国家教育部 04－6－7 项目成果

线性代数

（大学基础数学二）

安希忠　陈超英　魏福义　谭洁群　主编

杜晓林　主审

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'_{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}'_{(m)} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1 \cdots \boldsymbol{\beta}_p)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}'_{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}'_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$AB=$$

中国农业科技出版社

国家教育部04－6－7项目成果

线性代数

（大学基础数学二）

安希忠　陈超英　魏福义　谭洁群　主编

杜晓林　主审

中国农业科技出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/安希忠等编著．－－北京：中国农业科技出版社，2000.12

ISBN 7—80167—070—1

Ⅰ．线…　Ⅱ．安…　Ⅲ．线性代数　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 85304 号

内容简介

《线性代数》（大学基础数学二）是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”04－6－7项目的成果。本书在革新线性代数课程的推理体系，改造、充实其教学内容并强化其应用等方面都取得了成功。

本书主要内容有：n 阶行列式、矩阵、n 维向量的基本知识、向量的相关性与矩阵的秩、向量空间、线性方程组、投入产出分析、矩阵的特征值与特征向量、二次型、群论初步等。书中配有足量的习题，书末附有答案。

本书内容丰富，为不同专业的教学提供充分的选材余地。适合作为高等院校工科、大农科和经济、管理等类各专业线性代数课程的教材，也可以作为具有高中以上文化程度的读者及各类公司职员、科学技术人员、管理人员的自学用书或参考书。

责任编辑	闫庆健
出版发行	中国农业科技出版社 （地址：北京海淀区中关村南大街 12 号　邮编：100081）
经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	长春市长航印刷厂
开　　本	787mm×1092mm　1/16　印张：14
印　　数	1～4800 册　字数：358 千字
版　　次	2000 年 12 月第 1 版　2000 年 12 月第 1 次印刷
定　　价	20.40 元

《线性代数》编审者

主　编　安希忠　陈超英　魏福义　谭洁群

主　审　杜晓林

副主编　林文浩　陈　海　刘迎湖

学课程的漫长探索。

世纪之交，计算机科学、信息科学及网络技术呈现快速发展的态势，知识经济已叩响新世纪的大门。因此21世纪对人才的数学素质将提出更高的要求，我国大学的高等数学课程正面临严峻的挑战，也将迎来难得的变革机遇。因此我们在承担教育部04－6－7项目的过程中，加大了改革的力度和步伐。

作者在十几年的改革探索和试验的基础上，在本书中对线性代数课程的教学内容和知识结构作了重要的调整，并改造了传统的推理体系。现概述本书特点如下。

1. 本书在行列式、矩阵之后，单设 n 维向量为第三章，以线性运算、内积运算、正交向量组、正交矩阵为脉络，讲解 n 维向量的基本知识，并沟通矩阵乘积与向量运算的关系。然后以行列式、矩阵、向量三者的基本知识为基础，于第四章引入相关性与秩的理论。这样可以避免在学生的知识准备尚未充足的情况下，过早地进入向量相关性与秩的陈述与推演之中而陷于难教难学的困境。

2. 本书舍弃了以往惯用的初等矩阵和矩阵标准形这两个推理工具，改用**矩阵乘积的向量表示**为主要工具，完成了牵涉相关性、秩、初等变换、逆矩阵、正交矩阵、线性变换、线性方程组的一系列推导和证明，达到了弃繁趋简、事半功倍的效果。

3. 本书强化线性代数的理论在相关学科与实际问题中的应用。例如除了充实矩阵和向量的应用背景外，我们把矩阵的特征值、特征向量及相似三角变换应用到简单经济模型和生态模型的长期预测，并介绍了马尔可夫过程的初步知识。还讲解了二次型最大值与次最大值问题的解法，这实际上是为多元统计中的主成分分析法做铺垫。

4. 无论在内容陈述，例题演练，还是在实际应用等方面，本书都明显地扩充了知识容量。这样做有利于克服空洞无物（或“骨头多肉少”）的弊端，形成既符合教学基本要求又切合学生实际的健全知识体系。

5. 本书充分调动发散思维对培养学生创造力的功用，尽力从几何背景或实例出发，引入概念，提出问题，找出办法，然后进行理论

分析，得出一般结论。

越是难度大（或有深度）的问题，越是尽力采用直观、简炼的处理方法。例如对于行列式的“串行”（或串列）展开问题及线性无关向量组的“扩维”问题，即是如此。又如，我们先从几何图形出发建立向量间的投影公式，然后运用于施密特正交化过程，使这个一向难学难记的问题变得好懂好记。

