运筹与管理科学丛书 25

广义凸性及其应用

杨新民　戎卫东　著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 25

广义凸性及其应用

杨新民　戎卫东　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

函数的凸性和广义凸性是运筹学和经济学研究中的重要基础理论.本书系统地介绍数值函数各种类型的广义凸性以及它们在运筹学和经济学中的一些应用.主要内容包括:凸集与凸函数、拟凸函数、可微函数的广义凸性、广义凸性与最优性条件、不变凸性及其推广、广义单调性与广义凸性、二次函数的广义凸性和几类分式函数的广义凸性.

本书可以作为运筹学、经济学、管理科学和应用数学专业研究生和高年级本科生的教材和教学参考书,也可供从事这些专业的教学科研工作者参考.本书的内容基本上自成体系,只需要读者具有高等数学的基础知识就可以阅读.

图书在版编目(CIP)数据

广义凸性及其应用/杨新民,戎卫东著.—北京:科学出版社,2015.10
(运筹与管理科学丛书;25)
ISBN 978-7-03-046093-6

Ⅰ.①广… Ⅱ.①杨… ②戎… Ⅲ.①凸函数 Ⅳ.①O174.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 252760 号

责任编辑:李静科 / 责任校对:钟 洋
责任印制:张 伟 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2016 年 1 月第一次印刷 印张:17
字数:330 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:“运筹帷幄之中, 决胜千里之外.”

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前　　言

函数的凸性是一个经典概念,因其在数学规划论、博弈论、数理经济学、逼近论、变分学、最优控制理论等领域具有基础性的作用,在 20 世纪 60 年代出现了一个新的数学分支——凸分析. 几乎与此同时,人们注意到在经济学中大量理论和实际问题所遇到的函数并非是经典的凸函数类,而是比凸性条件更弱的某些函数类(如首先由 Arrow K J 和 Enthoven A C 于 1961 年在文献[14]中提出的拟凸函数). 此外,在实际应用中,许多优化问题的数学模型往往很难满足相关函数的凸性要求,只能退而求其次,考虑较弱的广义凸性. 因此,在过去的大半个世纪里,推广函数的凸性这一研究课题同时在数学和诸如经济学、管理科学以及工程技术这些专业学科里,吸引了众多学者的关注并使其产生了极大的兴趣. 近十几年来,对于广义凸性的研究,有两种趋势:一方面,为适应应用领域的需要,提出新的、更弱的广义凸性;另一方面,寻求某些广义凸性的统一刻画.

在国际上,自 1980 年以来,已经召开了 11 次广义凸性国际会议,出版了多部专著和论文集. 1994 年,由 Schaible S 发起,成立了专门从事广义凸性研究和交流的国际学术团体 WGGC(Working Group on Generalized Convexity),并建立了专业网站 www. genconv. org. 目前,在国际上影响较大的著作有:由 Schaible S 和 Ziemba W T 编辑的论文集 *Generalized Concavity in Optimization and Economics*(1980),由 Avriel M 等撰写的专著 *Generalized Concavity*(1988,这是广义凸性的奠基性著作),由 Hadjisavvas N 等编辑的专著 *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*(2005,本书由 16 位国际知名学者撰写,这是一部"百科全书"式的专著,篇幅长达 672 页),由 Cambini A 和 Martein L 撰写的专著 *Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications*(2009,是近期出版的最适合选作教材的专著),由 Mishra S K 等撰写的专著 *Generalized Convexity and Vector Optimization*(2009)等.

在国内,广义凸性的研究起步还是较早的. 许多作者在国内外有影响的期刊发表了大量的论文,其中的一些研究成果在国内外产生了广泛的影响.

尽管如此,我们深感遗憾的是,目前在国内还没有这方面的中文专著出版. 为填补这一不足,我们尝试撰写本书,希望本书的出版能够给从事相关领域研究与应用的科技工作者、教师和研究生提供一本比较容易阅读的参考书. 如果通过本书的出版还能吸引更多的学人广泛、深入和系统地开展这方面的研究,则幸甚.

