



随机引论

吴昭景 编著



科学出版社

随 机 引 论

吴昭景 编著



科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书共分五章. 第1章为测度论基础, 讲解可测空间、测度空间、可测函数、积分和乘积空间. 第2章为概率论基础, 包括数学期望、条件数学期望、乘积空间的概率测度和独立随机变量序列. 第3章为随机过程, 首先讲解随机过程的构造和性质, 然后是研究随机过程的重要工具: 停时与鞅论, 最后是若干重要随机过程. 第4章为随机微分方程, 包括 Itô 积分的定义与性质, 随机微分方程解的存在性和唯一性及平凡解的稳定性理论. 第5章为随机系统的建模与模拟. 借助于随机过程的谱分析工具, 深刻理解一般白噪声与有限带宽白噪声、白噪声与 Wiener 过程, 以及随机微分方程数学建模与物理可实现的关系.

本书可作为讲授概率论与随机过程的研究生教材, 也可作为高等院校控制理论及其他相近专业研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机引论/吴昭景编著. —北京: 科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-044910-8

I. ①随… II. ①吴… III. ① 随机-研究 IV. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 125334 号

责任编辑: 石 悦 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2015 年 9 月第二次印刷 印张: 15

字数: 302 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

由于数学和计算机技术的广泛应用, 控制理论的许多分支越来越趋于完善. 相对于确定性情形, 随机控制理论的发展还比较缓慢, 尤其是随机非线性系统与控制方面的成果还比较少, 非线性控制理论向随机情形的拓广是控制理论研究的热点, 也是难点. 熟悉了控制理论的研究生, 要研究随机控制, 需要首先了解一般随机系统的常见稳定性. 读懂稳定性要有一定的随机微分方程理论方面的知识. 学习随机微分方程要先看随机过程, 而随机过程依赖于概率论. 仅有大学所学的直观概率论是无法胜任的, 所以我们要了解随机过程和随机稳定性必须从测度论开始.

有许多经典的文献可供参考, 例如, 测度论可参考文献 [2],[6],[32], 概率论可参考文献 [1],[34], 随机过程理论可参考文献 [5],[9],[15],[29],[31], 随机微分方程理论可参考文献 [4],[14], 随机微稳定性理论可参考文献 [8],[10],[11],[13]. 系统学习这些随机课程, 往往需要数年的时间. 而非概率论方向的学生, 则希望通过较短时间的学习, 能够阅读本领域内随机方面的相关文献. 如何从浩繁的文献中挑选出所需要的内容, 有针对性又不失系统性地进行学习, 成为快速入门的关键. 为此出现了较为综合的文献, 如文献 [7],[23],[30],[35],[37], 这些书综合了除随机稳定性之外的内容, 可以部分地克服体例不一的困难. 这些教程还需要和随机稳定性方面的最近文献结合, 才能全面了解最近的发展. 考虑到控制论方向的研究生往往仅有直观概率论基础, 本书选取了学习随机稳定性理论所需各门课程的核心内容, 按循序渐进、从基础到前沿的方式详尽讲解. 涵盖了测度论、概率论、随机过程一般理论、停时、鞅论、随机积分、随机微分方程、随机稳定性理论、随机建模与仿真等多个分支. 内容基本自封, 可减轻读者大量查阅文献之苦.

第 1 章内容是测度论基础. 作为全书的起点, 首先给出三套等价的逻辑体系. 证明就是使人相信, 要从原有的熟悉的逻辑中, 进入并接受陌生的逻辑体系. 开闭区间的相互表示可以归纳为“含等则交”的原则, 可用于可数集合的确界、极限的可测性的研究. 通过归纳集合运算的封闭性, 给出 σ 域的几十种等价性的定义. 函数的原像具有“穿墙功能”(可以穿过交、并、补、复合、 σ 域、属于、包含等). 测度的扩张, 伴随着空间的缩放. 典型化方法用于构造可测函数, 表明可测函数和离散函数差不多, 其实可测函数和连续函数也差不多. 可测函数对测度的积分满足线性性质, 与极限换序则需要较弱的条件. 可测函数的收敛性质构成一个四边形关系.

