普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

蒋永泉　贾志刚　黄建红　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　蒋永泉　贾志刚　黄建红
副主编　董金林

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括矩阵的行最简形与线性方程组、行列式、矩阵代数、向量的相关性、矩阵的相似对角化、二次型等线性代数的基本知识.同时,每章用一节内容简单介绍线性代数问题的Matlab计算,以提高学生利用数学软件解决实际问题的能力.本书在确保线性代数知识体系系统、完整的前提下,适当调整了知识结构的顺次关系,给线性代数的教学过程留出了一定的时间空间;此外,本书加强了有关线性代数思想方法的案例,有助于学生利用线性代数思想方法解决问题能力的提高.

本书可作为高等学校理工和经济管理(非数学)各专业的教材和参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/蒋永泉,贾志刚,黄建红主编.—北京:科学出版社,2016.1
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-046007-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①蒋… ②贾… ③黄… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第245987号

责任编辑:李淑丽 李 萍/责任校对:郭瑞芝
责任印制:赵 博/封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2016年1月第一次印刷 印张:13 1/2
字数:272 000

定价:29.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

本书是根据教育部教学指导委员会制定的专业教学规范精神和《江苏省教育厅关于全面提高高等学校人才培养质量的意见》的文件精神，面向普通高等学校理工和经济管理学科各专业开设线性代数课程的需要编写的，其内容包括线性方程组、行列式、矩阵代数、线性相关性、特征值与特征向量、矩阵的相似对角化、二次型以及线性代数问题的 Matlab 计算.

线性代数是高等学校理工和经济管理类各专业的一门重要的基础课程，其对本科生学好其他后续课程起着重要的作用. 多年的教学实践结合现行教学计划和学生学习线性代数的实际情况，我们感到有必要编写一部更加适合教学实际情况的教材. 为此，我们代数学教研室在院教学委员会的指导下，成立了线性代数教材编写课题组. 几年来，课题组对其他版本的相关教材进行了大量的调查研究，对课程体系和课程内容进行了多次的研讨，在此基础上，完成了对本书的编写. 本书有下面三个特点.

1. 优化知识结构体系　本书首先从介绍矩阵概念入手，引出矩阵的行最简形和秩的概念，并利用行最简形来研究用消元法求解线性方程组的问题，然后再依次研究线性代数的相关问题. 这样的处理不仅可以优化线性代数的知识结构体系，还为线性代数的教学过程留出了较大的时间空间.

2. 注重思想方法熏陶　本书重衔接，注意与中学数学接轨；重方法，注意线性代数基本思想方法的熏陶. 通过线性代数的教学，要使学生对线性代数的思想方法有较为深刻的认识. 本书对这方面（标准形思想、等价的思想等）的内容有所加强，这对学生今后利用这种思想来解决问题很有帮助.

3. 注意与计算工具衔接　由于计算机技术和应用软件的迅速发展，许多数学计算都可以运用计算机通过适当的数学软件来实现. 本书每章安排一节，介绍运用 Matlab 数学软件来解决线性代数的一些计算问题，这对学生学好线性代数和提高利用计算机技术解决问题的能力是非常有益的.

本书由蒋永泉、贾志刚、黄建红担任主编，董金林担任副主编。本书主要内容由蒋永泉负责编写，贾志刚负责每章最后一节的编写，黄建红负责每章习题的设计

与编写，最后由蒋永泉、董金林负责协调和定稿.

本书的出版得到了江苏师范大学数学与统计学院、江苏省品牌专业数学与应用数学、“十二五”江苏省高校重点专业数学类、江苏省优势学科统计学项目的支持. 本书的编写也得到了学校和数学与统计学院领导，特别是杜增吉教授、赵雷教授的大力支持和热情帮助，在此向他们表示衷心感谢！最后，衷心感谢科学出版社为本书面世所做的工作.

由于编者水平有限，疏漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者和各位同行批评指正.