本书试图以较少的篇幅但又较深入地介绍广义凸性基本理论及应用.我们编写本书时基本上采用了文献[2]的框架,并大量取材于文献[2]、文献[12]、文献[23]和国内外同行的研究论文.我们在本书中只打算介绍数值函数的几种最常见的广义凸性(拟凸性、伪凸性和不变凸性),取材并不追求大而全.因此,数值函数中其他诸多类型的广义凸性以及向量值函数的广义凸性都未提及.本书最初是按研究生教材编写的,为便于读者自学,我们在材料的选取上力求自成体系,并且对几乎所有的重要结果都给出较为详细的推导证明.

本书共分 8 章:第 1 章是有关凸集和凸函数理论中本书要用到的一些基本知识.第 2 章介绍不依赖于可微性假设条件的函数的拟凸性.其中,关于连续、半连续函数拟凸性的讨论主要介绍我国学者的部分工作.第 3 章介绍可微条件下函数的广义凸性,包括可微拟凸函数、伪凸函数、拟线性性和伪线性性以及二阶可微函数的广义凸性.在最优化理论中,最优性条件是一个基础性课题,因此,第 4 章中介绍在广义凸性假设条件下一般的数学规划问题的约束品性和最优性条件.第 5 章介绍函数不变凸性及其推广,特别是对预(拟)不变凸性作较详细的介绍.由于单调性是凸性研究的自然延伸,在第 6 章介绍广义凸性和广义单调性.由于二次规划在实际应用中的重要性,在第 7 章用较大的篇幅介绍二次函数的广义凸性.第 8 章简要介绍几类分式函数的广义凸性.我们认为这些内容基本上可以满足相关专业的科技人员和高校师生从事科研和教学工作的需要.

浙江师范大学仇秋生教授在百忙之中仔细审读了本书书稿,并提出了许多宝贵的修改意见,我们在此表示由衷的感谢.还要感谢我们的学生唐莉萍、杨玉红、赵勇、龙莆均、李飞等,感谢他们对本书书稿提出的许多意见,感谢他们为本书的撰写搜集资料、整理文稿.最后,作者之一的戎卫东在此要特别感谢重庆师范大学"运筹学与系统工程重庆市市级重点实验室"为本书的撰写提供的良好的工作条件和生活上的照顾.

本书得到国家自然科学基金重点项目(10831009,11431004)和面上项目(10771228,11271391)以及重庆市科委重点实验室能力提升项目(CSTC2011KLOPSE04,CSTC2014PT-SY00001)的资助,科学出版社的李静科为本书的出版提供了大量的帮助,在此一并表示衷心感谢!

由于作者的视野和水平有限,本书的不妥之处在所难免,期待读者批评指正!

杨新民　　戎卫东

重庆师范大学　内蒙古大学

2015 年 6 月于重庆大学城

目　录

第1章 凸集与凸函数

关于汉字“凹”和“凸”，史树中教授在文献[1]中有一段精彩的解释：“我们知道汉字起初是一种象形文字，但是今天的汉字绝大多数已无形可象. 即使如‘日月山水’等几个最‘象’的字来看，不看它们的甲骨文原形，也很难‘象’出来. ‘凹凸’二字似乎是仅有的例外. 按照通常汉语词典中的解释，‘凹’的含义是‘低于周围’，而‘凸’的含义是‘高于周围’，完全如同这两个字所表现的形状.”

如此一说揭示了本书的主题“凸性”和“广义凸性”都始于几何. 不过，就其研究范围和方法而言，遍及分析、代数和几何等诸多领域.

众所周知，凸函数和凹函数在经济学和最优化等领域中扮演了重要角色，有着大量的应用.

本章简要介绍凸集和凸函数的一些基本性质，有关内容可参见文献[1]～[12]. 注意到一个函数 f 是凹函数当且仅当 $-f$ 是凸函数，因而有关凸函数的任何结果都可以转换为凹函数. 鉴于此，只介绍凸函数的有关结果. 关于函数凹性的较为系统的论述，可参见文献[11]和文献[12].

1.1 凸　　集

1.1.1 基本概念

直观地看，刚才指出“凸”的含义是“高于周围”，这表明一个集合称为是凸集，是指其中的任意两点连线都完全在这个集合中；等价地，一个集合不是凸集当且仅当存在其上两点，连接它们的线段上有不属于集合的点(图 1.1).