第 2 章是概率论基础. 函数和测度关于 Lebesgue 测度的光滑性, 都可用绝对连续性表示, 可证明密度函数是分布函数的导数, 也是分布测度的导数, 可用于定

义连续型随机变量. 随机序列的收敛性包括一个三角形关系 (a.s. 收敛、依概率收敛和均方收敛) 和一个四边形关系 (均方收敛、绝对连续、一致可积和范数收敛). 条件期望是诸如停时、鞅论、Markov 性、随机积分等后续内容的关键, 我们从初等的条件概率出发, 引入关于子 σ 域的条件期望. 关于事件的条件概率、关于子 σ 域的条件概率都是条件数学期望的特例, 而各种正则条件概率 (包括关于事件的、关于子 σ 域的和关于函数给定值的) 都是作了等价变换的条件概率. Kolmogorov 定理说明, 一维空间的概率可以嵌入二维空间中, 有限维空间的概率可以嵌入可列维空间中, 可列维空间的概率可以嵌入不可数维空间中, 这就是概率空间的相容性问题, 可以说明乘积空间的概率是一维空间概率的乘积.

第 3 章是随机过程. 可测性考虑随机过程对样本点的依赖性质、按对时间的一致性分为 Borel 可测性、适应性和循序可测性. 连续性是考虑随机过程对时间的依赖性质, 按对样本点的一致性可分为样本连续、a.s. 连续、依概率连续, 此外还有 (依概率) 不连续. 可分性是将不可列时间区间 $[0, T]$ 上的随机过程的性质 (可测性、有界性、收敛性) 转化到可列空间 $[0, T] \cap \mathbb{Q}$ 上进行研究的工具. 给出可分性的九个等价性定义, 统一文献中不同的提法. 随机过程的连续性、可测性和可分性可以相互转化.

停时是与时间同量纲且与时俱进的随机变量. 将时间推广为停时的同时, 将滤波推广为停时前事件域, 停时关于停时前事件域也是与时俱进的. 随机区间也是与时俱进的, 这体现在它的循序可测性上, 完美地实现了时空的转换, 将随机过程的空间约束化为时间约束. 将这种约束以时间的形式代入数学期望、概率或随机积分的运算中.

鞅论研究随机过程的上升或下降的平均趋势, 相当于确定性函数单调性的推广. 对上鞅而言, 它的条件期望是递减的, 在时间区间上的统计性质, 往往可通过它的末端的数学期望表述, 由此得到上穿不等式和确界不等式. 鞅列的收敛定理是单调有界定理的推广. 一般 (或有界或控制) 鞅停时定理, 表明它的鞅性适用于停时.

独立增量过程和 Markov 过程本身是重要的随机过程, 更是分析 Wiener 过程的工具. Wiener 过程是随机游走运动的数学抽象, 样本函数是连续的, 增量具有鞅性, 增量的方差与时间差成正比.

第 4 章是随机微分方程. 可积简单函数的示性函数是关于时间区间的完全分割, 而简单函数在每个时间区间上取左端点的值. 它对 Wiener 过程的 Itô 积分非常直观, 相当于每个分块的底长取 Wiener 过程的增量. 随机游走的两个微观假设, 作为遗传基因, 决定了 Wiener 过程的鞅性及其线性增量方差, 在 Itô 积分中外化为鞅性和等距公式. 借助于割圆术的思想, 一般可积函数的 Itô 积分是简单函数积分列的极限.

Itô 过程包括初始值、偏移项和扩散项, 可以简写为微分表达式: $dx(t) = f(t)dt +$

$g(t)dW_t$. 根据 Taylor 公式, 可以导出复合函数的 (微) 积分公式, 这就是 Itô 公式. 与确定情形的链式法则相比, 多了一个二阶 Hessian 项: $\frac{1}{2}\text{Tr}\left(g^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g\right)$, 这是由于 dW_t 的二阶项变成了 dt 的一阶项 (等距公式), 而 Taylor 展式中的其他二阶项都被忽略.