编　者

2015 年 9 月

目　　录

第 1 章　矩阵与线性方程组

多元一次方程组称为**线性方程组**. 在中学数学中,我们研究过含有两个未知量两个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

和三个未知量三个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

在此需要研究更为一般的线性方程组. 一般形式的线性方程组可以表示成

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots,\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1}$$

或用连加号表示成

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

的形式,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为这个线性方程组的未知量,a_{ij} 称为第 i 个方程第 j 个未知量的系数,b_i 称为第 i 个方程的常数项,$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$. 在这里,方程个数 m 和未知量个数 n 不一定相同.

在方程组(1.1)中,如果常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则称线性方程组(1.1)为**齐次线性方程组**;如果常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零,则称线性方程组(1.1)为**非齐次线性方程组**.

中学数学中研究过方程组解的概念,在此类似定义线性方程组解的概念.

定义 1.1　设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意给定的 n 个数,如果线性方程组(1.1)中的 n 个未知量分别用 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后,每个方程都变成了恒等式,就称

$$x_1=c_1,\quad x_2=c_2,\quad \cdots,\quad x_n=c_n$$

是线性方程组(1.1)的一个**解**.

如果存在一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,使得

$$x_1=c_1,\quad x_2=c_2,\quad \cdots,\quad x_n=c_n$$

是线性方程组(1.1)的一个解,就称线性方程组(1.1)**有解**,否则,就称线性方程组(1.1)**无解**.

在中学数学中,对于给定的线性方程组,一般只需要求出它的解即可,这对于线性方程组的研究是远远不够的.关于线性方程组,还有下列问题需要研究:

(1)相容性问题,即方程组是否有解,如何判别;

(2)唯一性问题,即有解时,是有唯一解,还是有无穷多解;

(3)解法问题,即在有解时,如何求解;

(4)解的结构,即在有无穷多解时,解的表示问题.

本章主要研究前面三个问题,问题(4)将在第4章中研究.为了更好地研究这些问题,首先需要介绍矩阵及相关概念,然后利用矩阵来研究线性方程组.

1.1 矩阵的基本概念

线性方程组(1.1),完全可由它的系数和常数项构成的一个有序数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

唯一确定.于是,线性方程组与这样的数表之间就可以建立起一个一一对应关系,从而研究线性方程组的问题就可以转化成对这样的数表的研究,在这里,我们把这样的数表称为矩阵.

定义 1.2　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的一个 m 行 n 列的数表,记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

称为一个 $m\times n$ **矩阵**,简称为**矩阵**. $m\times n$ 也称为这个矩阵的**类型**或**型**,其中 a_{ij} 位于该矩阵的第 i 行第 j 列位置,称为该矩阵的第 i 行第 j 列**元素**或**(i,j)元**,而 i,j 分别称为元素 a_{ij} 的**行标**和**列标**$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

上面数表(1.2)就是一个 $m\times(n+1)$ 矩阵,称为线性方程组(1.1)的**增广矩阵**;而由线性方程组(1.1)的系数按照原来相对位置关系组成的矩阵(1.3)称为线性方程组(1.1)的**系数矩阵**.

一般地,用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 或 $(a_{ij}),(b_{ij}),(c_{ij}),\cdots$ 来表示矩阵.有时为了指明矩阵的行、列数,矩阵也可表示为 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\boldsymbol{C}_{m\times n},\cdots$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$,$(b_{ij})_{m\times n}$,$(c_{ij})_{m\times n},\cdots$ 的形式.

元素全为实数的矩阵称为实矩阵;元素全为复数的矩阵称为复矩阵.如没有特别说明,本书所涉及的矩阵都看成是实矩阵.

定义 1.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times l}$,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,如果

(1)$m=k,n=l$;

(2)$a_{ij}=b_{ij},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$.

关于矩阵概念,再给出如下说明:

(1)元素全为零的矩阵称为**零矩阵**.$m\times n$ 的零矩阵记为 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

(2)把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全部换成它们的相反数所得的矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记为 $-\boldsymbol{A}$.

(3)行数与列数相同的矩阵称为**方阵**,$n\times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**或 n **阶矩阵**.

(4)$1\times n$ 矩阵称为**行矩阵**,也称为**行向量**或 n **维行向量**,一般表示成

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

的形式;$m\times 1$ 矩阵称为**列矩阵**,也称为**列向量**或 m **维列向量**,一般表示成

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

的形式,也可以表示成

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)' \text{或} (a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$$

的形式.行向量和列向量统称为**向量**,一般用小写的希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\cdots$ 表示.

