T 为同胚映射. 由于同胚映射把邻域映为邻域, 所以当 V 为 $x = 0$ 的邻域时, αV 也是 $x = 0$ 的邻域, 并且 $x_0 + V$ 为 x_0 的邻域, 反之亦然. 因此, 若 U 为原点的邻域基, 则 $\{x + U: U \in \mathcal{U}\}$ 为 x 的邻域基. 这样在考察一些问题时, 就可以把整体化为局部, 即只需要对原点的邻域进行讨论即可.

定义 1.1.2 设 X 为线性空间, A 为 X 的子集. 如果对于任意的 $x, y \in A, 0 < \lambda < 1$, 都有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$, 则称 A 为凸集; 如果对于每个 $\lambda, |\lambda| \leq 1$, 有 $\lambda A \subset A$ (这里 $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$), 则称 A 为均衡集; 若 A 既是凸的, 又是均衡的, 则称 A 是绝对凸的.

由于任意多个凸集的交仍为凸集, 空间 X 本身为凸集, 所以由 Zorn 引理知, 存在一个包含 A 的极小的凸集, 称之为 A 的凸包, 记为 $\text{co}(A)$. 显然

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, x_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

同样由于任意多个均衡集的交为均衡集, X 本身为均衡集, 所以由 Zorn 引理知, 存在一个包含 A 的极小的均衡集, 称之为 A 的均衡包, 记为 $\text{bal}(A)$. 容易证明

$$\text{bal}(A) = \bigcup \{ \lambda A : |\lambda| \leq 1 \}.$$

定义 1.1.3 设 X 为线性空间, $A \subset X$. 如果对任意的 $x \in X$, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $x \in \lambda A$ (或者等价地, 存在 $\lambda' > 0$, 使得 $\lambda' x \in A$), 则称 A 是吸收的.

定理 1.1.1 设 (X, Γ) 为线性拓扑空间, 则

- (1) 原点的每个邻域都是吸收集;
- (2) 对原点的每个邻域 U , 存在原点的一个邻域 V , 使得对于任意的 α 满足 $|\alpha| \leq 1$, 有 $\alpha V \subset U$;

- (3) 对原点的每个邻域 U , 存在原点的一个均衡邻域 W_0 , 使得 $W_0 + W_0 \subset U$.

证明 (1) 任取 $x \in X$, 由于 $\lambda \rightarrow \lambda x$ 为 $\mathbb{R} \rightarrow X$ 的连续映射, 并且 $0 \cdot x = 0$, 所以对原点的邻域 U , 存在 $\delta > 0$, 当 $-\delta < \alpha < \delta$ 时, $\alpha x \in U$, 因此 U 是吸收的.

(2) 设 U 为原点的邻域, 由于 $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ 为连续映射, 并且 $0 \cdot x = 0$, 所以存在 $\delta > 0$ 以及原点的邻域 U_1 , 使得当 $|\beta| \leq \delta$, $x \in U_1$ 时, $\beta x \in U$. 令 $V = \delta U_1$, 则 V 是原点的邻域, 并且对于任意的 $|\alpha| \leq 1$, $x \in U_1$, 有 $|\alpha \delta| \leq \delta$, 因此 $\alpha \delta x \in U$, 即 $\alpha V \subset U$.

(3) 令 $V_0 = \bigcup \{ \alpha V : |\alpha| \leq 1 \}$, 其中 V 为 (2) 中所述的邻域. 因 αV 为原点邻域, 所以 V_0 也为原点邻域, 并且 $V_0 \subset U$. 显然, V_0 为均衡集. 又因为映射 $(x, y) \rightarrow x + y$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 并且 $0 + 0 = 0$, 故有原点的邻域 W_1, W_2 , 当 $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ 时, $x_1 + x_2 \in U$, 即 $W_1 + W_2 \subset U$. 令 $W = W_1 \cap W_2$, 则 W 为原点的邻域, $W + W \subset U$. 对于 W , 由上面的证明, 存在原点的均衡邻域 W_0 , $W_0 \subset W$, 所以 $W_0 + W_0 \subset U$. $\square$

定理 1.1.2 设 (X, Γ) 为线性拓扑空间, M 为 X 的凸子集, 则 M 的闭包 $\overline{M}$ 和 M 的内点 $\text{int}(M)$ 都是凸集.