6. 本书重视理性思维对于培养大学生科学素质的作用，着意提高教学内容的科学水准，力求作到深刻的理性内涵与简炼的处理手段相统一，适度而有选择地兼顾了知识体系的完整和严密。例如对于理性思维相对集中且属本课程热点的相关性与秩的理论（即本书第四章）的知识结构进行了优化设计和精细安排，对其中的所有定理全盘给出严格的证明。

7. 本书习题设计新颖、灵活，题型全面，数量充足，以利于学生巩固基本知识，演练基本技能，兼顾为后文作铺垫。并通过习题适当扩充知识面，训练学生创造思维的能力。

8. 本书尝试打开通向近世代数学的窗口，增设一章“群论初步”供选学，对于在晶体学和DNA结构的研究中起到关键作用的对称群理论作了初步的介绍，同时讲解了数码传输检错的简单知识。

9. 本书特别适合于学生阅读（或自学），这是作者刻意以求的。这有利于调动学生的自主性和积极性，便于灵活机动地安排课堂教学，并改变以往灌输式的教学方法。

下面作两点必要的说明。

1. 本书改造线性代数教学内容的关键点在于抓住向量做纽带。

由于线性代数不象微积分学具有极限、导数、微分、积分那样“一条龙”式的知识脉络和运算体系，我们过去曾认为其难教难学的局面是难以摆脱的。但是，本书以向量为突破口，缓解（或化解）向量相关性的理论难点，充实向量的知识，强化向量的应用，以向量为工具表达矩阵的乘积并用于优化一系列推理，从而使向量成为贯穿全书的纽带，并完成了课程推理手段由抽象、晦涩向直观、浅显的过渡。

如果说，矩阵作为本书的基本线索是针对内容本身讲的，那么，向量成为本书的纽带则是针对知识结构讲的（况且矩阵的表达和运算往往离不开向量）。

2. 科学育人是素质教育的根本任务，是高等学校的重要职责。基于此，本书扩充了知识容量，提高了科学水准。目的在于鼓励教师灵活地、创造性地选材，实行因材施教；激励大学生主动地学习，把阅读和研讨作为学习进程中的重要环节。其结果将有一部分学生在学业上得到比其他人大一些（甚至大得多）的收获。

本书执笔者的分工如下：

第一章—刘迎湖；第二、五章—谭洁群；第三、四章—安希忠；第六、九章—陈超英；第七、八章—魏福义；第十章—林文浩；习题答案—陈海。全书由安希忠统筹定稿。杜晓林审阅了书稿，提出了建设性意见。

吉林大学周光亚教授审阅了全书，对于作者在革新线性代数课程的推理体系，并改造其教学内容等方面取得的成果给予充分的肯定，同时提出了一系列指导性意见。作者对此表示诚挚的感谢。

作者感谢教育部高等教育司的一贯指导与支持，感谢项目主持单位吉林农业大学及福建农林大学、华南农业大学、广西大学、北京农学院等项目合作单位的大力支持。

中国农业科技出版社一贯以严谨的科学态度和高度的责任心对书稿严格把关，并确保印刷质量及状帧水平，力求把精品教材呈献给广大师生，我们对此表示由衷的谢意。

面向21世纪的改革应该是一项百年工程。我们目前取得的成果只是局部的，而且仍需要在实践中经受长期的检验和考验。书中难免有缺陷，乃至可能有谬误之处，敬请专家和读者批评指正。

教育部04－6－7项目组暨

《线性代数》作者

2000年12月

目　录

第一章　行 列 式

行列式是数学运算和推理的重要工具，在科学技术领域有着广泛的应用。本章从二元一次方程组出发，引入二阶（进而引入三阶）行列式，然后介绍高阶行列式的展开法；讲解行列式的性质和计算方法；讲述用行列式解线性方程组（即一次方程组）的克莱姆法则。

本书除第八章以外，只在实数范围内讨论问题，以后不再申明。

第一节　二阶与三阶行列式

什么是行列式？它有什么用途？让我们从二元线性方程组的解法讲起。

一、二阶行列式

考虑含两个未知数的两个线性方程（即一次方程）所构成的方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \cdots\cdots ① \\ a_2x + b_2y = c_2 \cdots\cdots ②, \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

其中 x, y 是未知数，a_1, b_1, a_2, b_2 是未知数的系数，c_1, c_2 是常数项。

用加减消元法解这个方程组：　由 ① $\times b_2$ − ② $\times b_1$ 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时，由上式解得

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \tag{1}$$

同理可得到

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2}$$

上面的(1)和(2)就是方程组（Ⅰ）的唯一解。为了便于记忆公式(1)和(2)，让我们观察它们的共同分母：$a_1b_2 - a_2b_1$，它是由未知数的四个系数经过乘法和减法运算得到的。我们把这四个系数按照它们在方程组中原来的位置安排如下：