(5)对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的位置称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**或**第一对角线**;而元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 所在的位置称为 $\boldsymbol{A}$ 的**次对角线**或**第二对角线**.

(6)主对角线上方元素全为零的方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**下三角阵**;主对角线下方元素全为零的方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**上三角阵**.

(7)主对角线以外元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶**主对角阵**,主对角线上元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 阶主对角阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

记为 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 次对角线以外元素全为零的方阵称为**次对角阵**.

(8)主对角线上元素全为 1 的 n 阶主对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n **阶单位矩阵**,简称**单位矩阵**,记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

(9)主对角线上元素全相同的 n 阶主对角阵称为 n 阶**数量矩阵**,主对角线上元素为 k 的 n 阶数量矩阵

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

记为 $k\boldsymbol{E}$.

在处理阶数比较高的矩阵时经常要用到一种方法——矩阵的分块. 所谓矩阵的**分块**就是在矩阵的行与行之间、列与列之间画上一些虚线,画上一些线之后所得的矩阵就称为**分块矩阵**,而每一画线的方法就称为一种**分法**. 下面我们先给出矩阵分块的一个例子.

设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

我们在 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行与第 4 行之间画了一条虚线，在第 3 列与第 4 列之间也画了一条虚线，这样得到的矩阵就是一个分块矩阵，这样画线的方法也就是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一种分法. 当然画线的方法有多种：可以只对行画线，也可以只对列画线，也可以对行与列都画线. 上面对 $\boldsymbol{A}$ 的分法，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成了 4 块，其中每一小块可以看成是一个矩阵，称为分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**子块**. 若记

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}.$$

矩阵的分块是矩阵理论研究中的一种技巧. 对矩阵进行适当的分块，常常可以使得对矩阵的研究更加简便，矩阵之间的关系更加清晰，这将在今后的讨论中逐步体现.

习　题　1.1

1. 求参数 a,b,c，使得矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 3 & -1\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & b\\ 5 & c & -2\end{pmatrix}$$

相等.

2. 求参数 a,b，使矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2a-b & 3\end{pmatrix}$$

相等.

3. 设分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

试写出矩阵 $\boldsymbol{A}$.

1.2　矩阵的行最简形

行最简形是一种重要的矩阵形式，它在研究线性代数的其他问题中起着重要

的作用.

定义 1.4　下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1)交换矩阵中某两行的位置；

(2)用一个非零数乘矩阵的某一行；

(3)把矩阵中某一行的倍数加到另一行.

把上面初等行变换中的"行"全部换成"列"，就得到关于矩阵对列所进行的三种变换，称为矩阵的**初等列变换**. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

为讨论方便，先作如下记号约定：

(1)用 r_i 表示矩阵的第 i 行，而 c_i 表示矩阵的第 i 列；

(2)用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的 i,j 行，而 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换矩阵的 i,j 列；

(3)用 kr_i 表示矩阵的第 i 行乘以数 k，而 kc_i 表示矩阵的第 i 列乘以数 k；

(4)用 $r_i + kr_j$ 表示把矩阵的第 j 行乘以数 k 后加到第 i 行，而 $c_i + kc_j$ 表示把矩阵的第 j 列乘以数 k 后加到第 i 列.

例 1.1　给定矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

对矩阵可以进行一些初等行变换

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.1 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过 3 次初等行变换变成了矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

再经过 2 次初等行变换变成了矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

定义 1.5　称一个矩阵为**行阶梯形矩阵**，简称**行阶梯阵**，如果

(1)矩阵中有零行(元素全为零的行),则零行在矩阵的最下方;

(2)非零行的首非零元(第一个不为零的元)的列标随着行标的递增而严格递增.

定义中条件(2)意味着相邻两个非零行中,上一行首非零元前 0 的个数少于下一行首非零元前 0 的个数.

根据行阶梯阵的定义,上面矩阵(1.4)和(1.5)都是行阶梯阵.同样,下列矩阵:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&2&-1&3\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&3&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

也都是行阶梯阵.在这些行阶梯阵中,矩阵(1.5)和上面最后一个矩阵还具有特点:首非零元都是 1;首非零元所在列的其他元素全为零,我们把这样的行阶梯阵称为行最简形阶梯形矩阵.