讨论随机微分方程的解的存在和唯一性时, 总假定转移系数和扩散系数在原点处是有界的. 全局 lipschitz 条件保证全局解, 局部 lipschitz 条件保证最大解. 局部 lipschitz 条件要得到全局解, 需要 Lyapunov 函数 (理解为能量函数) 的平均增长不超过指数函数.

非线性系统平衡点的稳定性理论大致经历了三个阶段: Lyapunov 判据、LaSalle 不变集原理和 Barbalat 引理. 根据 Lyapunov 判据, 导数半负定时, 平衡点是稳定的, 导数负定时, 平衡点是渐近稳定的. LaSalle 不变集理论仅适用于非时变系统, 指出当导数半负定时, 系统的解收敛于系统的 LaSalle 不变集. 若不变集仅含平衡点, 则平衡点是渐近稳定的. Barbalat 引理表明一致连续的绝对可积函数趋于零, 可用于证明一般系统 (包括时变系统) 的部分状态收敛于零, 在自适应控制中有广泛应用.

关于随机非线性系统平衡点的渐近稳定性, 基于不可达性和常返性, 文献 [8] 给出关于稳定性、渐近稳定性、一致稳定性和全局稳定性的 Lyapunov 判据, 要求 Lyapunov 函数及其无穷小算子满足相应条件. 基于线性增长条件和局部 Lipschitz 条件, Mao 给出了一种随机的 LaSalle 型不变集原理^[12]. 基于局部 Lipschitz 条件, Deng 和 Krstic 则给出了 LaSalle 型不变集原理^[3]. 本书进一步改进了文献 [20], [21] 的方法, 在一致连续和绝对可积的条件下, 给出随机 Barbalat 引理, 用于证明随机过程几乎确定收敛到原点. 它适用于对多种微分方程的渐近性分析. 利用随机 Barbalat 引理, 在局部 lipschitz 条件下, 证明了随机全局渐近稳定性的 LaSalle 型不变集原理.

第 5 章是随机系统的建模与模拟. 平稳过程是对具有稳定统计性质的随机过程的数学抽象, 分为严平稳和宽平稳过程, 在工程与控制中有广泛的应用.

白噪声是协方差函数等于 δ 函数的严平稳过程. 熟悉它的变形是随机建模、控制与仿真的关键. 在物理上, 它是不可实现的, 在计算机仿真时, 需要用可实现的有限带宽白噪声代替. 在数学上, 将其视为 Wiener 过程的形式导数, 可以从物理模型得到 Itô 随机微分方程, 我们有很好的数学工具来分析它. 由于对形式导数的理解的不同, 物理学家更倾向于建立 Stratonovich 随机微分方程, 因为它保持了直观的链式法则.

为了方便读者自学, 本书对较高要求的部分内容加注了 * 号. 初次阅读时可以跳过这部分内容, 基本不影响理论的完整性. 建议有了一定基础后再精读带 * 号的

内容. 本书可以作为讲授概率论与随机过程的研究生教材, 也可作为高等院校控制理论及其他相近专业研究生的参考书, 同时也可作为从事随机控制理论研究的科技工作者的参考资料.

感谢家人在本书编写过程中的支持, 感谢导师张嗣瀛院士、解学军教授在非线性系统理论和随机控制方向对我的指导和帮助, 感谢石碰教授、夏元清教授、於鑫博士、李武全博士等在随机稳定性与控制研究中的合作. 感谢王炳章教授、程建刚教授在测度论和概率论方面的深刻讨论. 感谢吕文博士在随机过程与随机分析方面的深入探讨. 感谢我的学生杨君博士、崔明月博士、刘永慧博士、张会博士、张典峰博士等在试用期间的反馈信息. 感谢国家自然科学基金 (NO: 61273128) 对本书的资助和科学出版社石悦编辑在本书出版过程中给予的帮助.

本书基于作者自学随机过程的资料, 结合研究随机稳定性时对随机过程的体会心得, 并考虑研究生教学的实际需要, 经数年编写而成. 作者近年在随机系统理论的科研教学, 得益于本书的构思, 也促进了本书的编写. 虽不断调整, 鉴于作者才疏学浅, 不妥之处在所难免, 欢迎各位同仁与朋友批评指正.