证明 设 $x, y \in \overline{M}$, $0 < \alpha < 1$, 对 $\alpha x + (1 - \alpha)y$ 的任意邻域 $\alpha x + (1 - \alpha)y + V$ (其中 V 为原点的邻域), 由定理 1.1.1, 存在原点的均衡邻域 W , 使得 $W + W \subset V$. 因 $x + W$ 与 $y + W$ 分别是 x, y 的邻域, 所以有 $x' \in M \cap (x + W)$, $y' \in M \cap (y + W)$. 由 W 的均衡性, $\alpha W \subset W$, $(1 - \alpha)W \subset W$, 于是

$$\alpha x' + (1 - \alpha)y' \in \alpha(x + W) + (1 - \alpha)(y + W)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha x + \alpha W + (1 - \alpha)y + (1 - \alpha)W \\
&\subset \alpha x + (1 - \alpha)y + W + W \\
&\subset \alpha x + (1 - \alpha)y + V.
\end{aligned}$$

又因为 $x', y' \in M$, M 是凸集, 所以 $\alpha x' + (1 - \alpha)y' \in M$, 从而

$$\alpha x' + (1 - \alpha)y' \in M \cap (\alpha x + (1 - \alpha)y + V).$$

因此 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \overline{M}$, $\overline{M}$ 的凸性得证. 其次, 不妨设 $x, y \in \text{int}(M)$, $0 < \alpha < 1$, 那么存在原点的邻域 U_1, V_1 使得 $x + U_1 \subset M, y + V_1 \subset M$, 由 M 的凸性可得

$$\alpha x + \alpha U_1 + (1 - \alpha)y + (1 - \alpha)V_1 \subset M.$$

取 $V = (\alpha U_1) \cap (1 - \alpha)V_1$, 则 V 是原点的一个邻域, 并且

$$\begin{aligned}
\alpha x + (1 - \alpha)y + V &\subset \alpha x + (1 - \alpha)y + V + V \\
&\subset \alpha x + (1 - \alpha)y + \alpha U_1 + (1 - \alpha)V_1 \subset M.
\end{aligned}$$

所以 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \text{int}(M)$, 因此 $\text{int}(M)$ 为凸集. □

定理 1.1.3 设 (X, Γ) 为一个 n 维 Hausdorff 线性拓扑空间, 那么 (X, Γ) 与 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构.

证明 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 X 的基, 作 $\mathbb{R}^n \rightarrow X$ 的映射 T

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

由线性代数可知, T 为 $\mathbb{R}^n$ 与 X 的代数同构, 下面证明 T 也是一个拓扑同胚. 首先断言 T 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow X$ 的连续映射. 设 $n = 2$, α_1, α_2 为两个实数. 对 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ 的任意邻域 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + W$, 由定理 1.1.1, 存在原点的邻域 V , 使得 $V + V \subset W$. 因为当 $n = 1$ 时 T 是连续的, 故对 $\alpha_1 x_1$ 的邻域 $\alpha_1 x_1 + V$, $\alpha_2 x_2$ 的邻域 $\alpha_2 x_2 + V$, 存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 当 $|\lambda - \alpha_1| < \delta_1, |\eta - \alpha_2| < \delta_2$ 时,

$$\lambda x_1 \in \alpha_1 x_1 + V, \quad \eta x_2 \in \alpha_2 x_2 + V.$$

于是

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 + \eta x_2 &\in (\alpha_1 x_1 + V) + (\alpha_2 x_2 + V) \\
&= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + V + V \subset \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + W.
\end{aligned}$$

因此 T 是连续的. 由数学归纳法, 对于一般的自然数 n , T 也是连续的. 我们再断言 T 的逆 T^{-1} 也是连续的. 事实上, 令 $B = \{v \in \mathbb{R}^n: \|v\| \leq 1\}$, $S = \{v \in \mathbb{R}^n:$

