高等几何简论

澳门中華教育會 澳门教育丛书

李祥立 著

GAODENG JIHE JIANLUN

中国社会科学出版社

高等几何简论

李祥立　著

中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等几何简论/李祥立著.—北京:中国社会科学出版社,2015.8

(澳门教育丛书)

ISBN 978-7-5161-6830-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等几何—研究 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 199691 号

出 版 人 赵剑英
责任编辑 史慕鸿
责任校对 刘 俊
责任印制 戴 宽

出　　版 中国社会科学出版社
社　　址 北京鼓楼西大街甲 158 号
邮　　编 100720
网　　址 http://www.csspw.cn
发 行 部 010-84083685
门 市 部 010-84029450
经　　销 新华书店及其他书店

印刷装订 三河市君旺印务有限公司
版　　次 2015 年 8 月第 1 版
印　　次 2015 年 8 月第 1 次印刷

开　　本 710×1000 1/16
印　　张 30.25
字　　数 513 千字
定　　价 99.00 元

资助：澳門基金會
FUNDAÇÃO MACAU

总　序

澳门回归后，在国家的大力支持下，特区政府致力于经济建设之余，高度重视教育发展，提出了“优先发展教育”的方针，逐步完善教育政策和教育法律、法规，持续加大资源投入，努力提升教育质量。在“科教兴澳”的社会背景下，澳门教育有了新的发展。而澳门教师在教育道路上默默耕耘，辛勤付出，在履行教师职责的同时，致力于提升专业水平，努力探索具有澳门特色的教育发展路向和教育方法，其中总结出来的心得体会、实践经验和教研成果，值得积累和推广。

澳门中华教育会是澳门历史悠久的文化教育团体之一，一向以爱国爱澳，团结教育界，服务社会，促进教育发展为宗旨。澳门中华教育会于2011年制定“澳门教育丛书”出版计划，目的是积累、推广澳门教师的教育经验和研究成果，鼓励教师撰写教育心得，以供本澳乃至各地教育工作者交流学习和教育科研之用。作为一个恒常性的出版计划，每年均将出版若干本教育范畴的书籍，其中包括教师文选、教育研究和教师专著。本计划得到澳门基金会大力支持，予以经费赞助。

2011年澳门中华教育会出版了第一辑“澳门教育丛书”后，为进一步提升出版质量，于2012年与中国社会科学出版社签订合作协议，把丛书交与中国社会科学出版社出版发行，中华教育会则负责丛书的组织、策划、评审工作。

澳门教师的教学任务和培训工作十分繁重，能在工余挤出时间，耗费精力进行教育研究和撰写教育心得，实属不易，值得赞扬。“澳门教育丛书”真实反映了澳门教师的精神面貌、教育特色，以及其对澳门教育作出的思考，对构建澳门特色优质教育体系和推动教师专业成长，有莫大裨

益。我们衷心希望广大澳门教师积极支持“澳门教育丛书”的出版工作，踊跃投稿，为推动澳门教育健康发展，贡献力量。

“澳门教育丛书”编辑委员会

2012 年 4 月

来函节录（代序）

笔者曾在台湾和澳门之中学和大专院校任教。现搜集部分以前学生的来函和评语，节录于下（依年排序），充当序文。

李生：

您好！我想，您可能记不起我是谁。

受过您一年中六的数学教导，实在不能忘记那“红字”和危危乎的经验，虽然在此以前我曾自命不凡。

今年我已完成四年大学课程，毕业礼之时，没有想起大学的老师，却想起中学时期那不是纯粹为自己而教育的老师。想起您严谨的推证，整齐的板书，“对于任何一个 ε，必定 exist 一个 δ，s. t. …”，还有您那套“制服”。

您的作风，多多少少影响了我。在毕业礼举行之际，我会说什么呢？只能道声多谢。(Vielen Dank!)

我是黎××的哥哥，想您记得起她吧！

向那未谋面的师母致敬！

学生　英杰（现职澳门社会文化司司长办公室主任——录者注）敬礼

1979 年 6 月 10 日

李祥立老师：

来了×大三个月，慢慢知道，你对我们的贡献是多大了。现在的微积分老师叫张××，用的书就是我们中六时用的那一本（但不是原装版，且是英文）。因经你严格地训练过，现在显得驾轻就熟，尤其是 $\varepsilon-\delta$ 证法。可恨是，当年从你处学到的东西实在太令你失望，若我有郑××的成

效，相信，大一微积分不足惧矣。比较起来，你比张××（现也有教土木系四年级的×大数学教授）好得多了。首先是证明题及其它运算，都较为严谨，其次，是你真能细心教我们，而那姓张的大学教授，却是脾气古怪得难以捉摸，对学生的问题，也不作详细答复，或许，这才是当教授的料子吧!!