吴昭景

2015 年 5 月 10 日于烟台大学

目 录

第 1 章 测度论基础	1
1.1 可测空间	1
1.1.1 集合与函数	1
1.1.2 集合系	5
1.1.3 集合系的生成	8
1.1.4 可测空间的生成	10
1.1.5 开集, 闭集与 Borel 集	12
1.2 测度空间	14
1.2.1 测度的定义与性质	14
1.2.2 外测度	20
1.2.3 测度的扩张	23
1.2.4 Lebesgue-Stieljes 测度和 Lebesgue 测度	26
1.3 可测函数	28
1.3.1 可测函数的定义与性质	28
1.3.2 可测函数序列的收敛性	37
1.3.3 Lebesgue 可测函数 *	40
1.4 关于测度的积分	41
1.4.1 非负简单函数的积分	41
1.4.2 非负可测函数的积分	42
1.4.3 一般可测函数的积分	43
1.4.4 积分的性质	45
1.4.5 $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 空间	51
1.5 符号测度	57
1.5.1 分解定理	57
1.5.2 Radon-Nikodym 导数	58
1.6 乘积空间	62
1.6.1 有限维乘积空间	62
1.6.2 可列维乘积空间 *	69
1.6.3 任意无穷维乘积空间 *	70

第 2 章 概率论基础	74
2.1 从测度论到概率论	74
2.1.1 概率论中的基本概念	74
2.1.2 分布函数	75
2.1.3 从分布函数到概率测度	75
2.1.4 Lebesgue-Stieljes 积分	77
2.1.5 随机变量的分类 *	77
2.2 数学期望	78
2.2.1 数学期望的性质	78
2.2.2 一致可积	81
2.2.3 随机序列的收敛性	83
2.3 条件期望	86
2.3.1 初等情形 *	86
2.3.2 一般情形	89
2.3.3 正则条件概率 *	93
2.3.4 关于 X 的给定值的情形 *	98
2.4 乘积空间的概率测度 *	101
2.4.1 可列维乘积空间的概率构造	101
2.4.2 Kolmogorov 定理	105
2.5 独立随机变量序列	107
2.5.1 独立性	107
2.5.2 0-1 律	110
2.5.3 独立随机变量序列的部分和	111
2.5.4 独立随机变量的级数 *	112
2.5.5 特征函数 *	115
第 3 章 随机过程	117
3.1 随机过程的定义与构造	117
3.2 随机过程的性质	120
3.2.1 可测性	120
3.2.2 连续性	121
3.2.3 可分性	123
3.2.4 可测, 连续与可分的关系 *	126
3.3 停时	131
3.3.1 停时 τ 的定义	131
3.3.2 τ 前 σ 域	133

3.3.3 随机区间与首遇时	137
3.4 鞅论	139
3.4.1 鞅	139
3.4.2 鞅列	141
3.4.3 连续参数的鞅	150
3.5 一些常用的随机过程	157
3.5.1 独立增量过程	157
3.5.2 Markov 过程	160
3.5.3 Wiener 过程	165
第 4 章 随机微分方程	168
4.1 Itô 积分	168
4.1.1 Itô 积分的定义	168
4.1.2 Itô 公式	173
4.1.3 Itô 积分的鞅不等式 *	178
4.2 随机微分方程的解	180
4.2.1 解的定义	180
4.2.2 Lipschitz 条件	181
4.2.3 局部 Lipschitz 条件	185
4.2.4 解过程的 Markov 性质	189
4.3 随机稳定性	191
4.3.1 随机稳定性的定义	191
4.3.2 可积性与一致连续性	191
4.3.3 随机 Barbalat 引理	193
4.3.4 扩散过程的 Barbalat 引理	195
4.3.5 随机 LaSalle 型定理	198
第 5 章 随机系统的建模与模拟 *	200
5.1 平稳过程的定义	200
5.1.1 严平稳过程	200
5.1.2 二阶矩过程	200
5.1.3 宽平稳过程	201
5.1.4 正态过程	201
5.2 平稳过程的谱分析	202
5.2.1 平稳过程的谱分解	202
5.2.2 白噪声	203
5.2.3 平稳过程通过线性系统的分析	203