$\|v\| = 1\}$, 则 B, S 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. 由于连续映射把紧集映成紧集, 所以 $T(S)$ 为 X 中的紧集. 由于 0 不属于 $T(S)$, 所以 $X \setminus T(S)$ 为 X 中包含原点的一个开集, 即为原点的一个邻域. 由定理 1.1.1, 存在原点的均衡邻域 $U \subset X \setminus T(S)$. 现指出 $U \subset T(B)$. 事实上, 若 x 不属于 $T(B)$, 则 $T^{-1}(x)$ 不属于 B , 即 $\|T^{-1}(x)\| > 1$, 从而

$$\frac{x}{\|T^{-1}(x)\|} = T\left(\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|}\right) \in T(S).$$

因此 x 不属于 U . 如若不然, 从 U 的均衡性及 $\frac{1}{\|T^{-1}(x)\|} < 1$ 得到 $\frac{x}{\|T^{-1}(x)\|} \in U$, 矛盾. 上述表明 T 把 $\mathbb{R}^n$ 中原点邻域映成 X 中原点的邻域, 因此 T 把 $\mathbb{R}^n$ 中的开集映成 X 中的开集, 所以 T^{-1} 为连续映射, 即 (X, Γ) 与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同构得证. $\square$

推论 1.1.1 设 (X, Γ) 为 Hausdorff 线性拓扑空间, M 为 X 的有限维子空间, 则 M 为 X 的闭子空间.

证明 不妨设 M 为 n 维子空间, 由定理 1.1.3, M 与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同胚, 因 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 所以 M 是完备的, 因此 M 为 X 的闭子空间. $\square$

1.2 Banach 空间 Hamel 基与 Schauder 基的基础知识

本节简要介绍 Banach 空间的 Hamel 基和 Schauder 基的一些基本知识.

定义 1.2.1 (1) 设 X 为线性空间, $S \subset X$ 为非空子集. 由 S 的元素线性组合的全体构成的集合, 称为 S 的线性包. 记为 $\text{span}(S)$. 显然任何非空子集 $S \subset X$ 的线性包 $\text{span}(S)$ 为 X 的子空间, 且

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i : n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, s_i \in S \right\}.$$

(2) 设 $S \subset X$ 为非空子集且 $0 \notin S$. 如果对于 S 的任意有限子集 $\{x_i\}_{i=1}^n$, 以及任意的 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, 满足 $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, 都有 $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$, 则称 S 为线性无关的.

(3) 如果 S 为 X 的线性无关的子集, 并且 S 的线性包 $\text{span}(S) = X$, 则称 S 为 X 的 Hamel 基, 又称为线性基.

定理 1.2.1 每个线性空间 X 均存在 Hamel 基.

证明 设 T 为 X 中所有由线性无关的元素构成的集合, 则 $T \neq \emptyset$. 按集合的包含关系定义 T 中的偏序, 则 T 的任意全序子集均有上界. 事实上, 设 A_α 为 T 的全序子集, 令 $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, 易见 A 中的元素线性无关, 且 A 为 A_α 的一个上界. 由

Zorn 引理, T 中必存在极大元, 记为 S , 则 S 为 X 的 Hamel 基. $\square$

定理 1.2.2 每个线性空间 X 的 Hamel 基均为一一对应的.

证明 设 A, B 为 X 的两组 Hamel 基, 显然当 A, B 为有限集时, A, B 之间存在一一对应. 现设 A 为无限集. 因为对于任意的 $a \in A$, 存在有限集 $B_a \subset B$, 使得 $a \in \text{span}(B_a)$, 所以

$$B = \bigcup_{a \in A} B_a.$$

(如若不然, 则存在 $b_0 \in B$, 使得对于任意的 $a \in A$, b_0 不属于 B_a . 因为 A 为 Hamel 基, 故有 $b_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k, \alpha_k \in \mathbb{R}, a_k \in A, 1 \leq k \leq n$. 但由于 $a_k \in \text{span}(B_{a_k})$, 故有 $b_0 \in \text{span}\left(\bigcup_{k=1}^n B_{a_k}\right)$, 因此可得 b_0 可由 B 中其他的元素线性表示, 此与 B 中元是线性无关的假设矛盾.) 因 B_a 均为有限集合, 故由势的关系有: $|B| \leq |A| \cdot \aleph_0$, 又由 A 为无限集合, 故 $|A| \cdot \aleph_0 = |A|$, 因此 $|B| \leq |A|$. 同理可得 $|A| \leq |B|$. 根据 Cantor-Bernstein 定理可得 $|A| = |B|$. 因此 A, B 之间存在一一对应. $\square$