现在才深深体会到，做老师的耕耘。只要是曾经用心教过学生，确切地灌输过知识，一定有成果，不为人察觉。我现在才体会到，做老师不仅是为了混口饭吃而已。

若有事要我效劳，尽管写信给我。

祝生活愉快

弟子　李显智于×大（现任职台湾某著名大学教授——录者注）

1980年12月9日

培正太空穿梭机。犀飞利!

叶炳权（现职澳门社会保障基金行政管理委员会主席——录者注）

1981年

香港无线电视有作曲大师顾嘉辉

澳门培正中学有数学大师李祥立

二个大师虽性质不同，但一样有卓越才华，亦同时一样怕羞。

黄荣富

1981年5月22日

李祥立老师：

有问必答，有答必详，再加上你冷静，精密的数学头脑，即使你上课时的严肃和喜怒不形于色，但你仍然是我最敬爱的老师！谢谢！

学生　伟霖敬上

1981年5月22日

李祥立老师：

多谢你对我的多年教育，使我对事物有较精密的分析能力，这将使我一生受用无穷。

最后，希望能有一天看见你纵声大笑的样子。

你的学生　吴荣耀敬上

1981 年 5 月 22 日

李老师：

你特殊的教学方式令我们获益良多，感谢你在培正时对我们的教导。骏社一群学生

谭佩雯　黄艳映　叶桂凤　陈玉宝

欧阳佩娥　郭佩仪　郭容英　梁月玲　同上

1983 年

To: Mr Lei,

Thank you for your patience and understanding throughout the school year.

Your student,

Sherry Fong

University Of East Asia, Macau

1985

Dear Mr. Lee,

I am delighted to make the following comment for your great teaching of "Further Mathematics" in 1985 at the Pre-U of University Of East Asia:

Your teaching of advanced Mathematics is fantastic. Examples in your notes and your class teaching aroused my great interest in Mathematics. During my years of study in Computer Engineering and Computer Science in the States, I realized that I had a very strong background in Mathematics.

Thanks for your great teaching,

Jonathan Man (President, ISACA Macao Chapter)

Apr 18, 2015

给敬爱的李祥立老师：

接到老师的来电，喜闻老师即将出版一本数学著作，能够为该著作添赠片言句语，虽然只是锦上添花，但于我而言，实在万分光荣。也给予我

一个用亲笔书信，向老师道谢的宝贵机会，感谢李祥立老师多年来对学生的教导。

老师是学生的启蒙老师，他的至理名言“一理通、百理明”，使我毕生受用。在高中时期，得蒙老师的教导，历历难忘的“逻辑”、“概率”以至“微积分”等，使我深受启发，奠定扎实的思考基础。

投身社会工作，能有“清晰的概念”，良好的“逻辑思维”，对工作不单有很好的帮助，更有助于吸收新知识、新事物，可谓“一理通、百理明”，无往而不利。与李老师非常有缘，在保安高校受训期间，能再次得到老师的教导，通过学科“数学分析”、“微分方程”和“数值分析”的学习，从“推导公式”的精妙讲解，认清“概念”根底的重要性，独到精辟的启导方法以及训练习题，提升了遇到难题时的分析能力，这是我毕生的荣幸。借此篇幅，衷心再三说声：谢谢老师！

祝愿李老师今次的数学著作，能够为广大的莘莘学子，带来崭新角度的理解与思考，突破难关。身为学生的我，也为李老师的数学成就而感到光荣。

向尊敬的李祥立老师敬礼

学生林垒立（现任保安部队高等学校教务厅厅长——录者注）

2015 年 5 月 28 日

弁　言

初等数学（在中学阶段所学之数学）是几千年数学家智慧的积累，若能灵活运用，实际上是有很大“威力”（效用）的。本书以高等几何为例，举证上述说法。

初等数学与高等数学的分界其实不是很清晰的。如微积分向为大学数学课程科目之一，现已在很多地区的中学高年级讲授，又高等几何中的部分内容如极与极线，曾列入英国 GCE（英联邦大学入学考试主要依据）考试范围，又如调和点列、西氏定理、孟氏定理等，亦曾列入港澳中学平面几何的课程范围，现仍为很多地区中学数学培训班教材的一部分。