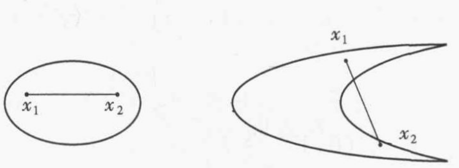

图 1.1 凸集和非凸集

定义 1.1.1 称集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集，如果

$$\forall\, x_1, x_2\in S,\ \forall\,\lambda\in[0,1],\quad \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in S.$$

定义中的 $\lambda\in[0,1]$ 可以等价地换成 $\lambda\in(0,1)$. 因为在今后的一些推导中，常常会用到 $\frac{1}{\lambda}$ 或 $\frac{1}{1-\lambda}$，这时使用后者会比较方便. 约定空集和单点集都是凸集.

下面是凸集的简单例子：

（ⅰ）全空间 $\mathbb{R}^n$；

（ⅱ）通过点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，沿方向 $d\in\mathbb{R}^n$ 的直线 $l=\{x\in\mathbb{R}^n: x=x_0+td, t\in\mathbb{R}\}$；

（ⅲ）超平面 $H=\{x\in\mathbb{R}^n: \alpha^{\mathrm{T}}x=\beta\}$，$\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$\beta\in\mathbb{R}$；

（ⅳ）与 H 相关的闭半空间

$$H^+=\{x\in\mathbb{R}^n: \alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\beta\},\quad H^-=\{x\in\mathbb{R}^n: \alpha^{\mathrm{T}}x\leqslant\beta\}.$$

定理 1.1.1　任意凸集族的交是凸集.

证明　设 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是一个凸集族，记 $S=\bigcap_{i\in I}S_i$. 任取 $x_1,x_2\in S$，则 $x_1,x_2\in S_i$，$\forall i\in I$. 由 S_i 的凸性知

$$\forall i\in I,\quad \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in S_i,\quad \forall\lambda\in[0,1].$$

因此 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in S$，即 $S=\bigcap_{i\in I}S_i$ 是凸集. □

定义 1.1.2　有限多个点 $x_i\in\mathbb{R}^n(i=1,\cdots,k)$ 的凸组合是指如下形式的点

$$x=\sum\nolimits_{i=1}^k\lambda_i x_i,\quad \sum\nolimits_{i=1}^k\lambda_i=1,\quad \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,k.$$

用归纳法可以证明，定义 1.1.1 可以等价地表述为：称集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集，如果 $\forall x_i\in S, \forall\lambda_i\geqslant 0: \sum\nolimits_{i=1}^k\lambda_i=1$，有 $\sum\nolimits_{i=1}^k\lambda_i x_i\in S$.

1.1.2　凸集的拓扑性质

设集合 $S\subset\mathbb{R}^n$，用 $\mathrm{int}S$ 和 $\mathrm{cl}S$ 分别表示 S 的内部和闭包. 这里简要介绍凸集的一些拓扑性质.

对于闭集是否为凸集，如下的定理表明可以有比定义宽松的判断式. 事实上，若一个闭集不是凸集，总可以找到它边界上的两点，使得它们连线上的所有内点都不属于该集合，这可以表述为：若闭集 S 不是凸集，则

$$\exists x,y\in S,\forall\alpha\in(0,1),\quad \alpha x+(1-\alpha)y\notin S.$$

于是，有下面的关于闭集为凸集的判断定理.

定理 1.1.2　设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集，如果

$$\forall x_1,x_2\in S,\exists\alpha\in(0,1),\quad \alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in S,$$

则 S 是凸集.

证明　假设 S 不是凸集，则 $\exists x_1,x_2\in S$，$\exists\lambda_0\in(0,1)$，有 $z=\lambda_0x_1+(1-\lambda_0)x_2\notin S$. 记 $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)z$，$\forall\lambda\in(0,1]$. 令 $\bar\lambda=\inf\{\lambda\in(0,1]: x_\lambda\in S\}$，则当 $\lambda<\bar\lambda$ 时，$x_\lambda\notin S$. 考虑序列 $\lambda_n>\bar\lambda$，满足 $\lambda_n\to\bar\lambda$，且 $\forall n=1,2,\cdots$，有 $x_{\lambda_n}\in S$. 由于 S 闭，所以 $x_{\bar\lambda}\in S$.