5.2.4 利用 Matlab 生成宽平稳过程	206
5.3 从白噪声到随机微分方程	207
5.3.1 广义 Wiener 过程	206
5.3.2 Itô 积分与 Stratonovich 积分	209
5.3.3 随机系统的建模与仿真	211
附录 A 矩阵范数与卷积 *	212
A.1 矩阵范数	212
A.2 卷积	213
附录 B 积分变换与谱分析 *	215
B.1 Fourier 变换与频谱分解	215
B.1.1 普通周期函数的 Fourier 级数	215
B.1.2 普通时间函数的 Fourier 变换	216
B.1.3 普通时间函数的频谱与能谱的概念	216
B.1.4 Fourier 变换的性质	217
B.2 Laplace 变换	219
B.3 线性系统的谱分析	220
B.3.1 系统的脉冲响应	220
B.3.2 系统的频率响应	221
B.3.3 系统的谱	222
参考文献	223
索引	225

插图目录

1.1	集合基本属性的递推关系	6
1.2	集合系间的映射	25
1.3	测度的变换	50
1.4	测度论中的各种收敛关系	57
1.5	二维乘积空间	63
2.1	积分变换	79
2.2	凹函数	80
2.3	概率论中随机序列的收敛关系	85
2.4	函数关于函数的条件期望	92
2.5	事件关于函数的条件概率	93
2.6	$\mathcal{F}_2$ 关于 $\mathcal{F}_1$ 的正则条件概率	94
2.7	$\mathcal{F}_2$ 关于 X 的正则条件概率	95
2.8	Y 关于 X 的正则条件分布	98
3.1	随机过程的可测性、可分性与连续性	131
3.2	下鞅列的收敛	148
4.1	从随机游走到 Itô 公式	178
5.1	随机系统的建模与仿真	211

第1章 测度论基础

测度论是研究一般集合上的测度和积分的理论,是现代分析数学中重要工具之一.本章讲述测度论的基础知识.对数学分析中的 Riemann 积分 (R 积分)

$$\int_a^b f(x)dx$$

作了全方位的推广:将积分区间推广到可测空间,可积函数推广到可测函数,长度推广到测度,最后合而为一,将积分推广到对测度的积分

$$\int_A X(\omega)\mu(d\omega).$$

在可测空间中,由全集的部分子集组成的集合系,对可列个交、并、补运算封闭,构成 σ 域.函数的可测性表示因变量对自变量的依赖性,对四则运算、确界和极限封闭.可测函数的一般性表现在,它与离散函数和连续函数都“差不多”,因而是二者的统一.基于“割圆术”与“典型化方法”,引进了对测度积分,使得可测函数都可积(除非无穷减无穷),同时使得积分与极限换序变得简便易行. L_P 空间理论为泛函分析提供了经典的赋范空间与 Banach 空间的范例.最后对导数和重积分的推广导致了 Radon-Nikodgm(R-N) 导数和乘积空间,是条件期望和随机过程定义的理论依据.

总之,测度论是 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论的进一步抽象和发展,是实变函数论、概率论和随机分析等现代分析数学的基础.本章以文献 [23] 为蓝本,主要参考了文献 [35],[37].

1.1 可测空间

1.1.1 集合与函数

1. 集合的运算

读者应熟知集合的“交”“并”“补”运算和“包含”关系,以及与之相应事件的“与”“或”“非”逻辑和“充要”条件.并了解下标的“任给”“存在”的描述方式和它们的“否定”形式.这三套等价的逻辑(或语言)体系贯穿于本书的各种定义、命题和证明中.

对于 A 与 B , 称 $A \setminus B := \{\omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$ 为 A 与 B 的差, 而当 $A \supset B$ 时, 称 $A \setminus B$ 为 A 与 B 的真差. 测度论中经常涉及集合的无限次 (可数或不可数) 运算. 对于并与交运算有以下定义.