美国哈佛大学数学教授 Edwin E. Moise 曾说：“现今所见一般以数学为专业之大学毕业生，其对初等几何之认识，仍然停留在中学阶段。”原因之一是高等几何并非一般大学数学专业课程的必修科，即使是纯数专业亦如是，应用数学专业更不用说了。不少数学系的课程安排是：修完数学分析就直接修读微分几何。另一原因是，即使有的大学有开设高等几何的课，但教材内容彼此亦有很大的差异，大多数与初等数学脱节，更少有用初等数学推导者。即使师范大学数学专业所设课程，亦大多与综合大学数学专业相同，仅是另加一些一般性之教育理论课程而已。

大数学家丘成桐（美国哈佛大学数学教授）曾多次说，他决志从事数学研究，始自高中，由于某老师从高等几何中举出不少例子，用以补充教材，引起他对几何学产生浓厚兴趣。与他同是培正校友，亦曾受业于上述老师，但不同届的还有萧荫堂（美国哈佛大学数学教授）和多位知名学者。这说明了，在中学数学教学中，如能随课程适当引入一些高等几何的例子（不一定要详细论证），对引起学生之学习兴趣，确实有很大的效益。

笔者一向认为，教师应对其所任教之学科有更深入的研究，能站在更

高之台阶，去审视、整理和补充教材。这样，才能正确指引学生学习方向，对资优生提出的问题，也能给予满意之答复。正如黄宗羲在《续师说》中所言：“师者，所以传道授业解惑者也；道之未闻，业之未精，有惑而不能解，则非师矣。”高等几何与一般中学之平面几何、立体几何和解析几何之关系最为直接，又饶有趣味。笔者特意从中精心挑选部分较具基础性而又具核心性之课题，尽量用初等数学方法处理（推导结论），冀能予在中学任教平面几何和解析几何的教师提供多一些参考资料。现正在大学修读高等几何课的学生，亦可以本书作辅助性参考读本。对数学有兴趣且基础较扎实之高中高年级学生，应可看懂本书大部分内容，这也是笔者在撰写时秉持之原则之一。

笔者学识有限，谬误难免，伏祈海内外方家，教学同仁，惠予指正是荷。

李祥立　识

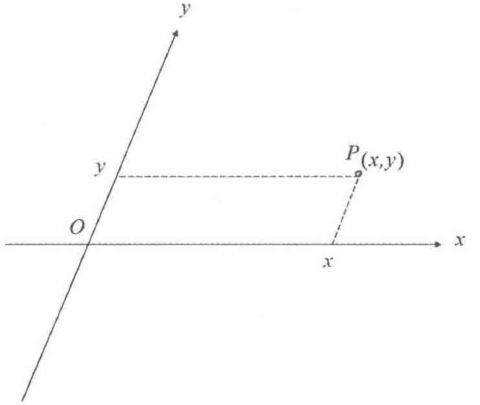
目　录

第一章　斜交坐标系

有关点与直线图形关系之研究，若不牵涉长度，面积，角度，斜率等，有时用斜交坐标系（即两坐标轴的交角非直角）远较直交坐标系方便，而直交坐标系可视为斜交坐标系之特殊情况．在本书中偶尔会选用斜交坐标系，且在两坐标轴上采用的单位不一定等长．

为行文方便，在本书中，AB 有时表点 A 至点 B 的有向距离（或无向距离），有时表过点 A 与点 B 的直线，有时表点 A 至点 B 所连线段（有向或无向），如无特别说明，依上下文取义．

设两直线之交角为 $\theta(0 < \theta < \pi)$，取交点 O 为原点，一如直交坐标系，在此两直线上分别订立正负向与单位长，建立斜交坐标系．对此两直线所决定之平面上任一点 P，过 P 作直线分别平行 y 轴与 x 轴，设交点分别为 A，B 且 A，B 在 x 轴，y 轴之一维坐标分别为 x，y，则定 P 在此斜交坐标系之坐标为(x,y)，如下图所示：



在 x 轴上之点，若其一维坐标为 x，则定其在此斜交坐标系之坐标为（x，

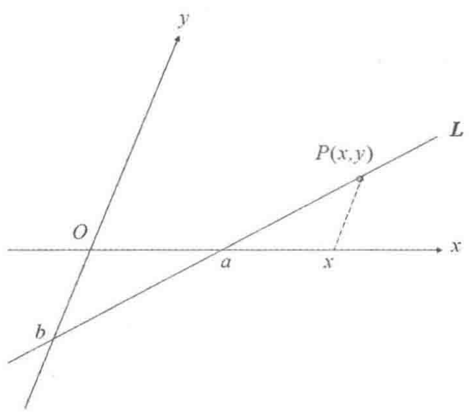
0),在 y 轴上之点,若其一维坐标为 y,则定其在此斜交坐标系之坐标为 $(0,y)$.