同理，设 $y_\lambda=\lambda z+(1-\lambda)x_2$，$\forall\lambda\in[0,1)$. 令 $\tilde\lambda=\sup\{\lambda\in[0,1): y_\lambda\in S\}$，类似地，可以证明当 $\lambda>\tilde\lambda$ 时，$y_\lambda\notin S$，但 $y_{\tilde\lambda}\in S$.

易知 $(x_{\bar\lambda},y_{\tilde\lambda})\cap S=\varnothing$，即 $\exists x_{\bar\lambda},y_{\tilde\lambda}\in S$，$\forall\alpha\in(0,1)$，$\alpha x_{\bar\lambda}+(1-\alpha)y_{\tilde\lambda}\notin S$. 这与定

理的假设条件相矛盾. □

定理 1.1.3 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集,且 $\mathrm{int}S\neq\varnothing$. 又设 $x_1\in\mathrm{cl}S$ 和 $x_2\in\mathrm{int}S$. 则

$$\forall\lambda\in[0,1),\quad \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{int}S.$$

证明 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_2\in\mathrm{int}S$. 剩下需证:$\forall\lambda\in(0,1)$,$y=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{int}S$. 因条件 $x_2\in\mathrm{int}S$ 蕴涵

$$\exists\varepsilon>0,\quad B_\varepsilon(x_2)=\{x:\|x-x_2\|<\varepsilon\}\subset S,$$

如果能证明 $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(y)\subset S$,则有 $y\in\mathrm{int}S$. 现在任取 $z\in B_{(1-\lambda)\varepsilon}(y)$,令

$$r=\frac{(1-\lambda)\varepsilon-\|z-y\|}{\lambda}>0.$$

因 $x_1\in\mathrm{cl}S$,故 $\exists z_1\in S$,使得 $\|z_1-x_1\|<r$. 令 $z_2=\dfrac{z-\lambda z_1}{1-\lambda}$,则有

$$\begin{aligned}\|z_2-x_2\|&=\frac{1}{1-\lambda}\|z-\lambda z_1-(1-\lambda)x_2\|=\frac{1}{1-\lambda}\|z-\lambda z_1-(y-\lambda x_1)\|\\&\leqslant\frac{1}{1-\lambda}(\|z-y\|+\lambda\|z_1-x_1\|)<\frac{1}{1-\lambda}(\|z-y\|+\lambda r)=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $z_2\in B_\varepsilon(x_2)\subset S$,即 $z_2\in S$. 由 z_2 的定义得到 $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$,故 $z\in S$. 进而有 $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(y)\subset S$. □

定理 1.1.4 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集,且 $\mathrm{int}S\neq\varnothing$. 则下列条件成立:

(i) $\mathrm{cl}S$ 是凸集;

(ii) $\mathrm{int}S$ 是凸集;

(iii) $\mathrm{cl}(\mathrm{int}S)=\mathrm{cl}S$;

(iv) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}S)=\mathrm{int}S$.

证明 (i) 任取 $x_1,x_2\in\mathrm{cl}S$,$z\in\mathrm{int}S$. 由定理 1.1.3 知,$\forall\lambda\in[0,1)$,$\lambda x_1+(1-\lambda)z\in\mathrm{int}S$. 因此,$\forall\mu\in[0,1)$,$\mu x_2+(1-\mu)(\lambda x_1+(1-\lambda)z)\in\mathrm{int}S$. 令 $\lambda\to1$,得

$$\mu x_2+(1-\mu)x_1\in\mathrm{cl}S,$$

因而 $\mathrm{cl}S$ 是凸集.

(ii) 任取 $x_1,x_2\in\mathrm{int}S$,需证 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{int}S$. 显然,$\lambda=1$ 时有 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_1\in\mathrm{int}S$. 而 $x_1\in\mathrm{int}S\subset\mathrm{cl}S$,由定理 1.1.3 可得 $\forall\lambda\in[0,1)$,$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{int}S$,因而 $\mathrm{int}S$ 是凸集.