定义 1.6　称一个矩阵为**行最简形阶梯形矩阵**,简称**行最简形**,如果

(1)这个矩阵是行阶梯阵;

(2)非零行的首非零元等于 1;

(3)每个首非零元所在列的其他元素全为零.

上面例 1.1 中,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过 3 次初等行变换变成了行阶梯阵(1.4),这种化行阶梯阵的过程称为**化行阶梯阵**;同样,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过 5 次初等行变换变成了行最简形(1.5),这种化行最简形的过程称为**化行最简形**.这种化行阶梯阵或行最简形的方法具有一般意义.

定理 1.1　任一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过一系列初等行变换变成行阶梯阵.

证　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 已是行阶梯阵;如果 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 中存在非零元.不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的第一列中存在非零元,那么可以适当交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行使 $\boldsymbol{A}$ 变成(1,1)元素非零的矩阵.可不妨设 $a_{11}\neq 0$,对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换:把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 倍加到第 i 行,$i=2,3,\cdots,m$,则 $\boldsymbol{A}$ 就变成

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}$$

形式的矩阵,其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵.再对 $\boldsymbol{B}_1$ 重复上面这样的过程,并一直进行下去就可以把 $\boldsymbol{A}$ 化成行阶梯阵的形式.

对于行阶梯阵,如果把每一非零行乘以这个行的首非零元的倒数,再把这一行的适当倍数加到上面各行,就可以把这个行阶梯阵化为行最简形.于是有下面结论.

定理 1.2　任一 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过一系列初等行变换化成行最简形矩阵.

定义 1.7　矩阵的行阶梯阵的非零行行数称为这个矩阵的**秩**，规定零矩阵的秩为零.

因为任一矩阵的行阶梯阵的非零行行数都不能超过它的行数，所以矩阵的秩一定不大于它的行数. 另外，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过不同的初等行变换变成行阶梯阵，用不同的初等行变换变成的行阶梯阵中所出现的非零行行数是唯一确定的，这个结论将在第 4 章中给出证明. 所以矩阵的秩是唯一的，与所作的初等行变换无关. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩记为 $R(\boldsymbol{A})$.

例 1.2　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3+(-2)r_2\\ r_4-r_2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $R(\boldsymbol{A})=3$.

习　题　1.2

1. 用初等行变换下列矩阵为行阶梯阵和行最简形，并写出矩阵的秩：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$；　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$；　(6) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 设 a,b 是参数，试讨论下列矩阵的秩：

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & -7 & a & b \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 4 \end{pmatrix}$.

1.3　消元法解线性方程组

在解线性方程组时，比较方便的方法是消元法. 在中学里，我们已经学会用消元法来解简单的线性方程组，下面先看一个中学数学中解线性方程组的例子.

例 1.3　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9,\\4x_1+2x_2+5x_3=12,\\2x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases}\tag{1.6}$$

解　先把第 1 个方程的 -2 倍加到第 2 个方程，第 1 个方程的 -1 倍加到第 3 个方程得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9,\\4x_2-x_3=-6,\\2x_2-x_3=-4.\end{cases}$$

交换上面第 2 个方程和第 3 方程得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9,\\2x_2-x_3=-4,\\4x_2-x_3=-6.\end{cases}$$

把上面第 2 个方程的 -2 倍加到第 3 个方程得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9,\\2x_2-x_3=-4,\\x_3=2.\end{cases}\tag{1.7}$$

把上面第 3 个方程的 -3 倍加到第 1 个方程，把第 3 个方程的 1 倍加到第 2 个方程得

$$\begin{cases}2x_1-x_2=3,\\2x_2=-2,\\x_3=2.\end{cases}$$

用 $\frac{1}{2}$ 乘上面方程组的第 2 个方程，再把第 2 个方程的 1 倍加到第 1 个方程得

$$\begin{cases}2x_1=2,\\x_2=-1,\\x_3=2.\end{cases}$$

最后再用 $\frac{1}{2}$ 乘上面方程组的第 1 个方程，得方程组解为