定理 1－1:若 $ab \neq 0$,在 x 轴,y 轴上截距分别为 a,b 之直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$(**截距式**).

证明:

设直线 L 在 x 轴,y 轴上之截距分别为 a,b,而 $P(x,y)$ 为 L 上之任意点.

(i) 设 $a>0,b<0$(如下图所示),对 $x>a$ 之点 $P(x,y)$ 而言,



由相似三角形性质,知 $\frac{x-a}{y}=\frac{a}{-b}$,

$-bx+ab=ay$,

得方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

同理,对 $x<a$ 之点 $P(x,y)$ 而言,

由相似三角形性质,知 $\frac{a-x}{-y}=\frac{a}{-b}$,

亦得方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

至于 P 若为点 $(a,0)$ 或 $(0,b)$,则直接代入方程,亦知其满足此方程.

(ii) 其它情况:依同理可推得相同之结果.【证明完】

定理 1－2:

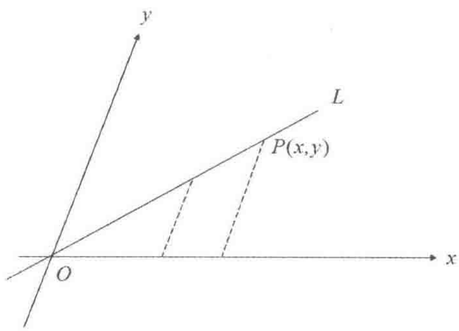
(1) 平行 y 轴之直线方程为 $x = a$(y 轴之方程为 $x = 0$).

(2) 平行 x 轴之直线方程为 $y = b$(x 轴之方程为 $y = 0$).

(3) 除 y 轴外,过原点之直线方程可表为 $y = mx$.

证明:

由定义,在 x 轴上之点,坐标为$(x,0)$,均满足方程 $y = 0$,同理,在 y 轴上之点满足 $x = 0$,其余情况,(1),(2) 之证明,由平行四边形之性质容易推得.(3) 之证明如下图所示:



x 轴之方程为 $y = 0 = 0 \cdot x$,即 $m = 0$.

设 L 为除 x 轴,y 轴外,过原点之任一直线,$P(x,y)$ 为 L 上之任意点,若 P 不为原点,由相似三角形性质容易推得$\dfrac{y}{x}$为一常数,设为 m,则$\dfrac{y}{x} = m$,即 $y = mx$(注意:若此坐标系不为直交坐标系,则 m 并非 L 之斜率,但可视为指示 L 之方向的一个数);若 P 为原点$(0,0)$,直接代入方程 $y = mx$ 验证即可.【证明完】

由定理 1 - 2 知过原点之直线方程可表为 $ax + by = 0(a^2 + b^2 \neq 0)$. 由定理 1 - 1 和定理 1 - 2 知,任一直线方程均可表为 $ax + by + c = 0(a^2 + b^2 \neq 0)$.

若 $b \neq 0$,方程 $ax + by + c = 0$ 可表为 $y = mx + k$ 之形式(此式不称为"斜截式",因 m 并非表斜率),其中 $m = -\dfrac{a}{b}$.

定理 1 - 3: 过两相异点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 之直线方程为$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$(**两点式**).

证明:

(i) 若 $x_1 \neq x_2$,

设直线 L 之方程为 $y = mx + k$,且过点 $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$,则 $y_1 = mx_1 + k$,$y_2 = mx_2 + k$,故 $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$.

则 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.　又 $y - y_1 = m(x - x_1)$,故 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$,得 $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

(ii) 若 $x_1 = x_2$,则 L 平行 y 轴,L 之方程为 $x = x_1$,即 $x - x_1 = 0$,故 $(y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$,又因 $x_2 - x_1 = 0$,故 $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.【证明完】

由定理 1 - 3 知,当 $x_1 \neq x_2$ 时,点 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 之连线方程可记为 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 或 $y - y_1 = m(x - x_1)$,其中 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

定理 1 - 4: $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$,$P_3(x_3, y_3)$ 共线之充分且必要条件为
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明:

若 P_1, P_2, P_3 不全相异,由行列式性质易知 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

若 P_1, P_2, P_3 为彼此相异之三点,则 P_1, P_2, P_3 共线之充分且必要条件为 P_3 在 P_1, P_2 之连线上. 由两点式(定理 1 - 3),得 P_1, P_2 连线之方程为 $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$,

P_3 在 P_1, P_2 之连线上之条件为 $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$,

即 $(x_1y_2 - x_2y_1) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$,

即 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.【证明完】

从定理 1 - 4 之证明中,可知:若 $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$ 为相异之两点,则 P_1, P_2 之连线方程为 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.