(iii) 因 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}S)\subset\mathrm{cl}S$,故只需证相反的包含关系. 任取 $z\in\mathrm{cl}S$,$x\in\mathrm{int}S$. 由定理 1.1.3,$\forall\lambda\in(0,1]$,$z+\lambda(x-z)\in\mathrm{int}S$. 因此

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad z+\frac{1}{n}(x-z)\in\mathrm{int}S.$$

令 $n\to+\infty$ 得到 $z\in\mathrm{cl}(\mathrm{int}S)$. 因此 $\mathrm{cl}S\subset\mathrm{cl}(\mathrm{int}S)$.

(iv) 因 $\mathrm{int}S\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}S)$,故只需证相反的包含关系. 设 $z\in\mathrm{int}(\mathrm{cl}S)$,则

$$\exists\varepsilon>0,\quad \bar{B}_\varepsilon(z)=\{u:\|u-z\|\leqslant\varepsilon\}\subset\mathrm{cl}S.$$

任取 $x\in \mathrm{int}S$，记 $y=z+\varepsilon\dfrac{z-x}{\|z-x\|}$，显然有 $y\in \bar{B}_\varepsilon(z)\subset \mathrm{cl}\,S$. 记 $\lambda=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+\|z-x\|}\in(0,1]$，则 $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\|z-x\|$，代入 y 的定义式，经简单的计算得 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. 由定理 1.1.3 得 $z\in \mathrm{int}S$. 因而有 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\,S)\subset \mathrm{int}S$. □

注 1.1.1　由定理 1.1.4 的性质(ⅲ)知，S 的每个边界点都是其内点序列的极限点.

下面的定理指出，凸集 S 的每个内点都可表示为它的两个点的凸组合.

定理 1.1.5　设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集，且 $\mathrm{int}S\neq\varnothing$，则 $z\in \mathrm{int}S$ 当且仅当

$$\forall x\in S,\ \exists \mu>1,\quad x+\mu(z-x)\in S.$$

或者等价地，$\forall x\in S$，$\exists u\in S$，$\exists \lambda\in(0,1)$，$z=\lambda u+(1-\lambda)x$.

证明　设 $z\in \mathrm{int}S$，则 $\exists\varepsilon>0$，使得 $B_\varepsilon(z)\subset S$. 于是 $\forall x\in S$，取 $t\in(0,\varepsilon)$，使得 $z+t(z-x)\in S$. 取 $\mu=1+t>1$，有 $x+\mu(z-x)=z+t(z-x)\in S$. 反过来，设 $\forall x\in S$，$\exists\mu>1$，使得 $u=x+\mu(z-x)\in S$. 记 $\lambda=\dfrac{1}{\mu}$，则有 $\lambda\in(0,1)$，且 $z=\lambda u+(1-\lambda)x$. 由定理 1.1.3，有 $z\in \mathrm{int}S$.

后一个命题与前一个命题的等价性显然. □

前面的几个定理所陈述的性质，都是基于凸集的内部非空这一假设条件. 但是，很多时候这样的假设条件并不成立. 例如，平面上的一条线段或者通常空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一个三角形，或者更一般地，完全位于一个仿射集(即线性流形)中的凸集，它们都没有内点. 为了推广前面的有关结果到所有的凸集，引进凸集的相对内部的概念是必要的.

定义 1.1.3　集合 $S\subset\mathbb{R}^n$，设 W 是包含 S 的最小仿射集(线性流形)，则 S 的相对内部 $\mathrm{ri}\,S$，是关于 W 上的由 $\mathbb{R}^n$ 诱导的相对拓扑下所有内点的集合；换言之，x_0 是 S 的相对内点，即 $x_0\in \mathrm{ri}\,S$ 当且仅当 $\exists\varepsilon>0$，$B_\varepsilon(x_0)\cap W\subset S$.