定义 1.1.1 $\bigcup_{t \in T} A_t = \{\omega : \exists t \in T, \omega \in A_t\}, \bigcap_{t \in T} A_t = \{\omega : \forall t \in T, \omega \in A_t\}.$

由此定义可验证如下结论.

定理 1.1.1 (De-Morgan 定理) $\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^C = \bigcap_{t \in T} A_t^C, \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)^C = \bigcup_{t \in T} A_t^C.$

利用集合的运算, 给出集合极限的定义.

定义 1.1.2 设 $(A_1, A_2, \dots)$ 是一个集列, 如果对每个 $n = 1, 2, \dots$, 有 $A_n \subset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 为非降, 记作 $A_n \uparrow$, 并有 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 如果对每个 $n = 1, 2, \dots$, 有 $A_n \supset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 为非升, 记作 $A_n \downarrow$, 并有 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

定义 1.1.3 集列 $\{A_n\}$ 的上、下极限分别为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

根据表 1.1, 可以得到上、下极限等价的表述:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left\{ \omega : \forall n \geq 1, \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right\} \\ &= \left\{ \omega : \forall n \geq 1, \exists k \geq n, \omega \in A_k \right\} = \left\{ \omega : \omega \in \text{无限多个 } A_n \right\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \left\{ \omega : \exists n \geq 1, \omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right\} \\ &= \left\{ \omega : \exists n \geq 1, \forall k \geq n, \omega \in A_k \right\} = \left\{ \omega : \omega \in \text{几乎所有的 } A_n \right\}. \end{aligned}$$

表 1.1 集合、事件、下 (上) 标的对应关系

集合	事件	下 (上) 标
A_i	$\omega \in A_i$, 称 A_i 发生	下标 i
交 $\cap$	与 (and)	任给 $\forall$
并 $\cup$	或 (or)	存在 $\exists$
补 A_i^C	非 (no)	否定
含于 $A \subset B$	充分 $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$	
包含 $A \supset B$	必要 $\omega \in A \Leftarrow \omega \in B$	

定义 1.1.4 对于集列 $\{A_n\}$, 如果 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则认为集列 $\{A_n\}$ 的极限存在, 并把

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

称为它的极限.

作为集合, 开闭区间可以相互表示.

命题 1.1.2 (1) $[a, \infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a - 1/k, \infty)$, $(a, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a + 1/k, \infty)$;

(2) $(-\infty, a] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/k)$, $(-\infty, a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-\infty, a - 1/k]$.

注 1.1.1 当然也有同类集合间的表示, 如 $[a, \infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a - 1/k, \infty)$, $(a, \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a + 1/k, \infty)$, 实际上以上诸区间端点 $a \pm 1/k$ 可有可无.

注 1.1.2 大于等于 a 的情形对应于大于 $a - 1/k$ 的交运算, 可称之为“含等则外交”, 同样对于不含等于的情形有“不等则内并”的规律.

2. 用函数表示的集合

数学分析中的映射表示点与点之间的对应关系, 给定映射 $X(\cdot) : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$, 则 $\forall \omega \in \Omega, \exists \bar{\omega} \in \bar{\Omega}$, 使得 $\bar{\omega} = X(\omega)$ 成立. 而在集合论中, 映射还用来表示点集与点集间的对应关系.

定义 1.1.5 在映射下的原像: 集合 $B \subset \bar{\Omega}$ 在 X 下的原像

$$X^{-1}B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

为了便于讨论, 本书假定 $\bar{\Omega} = X(\Omega)$. 首先给出原像的性质.

命题 1.1.3 取原像的运算具有“穿墙功能”:

(1) $X^{-1}\bar{\Omega} = \Omega; X^{-1}\emptyset = \emptyset$;

(2) $B_1 \subset B_2 \implies X^{-1}B_1 \subset X^{-1}B_2, \forall B_1, B_2 \in \bar{\Omega}$;

(3) $X^{-1}B^C = (X^{-1}B)^C, \forall B \subset \bar{\Omega}$;

(4) $X^{-1} \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} X^{-1}A_t, \forall A_t \subset \bar{\Omega}, t \in T$;

(5) $X^{-1} \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} X^{-1}A_t, \forall A_t \subset \bar{\Omega}, t \in T$.