定义 1.2.2 称线性空间 X 的 Hamel 基的势为 X 的 Hamel 维数, 又称为 X 的线性维数. 称子集 $M \subset X$ 的线性包 $\text{span}(M)$ 的 Hamel 基的势为 M 的 Hamel 维数, 又称为 M 的线性维数, 记为 $\dim M$.

注 1.2.1 由定理 1.2.2 可知, 定义 1.2.2 中任意子集 $M \subset X$ 的 Hamel 维数是良定义的.

关于 Banach 空间的 Hamel 基, 有下列重要的结论. 它也是 Baire 纲定理的一个简单的应用.

定理 1.2.3 设 X 为 Banach 空间, 则 X 的 Hamel 维数不是可数无穷的.

证明 显然, 如果 X 为有限维 Banach 空间, 则 X 的 Hamel 维数不是可数无穷的. 现设 X 为无穷维 Banach 空间. 如果 X 的 Hamel 维数为可数无穷的, 则 X 存在可数无穷的 Hamel 基, 记为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 下面断言 X 的任意有限维子空间 E 不含 X 的开集, 否则存在 X 的开集 U , 使得 $U \subset E$, 则对于任意的 $x \in U$, $E \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} n(-x + U) = X$, 矛盾. 因此断言成立.

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, 由推论 1.1.1, X_n 为 X 的闭子空间, 再根据上述断言, X_n 不含有 X 的开集. 因此 X_n 无处稠密. 又 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, 所以 X 为第一纲集, 此与 X 为 Banach 空间矛盾. 证毕. $\square$

下面介绍 Schauder 基的相关基础知识.

定义 1.2.3 设 X 为 Banach 空间.

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 如果对于任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 使得

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的 Schauder 基.

(2) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\overline{\text{span}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ 的 Schauder 基, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的基序列.

注 1.2.2 (1) Banach 空间 X 中的任意基序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关的, 每个具有 Schauder 基的 Banach 空间是可分的, 即 X 具有可数稠密子集.

(2) 定理 1.2.1 说明任意线性空间都存在线性基, 但 Enflo 举出反例说明存在可分 Banach 空间 X , 使得 X 不具有 Schauder 基, 见文献 [28] 附录.

定义 1.2.4 设 X 为 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的 Schauder 基. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 及任意的 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in X$, 称

$$x_n^* : X \rightarrow \mathbb{R}, x_n^*(x) = x_n^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right) = \alpha_n$$

为 X 的坐标泛函; 称

$$P_n : X \rightarrow X, P_n(x) = P_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

为 X 的投影.

定义 1.2.5 设 X 为 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的 Schauder 基. 对于任意的 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X$, 定义 $\|\cdot\|_{(x_n)} : X \rightarrow \mathbb{R}, \|x\|_{(x_n)} = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \right\|$, 称之为 (x_n) -范数.

注 1.2.3 设 X 为 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的 Schauder 基, 则 (x_n) -范数 $\|\cdot\|_{(x_n)}$ 与 X 的原范数等价, 并且对于任意的 $x \in X$, $\|x\|_{(x_n)} \geq \|x\|$.

定理 1.2.4 设 X 为 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的 Schauder 基, 则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, X 的投影 $P_n : X \rightarrow X$ 为连续的.

证明 由注 1.2.3, 只需证明投影 P_n 依 (x_n) -范数 $\|\cdot\|_{(x_n)}$ 连续即可. 事实上, 对于任意的 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$,

$$\left\| P_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right) \right\|_{(x_n)} = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|_{(x_n)} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|_{(x_n)}.$$

因此, 投影 P_n 依 (x_n) -范数 $\|\cdot\|_{(x_n)}$ 连续. 故投影 P_n 依原范数也连续. $\square$