显然，$\mathrm{ri}\,S=\mathrm{int}S$ 当且仅当 $W=\mathbb{R}^n$. 此外，与 $\mathrm{int}S$ 相比，相对内部 $\mathrm{ri}\,S$ 具有重要性质：对于任意非空凸集 $S\subset\mathbb{R}^n$，都有 $\mathrm{ri}\,S\neq\varnothing$. 事实上，容易验证：单点集的相对内部就是它自己，而多于一个点的凸集，它至少含有一条开线段.

注 1.1.2　因包含 S 的最小仿射集就是它的仿射包 $\mathrm{aff}S$，因此集合 S 的相对内部还可以表示为

$$\mathrm{ri}\,S=\{x\in S:\exists\varepsilon>0,B_\varepsilon(x)\cap \mathrm{aff}S\subset S\}.$$

几乎逐字逐句重复相关定理的证明，可以大大地推广定理 1.1.3～定理 1.1.5 为下面两个定理.

定理 1.1.6　设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是非空凸集，$x_1\in \mathrm{cl}\,S$，$x_2\in \mathrm{ri}\,S$，则

$$\forall\lambda\in[0,1),\quad \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in \mathrm{ri}\,S.$$

定理 1.1.7 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是非空凸集,则以下条件成立:

(i) $\mathrm{ri}\,S\neq\varnothing$;

(ii) $\mathrm{ri}\,S$ 是凸集;

(iii) $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}\,S)=\mathrm{cl}\,S$;

(iv) $\mathrm{ri}(\mathrm{cl}\,S)=\mathrm{ri}\,S$;

(v) $z\in\mathrm{ri}\,S$ 当且仅当 $\forall x\in S$, $\exists\mu>1$, $x+\mu(z-x)\in S$.

1.1.3 极点和极方向

凸集 $S\subset\mathbb{R}^n$ 中的点 x 称为是极点,如果它不能表示为 S 中两个不同点的凸组合. 下面的例子表明,极点集可以是空集、有限集或无限集.

例 1.1.1 (i) 直线没有极点,而闭半直线仅有一个极点;

(ii) 矩形的顶点是它的四个极点;

(iii) 球体的每个边界点是它的一个极点.

关于极点的存在性,有如下的定理[3].

定理 1.1.8 紧凸集 S 的极点集非空. 此外,每个 $x\in S$ 可以表为 S 的有限多个极点的凸组合.

定理 1.1.8 的后一个结论不能推广到无界凸集. 例如,从 x_0 出发的闭半直线,其上任一异于 x_0 的点,不能表示为它的仅有的一个极点 x_0 的凸组合. 这一事实启发我们引入回收方向和极方向的概念. 因此,先考虑如下的定理.

定理 1.1.9 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是闭凸集,则 S 是无界集当且仅当存在包含于 S 的半直线. 此外,如果半直线 $x=x_0+td$, $t\geqslant0$ 包含于 S,则 $\forall y\in S$, 半直线 $x=y+kd$, $k\geqslant0$ 也包含于 S.

证明 显然,存在包含于 S 的半直线蕴涵 S 的无界性. 反过来,若 S 是无界集,则存在序列 $\{x_n\}\subset S$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|=+\infty$. 设 $x_0\in S$, 则有界序列 $\left\{\dfrac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}\right\}$ 有收敛子列,不失一般性,假设它收敛到点 $d\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 剩下只需证明半直线 x_0+td, $t\geqslant0$ 包含于 S. 因 S 是凸集,故 $\forall\lambda\in[0,1]$, $x_0+\lambda(x_n-x_0)\in S$. 对任意固定的 $t\geqslant0$, 记 $\lambda_n=\dfrac{t}{\|x_n-x_0\|}\geqslant0$. 因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|=+\infty$, 故 $\lambda_n\to0$. 于是,对于充分大的 $n\in\mathbb{N}$, 还有 $\lambda_n\leqslant1$, 不妨假设 $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<\lambda_n\leqslant1$, 则序列 $\{x_0+\lambda_n(x_n-x_0)\}\subset S$, 即 $\left\{x_0+\dfrac{t}{\|x_n-x_0\|}(x_n-x_0)\right\}\subset S$, 令 $n\to+\infty$, 有 $x_0+td\in\mathrm{cl}\,S=S$, 即存在半直线 x_0+td, $t\geqslant0$ 包含于 S.