这种“穿墙功能”是指像空间的集合运算被保留到原像空间. 结合命题 1.1.2 和命题 1.1.3, 则有关于函数的“含等则外交”的结论.

命题 1.1.4 对于 Ω 上的函数 X 和任意的 $a \in \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned} \{X \geq a\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X > a - 1/k\}, \quad \{X > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \geq a + 1/k\}, \\ \{X \leq a\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X < a + 1/k\}, \quad \{X < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \leq a - 1/k\}. \end{aligned}$$

证明 $\{X \geq a\} = X^{-1}[a, \infty) = X^{-1} \bigcap_{k=1}^{\infty} (a - 1/k, \infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X > a - 1/k\}$.

其余作为练习. □

关于函数确界有如下“含等则外交”的结论.

命题 1.1.5 对于 Ω 上的函数 X 和任意的 $a \in \mathbf{R}$, 有

- (1) $\left\{ \inf_n X_n \geq a \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \geq a\};$
- (2) $\left\{ \sup_n X_n \leq a \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq a\};$
- (3) $\left\{ \inf_n X_n < a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < a\};$
- (4) $\left\{ \sup_n X_n > a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n > a\};$
- (5) $\left\{ \inf_n X_n \leq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n < a + 1/k\};$
- (6) $\left\{ \sup_n X_n \geq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n > a - 1/k\};$
- (7) $\left\{ \inf_n X_n > a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \geq a + 1/k\};$
- (8) $\left\{ \sup_n X_n < a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq a - 1/k\}.$

证明 (1) 和 (2) 由函数确界的定义易得. 由 (1) 和 (2) 根据 de Morgan 定理 1.1.1 知 (3) 和 (4) 成立. 再结合命题 1.1.4, 可以推出 (5) 和 (6). 再由 (5) 和 (6) 根据 de Morgan 定理知 (7) 和 (8) 成立. □

函数列的上下极限定义: $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{n \geq 1} \left(\sup_{k \geq n} X_k \right)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{k \geq n} X_k \right)$.

由以上确界的性质可以得到上、下极限 (“含等则外交”) 的性质.

命题 1.1.6 关于函数的极限和集合的极限有以下关系:

- (1) $\left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \geq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m \geq a - 1/k\};$
- (2) $\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m \leq a + 1/k\};$

$$(3) \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \leq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \leq a + 1/k\};$$

$$(4) \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \geq a \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \geq a - 1/k\};$$

$$(5) \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m < a - 1/k\};$$

$$(6) \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m > a + 1/k\};$$

$$(7) \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n > a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m > a + 1/k\};$$

$$(8) \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < a \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m < a - 1/k\}.$$

证明 推导如下.

$$\begin{aligned} (3) \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \leq a \right\} &= \left\{ \sup_{n \geq 1} \left(\inf_{m \geq n} X_m \right) \leq a \right\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\inf_{m \geq n} X_m \right) \leq a \right\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \leq a + 1/k\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \leq a + 1/k\}. \end{aligned}$$

其余留作练习, 其中 (5)—(8) 可由 de-Morgan 定理得. $\square$

注 1.1.3 由注 1.1.1 知, 命题 1.1.4—命题 1.1.6 中的含 $1/k$ 的不等式中的等号可有可无.

在研究收敛性时, 经常用到以下关系:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right\} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \leq 0 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \leq 1/k\}.$$

这实际上就是数学分析中极限的定义. 同样地, 也可考察 Cauchy 收敛准则的集合表示:

$$\begin{aligned} &\{X_{n+m} - X_n \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)\} \\ &= \{\forall k \geq 1, \exists n \geq 1, \forall m \geq 1, |X_n - X_{n+m}| \leq 1/k\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \{|X_n - X_{n+m}| \leq 1/k\}. \end{aligned}$$

1.1.2 集合系

1. 集合系的定义

非空全集记作 Ω , 按某规则 (或研究兴趣) $\mathbb{E}$, 取 Ω 的子集 Ω_i , 以 Ω_i 为元素, 组