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ & & \\ a_2 & & b_2 \end{array}$$

可以看出，$a_1b_2 - a_2b_1$ 是实线（叫做主对角线）连结的两个数的乘积减去虚线（叫做副对角线）连结的两个数的乘积。让我们用两条竖线拦住这四个数，引进记号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{3}$$

上式就是二阶行列式的定义。其中左端是行列式的记号,右端是该行列式的值。行列式中的四个数叫做该行列式的元素。

例 1 根据定义式(3),我们可求得以下各行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 6\times(-3)-2\times(-5) = -8; \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = 1.$$

根据二阶行列式的定义,我们可把公式(1)和(2)改写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

简记

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

其中行列式 D 叫做原方程组的系数行列式。把 D 的第一列元素 a_1, a_2(即 x 的系数)换成常数项 c_1, c_2,就得到行列式 D_x;把 D 的第二列元素 b_1, b_2(即 y 的系数)换成常数项 c_1, c_2,就得到行列式 D_y. 于是当 $D\neq 0$ 时,方程组(Ⅰ)的唯一解可以写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}. \tag{5}$$

例 2 利用公式(5)求解方程组 $\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 5x-2y=16. \end{cases}$

解 计算行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6-20 = -26,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 16 & -2 \end{vmatrix} = 12-64 = -52, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 48-(-30) = 78.$$

于是解得
$$x = \frac{D_x}{D} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = -3.$$

二、三阶行列式

与公式(5)类似,三元线性方程组的解可用三阶行列式来表达。三阶行列式的一般记号是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

它是由九个数按三(横)行,三(纵)列排成矩形,左右各添加一条竖线得到的。每个数都叫做该行列式的元素。元素 a_{ij} 有两个下标,第一个下标 i 表明它处在第 i 行,第二个下标 j 表明它处在第 j 列, $i, j = 1,2,3$. 如元素 a_{23} 处在第 2 行,第 3 列。

用字母 D 代表行列式(6)，并规定它的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

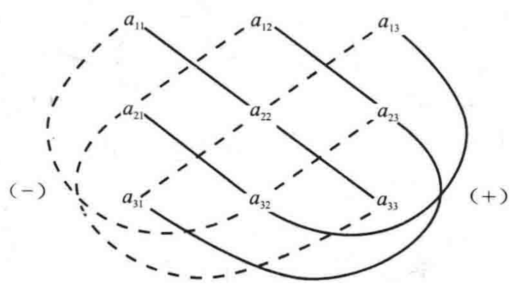
上式就是三阶行列式的定义。

观察(7)式可知，三阶行列式是用三个二阶行列式表达的，即 D 中第一行的三个元素各自乘以一个二阶行列式，再取适当的代数和。第一行的每个元素所乘的行列式，是在 D 中划去该元素所在的行与列之后，所余的四个数构成的二阶行列式，而代数和的符号按 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的顺序依次为 $+,-,+$.

把(7)式展开，得到六项的代数和：

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{8}$$

为便于记忆公式(8)，我们使用下图：



其中实线连结的三个数之积带正号，虚线连结的三个数之积带负号。

例 3 用定义式(7)计算三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(-10)-4\times(-7)+1\times 5=3.$$

例 4 用公式(8)计算三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=5\times 2\times 2+1\times(-1)\times(-2)+4\times 3\times 0$$

$$-4\times 2\times(-2)-1\times 3\times 2-5\times(-1)\times 0=32.$$

习题 1－1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 125 & 16 \\ -31 & 12 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} \sin\theta+\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2} \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 15-\lambda & -7 \\ 14 & -6-\lambda \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 125 & -27 & 0 \\ 40 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -3 \\ 6 & 3-\lambda & -9 \\ 6 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix}$.

3. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1-5x_2=6 \\ x_1+2x_2=12; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0 \\ x_1+\dfrac{1}{2}x_2=-\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 6x_1-5x_2=35 \\ x_1+\ x_2=180. \end{cases}$

4.(1)设 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & x & -2 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}=4$, 求 x； (2)设 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0$, 求 λ.

5. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 1 & y & a^2+y^2 \\ 1 & z & a^2+z^2 \end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x).$$

第二节　n 阶行列式

为了定义四阶行列式，五阶行列式……，我们需要引入余子式和代数余子式的概念。以三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为例，元素 a_{ij} 的余子式就是在 D 中划掉 a_{ij} 所在的行与列，余下的四个数所构成的二阶行列式，记为 M_{ij}. 如，元素 a_{12} 的余子式为

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij} 的代数余子式规定为　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 如，元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

有了余子式和代数余子式的概念，我们可把三阶行列式的定义式〔第一节(7)式〕改写成等价的形式：

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}M_{13},$$

即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}. \tag{1}$$

定义式(1)表明:**三阶行列式的值等于它的第一行元素乘以各自的代数余子式再相加。**

仿照(1)式,我们很容易定义四阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}A_{1j}. \qquad (2)$$

注意(2)式右端是四项之和,以最后一项中的 A_{14} 为例,我们有

$$A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-M_{14},$$

其中 M_{14} 是三阶行列式,而三阶行列式已在(1)式中给出定义。

依此类推,有了四阶行列式,我们很容易定义五阶行列式;而有了五阶行列式,很容易定义六阶行列式……,这样一来,任意高阶(或 n 阶)的行列式都有了定义。这就是 n 阶行列式的归纳法定义,定义式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \qquad (3)$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,而 M_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式,已先于 n 阶行列式有了定义($j=1,2,\cdots,n$)。

我们把定义式(3)叫做 n 阶行列式按第一行元素的展开式;称这种展开法为首行展开法。

例 1 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

解 用首行展开法:

$$D=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times12+(-1)\times(-126)+1\times88+0=238.$$

例 2 计算下三角形行列式(即主对角线上方的元素全是零的行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 顺次使用首行展开法:

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&0&0\\a_{32}&a_{33}&0\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{33}&0\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

例 3 计算对角形行列式(即主对角线以外的元素全是零的行列式)

$$D=\begin{vmatrix}a&0&0&0\\0&b&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{vmatrix}.$$

解 根据例 2 的结果,直接得到 $D=abcd$.

显然,例 2(从而例 3)的结果可以推广到任意阶的情形。

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&\times\\0&c&\times&\times\\d&\times&\times&\times\end{vmatrix}$,其中画"×"处的元素不必写出。

解 顺次使用首行展开法:

$$D=a\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&0&b\\0&c&\times\\d&\times&\times\end{vmatrix}=a\cdot(-1)\cdot b\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&c\\d&\times\end{vmatrix}=abcd.$$

请读者仿例 4 构造一个六阶行列式,并加以计算。

习题 1－2

1. 设 $D=\begin{vmatrix}0&4&0\\3&22&5\\9&101&8\end{vmatrix}$,计算元素 4 的余子式,代数余子式,并求 D 的值。

2. 设 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&a\\b&0&c&x\\0&bc&0&y\\c&0&b&z\end{vmatrix}$,计算元素 a 的余子式,代数余子式,并计算 D.

3. 计算下列行列式:

(1) $D=\begin{vmatrix}1&0&3&0\\2&0&0&-1\\3&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}$; (2) $D=\begin{vmatrix}a&b&0&0\\0&a&b&0\\0&0&a&b\\b&0&0&a\end{vmatrix}$; (3) $D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&32&-16&0\\5&64&32&1\\7&1&1&1\end{vmatrix}$.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}x^2&x&1&0\\1&1&0&0\\0&0&3&2\\-3&0&1&1\end{vmatrix}=0$, 求 x.

5. 用首行展开法计算下列行列式:

(1) $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \times & 5 & 0 & \times \\ 2 & \times & \times & 7 & \times \\ 6 & \times & \times & 1 & \times \end{vmatrix}$； (2) $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 50 & -10 & 1 \\ 4 & 0 & 10 & 37 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

第三节 行列式的性质

根据第一节(8)式可知，三阶行列式的展开式含有 3! =6 项，每一项都是三个数的乘积。于是根据第二节定义式(2)可知，四阶行列式的展开式含有4! 项，每一项都是四个数的乘积。同理，五阶行列式的展开式含有 5! =120 项，每一项都是五个数的乘积，依此类推。可见，若按定义直接计算一个高阶行列式的值，是很麻烦的。因此我们有必要研究 n 阶行列式的性质，以便简化行列式的计算。此外在许多理论推导中，行列式的性质也是大有用途的。

定理 1 n 阶行列式的值等于它的第一列的每个元素乘以各自的代数余子式再相加，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}. \quad (1)$$

公式(1)叫做行列式的首列展开法。证明省略，请读者用三阶行列式加以验证。

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

解 用首列展开法：

$$D=5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=5\times 55+4\times(-68)=3.$$

例 2 计算上三角形行列式(即主对角线下方的元素全是零的行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a & \times & \times & \times \\ 0 & b & \times & \times \\ 0 & 0 & c & \times \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

解 顺次使用首列展开法：

$$D=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b & \times & \times \\ 0 & c & \times \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}=a\cdot b\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} c & \times \\ 0 & d \end{vmatrix}=a\,b\,c\,d.$$

结合第二节例 2 可以理解，(上、下)三角形行列式的值恒等于其主对角线元素的乘积。

为了讨论行列式的性质，我们引入转置行列式的概念。先以二阶行列式为例，设