定理的后一个结论可类似地证明. 因为半直线 $x=x_0+td$, $t\geqslant0$ 包含于 S, 则有 $x_n=x_0+nd\in S$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 由 S 的凸性有

$$\forall y\in S,\quad y+\lambda nd+\lambda(x_0-y)=y+\lambda(x_n-y)\in S,\quad \forall\lambda\in[0,1].$$

因此，对任意固定的 $k\geqslant 0$，有

$$y+kd+\frac{k}{n}(x_0-y)=y+\frac{k}{n}nd+\frac{k}{n}(x_0-y)\in S.$$

令 $n\to+\infty$，有 $y+kd\in \mathrm{cl}S=S, \forall k\geqslant 0$. □

如果方向 $d\in\mathbb{R}^n$ 使得对于每个 $y\in S$，半直线 $x=y+kd, k\geqslant 0$ 包含于 S，则称 d 为一个回收方向.

定理 1.1.9 表明，闭凸集 S 的回收方向集非空当且仅当 S 是无界集.

一个回收方向 d 称为是一个极方向，如果不能将 d 表示为两个不同的回收方向的凸组合.

关于无界闭凸集的极点和极方向的存在性，有下面的定理[3].

定理 1.1.10 不含直线的无界闭凸集至少有一个极点和一个极方向.

定理 1.1.11 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是不含直线的闭凸集，则 $x\in S$ 当且仅当 x 能表示为 $x=y+d$，其中 y 是 S 的极点的凸组合，d 是极方向的正线性组合.

一个多面体定义为有限多个闭半空间的交. 它是特殊的凸集，它的极点和极方向个数有限. 多面体的极点还称为多面体的顶点. 有界多面体称为多胞形.

1.1.4 超平面和凸集分离定理

凸集分离定理在最优化中扮演着极其重要的角色. 因其应用范围广泛，它的表述形式有许多种. 这里只列举本书中所需要的形式.

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸子集，又设 x_0 是 S 的边界点. S 在 x_0 处的支撑半空间是包含 S 的一个闭半空间；S 在 x_0 处的支撑超平面是 S 在 x_0 处的支撑半空间的边界，换言之，超平面 $H_{x_0}=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha^{\mathrm{T}}x=\alpha^{\mathrm{T}}x_0\}$ 是 S 在 x_0 处的支撑超平面，如果

$$S\subset H_{x_0}^{+}=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\alpha^{\mathrm{T}}x_0\} \text{ 或者 } S\subset H_{x_0}^{-}=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha^{\mathrm{T}}x\leqslant\alpha^{\mathrm{T}}x_0\}.$$

不失一般性，可以假设 $S\subset H_{x_0}^{+}$，如果必要，用 $-\alpha$ 替换 α 即可. 其实，这里的 α 就是超平面 H_{x_0} 的法向量.

定义 1.1.4 设 S,T 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个子集，称超平面 $H=\{x\in\mathbb{R}^n:\alpha^{\mathrm{T}}x=\beta\}$ 分离 S 和 T，如果 $\alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\beta, \forall x\in S$ 且 $\alpha^{\mathrm{T}}x\leqslant\beta, \forall x\in T$；或者等价地，$\alpha^{\mathrm{T}}x\leqslant\alpha^{\mathrm{T}}y, \forall x\in T, \forall y\in S$.

下面的定理给出了支撑超平面和分离超平面存在性的基本结果，它们的证明可以在任何凸分析教材中找到.

定理 1.1.12（凸集与点的分离） 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集，$y_0\notin S$. 则

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \exists x_0\in S, \quad \alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\alpha^{\mathrm{T}}x_0, \quad \forall x\in S \text{ 且 } \alpha^{\mathrm{T}}y_0<\alpha^{\mathrm{T}}x_0.$$

定理 1.1.13（支撑超平面在边界点的存在性） 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是闭凸集，x_0 是 S 的边界点，则 $\exists\alpha\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \alpha^{\mathrm{T}}x\geqslant\alpha^{\mathrm{T}}x_0, \forall x\in S$.

图 1.2 描绘了支撑超平面和分离超平面.