随机引论

吴昭景　编著

科学出版社

随 机 引 论

吴昭景 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书共分五章. 第1章为测度论基础, 讲解可测空间、测度空间、可测函数、积分和乘积空间. 第2章为概率论基础, 包括数学期望、条件数学期望、乘积空间的概率测度和独立随机变量序列. 第3章为随机过程, 首先讲解随机过程的构造和性质, 然后是研究随机过程的重要工具: 停时与鞅论, 最后是若干重要随机过程. 第4章为随机微分方程, 包括Itô积分的定义与性质, 随机微分方程解的存在性和唯一性及平凡解的稳定性理论. 第5章为随机系统的建模与模拟. 借助于随机过程的谱分析工具, 深刻理解一般白噪声与有限带宽白噪声、白噪声与Wiener过程, 以及随机微分方程数学建模与物理可实现的关系.

本书可作为讲授概率论与随机过程的研究生教材, 也可作为高等院校控制理论及其他相近专业研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机引论/吴昭景编著. —北京：科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-044910-8

I. ①随… II. ①吴… III. ① 随机–研究 IV. ①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2015) 第125334号

责任编辑: 石 悦 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年6月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2015年9月第二次印刷 印张: 15

字数: 302 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

由于数学和计算机技术的广泛应用, 控制理论的许多分支越来越趋于完善. 相对于确定性情形, 随机控制理论的发展还比较缓慢, 尤其是随机非线性系统与控制方面的成果还比较少, 非线性控制理论向随机情形的拓广是控制理论研究的热点, 也是难点. 熟悉了控制理论的研究生, 要研究随机控制, 需要首先了解一般随机系统的常见稳定性. 读懂稳定性要有一定的随机微分方程理论方面的知识. 学习随机微分方程要先看随机过程, 而随机过程依赖于概率论. 仅有大学所学的直观概率论是无法胜任的, 所以我们要了解随机过程和随机稳定性必须从测度论开始.

有许多经典的文献可供参考, 例如, 测度论可参考文献 [2],[6],[32], 概率论可参考文献 [1],[34], 随机过程理论可参考文献 [5],[9],[15],[29],[31], 随机微分方程理论可参考文献 [4],[14], 随机微稳定性理论可参考文献 [8],[10],[11],[13]. 系统学习这些随机课程, 往往需要数年的时间. 而非概率论方向的学生, 则希望通过较短时间的学习, 能够阅读本领域内随机方面的相关文献. 如何从浩繁的文献中挑选出所需要的内容, 有针对性又不失系统性地进行学习, 成为快速入门的关键. 为此出现了较为综合的文献, 如文献 [7],[23],[30],[35],[37], 这些书综合了除随机稳定性之外的内容, 可以部分地克服体例不一的困难. 这些教程还需要和随机稳定性方面的最近文献结合, 才能全面了解最近的发展. 考虑到控制论方向的研究生往往仅有直观概率论基础, 本书选取了学习随机稳定性理论所需各门课程的核心内容, 按循序渐进、从基础到前沿的方式详尽讲解. 涵盖了测度论、概率论、随机过程一般理论、停时、鞅论、随机积分、随机微分方程、随机稳定性理论、随机建模与仿真等多个分支. 内容基本自封, 可减轻读者大量查阅文献之苦.

第 1 章内容是测度论基础. 作为全书的起点, 首先给出三套等价的逻辑体系. 证明就是使人相信, 要从原有的熟悉的逻辑中, 进入并接受陌生的逻辑体系. 开闭区间的相互表示可以归纳为“含等则交”的原则, 可用于可数集合的确界、极限的可测性的研究. 通过归纳集合运算的封闭性, 给出 σ 域的几十种等价性的定义. 函数的原像具有“穿墙功能”(可以穿过交、并、补、复合、σ 域、属于、包含等). 测度的扩张, 伴随着空间的缩放. 典型化方法用于构造可测函数, 表明可测函数和离散函数差不多, 其实可测函数和连续函数也差不多. 可测函数对测度的积分满足线性性质, 与极限换序则需要较弱的条件. 可测函数的收敛性质构成一个四边形关系.

第 2 章是概率论基础. 函数和测度关于 Lebesgue 测度的光滑性, 都可用绝对连续性表示, 可证明密度函数是分布函数的导数, 也是分布测度的导数, 可用于定

义连续型随机变量. 随机序列的收敛性包括一个三角形关系 (a.s. 收敛、依概率收敛和均方收敛) 和一个四边形关系 (均方收敛、绝对连续、一致可积和范数收敛). 条件期望是诸如停时、鞅论、Markov 性、随机积分等后续内容的关键, 我们从初等的条件概率出发, 引入关于子 σ 域的条件期望. 关于事件的条件概率、关于子 σ 域的条件概率都是条件数学期望的特例, 而各种正则条件概率 (包括关于事件的、关于子 σ 域的和关于函数给定值的) 都是作了等价变换的条件概率. Kolmogorov 定理说明, 一维空间的概率可以嵌入二维空间中, 有限维空间的概率可以嵌入可列维空间中, 可列维空间的概率可以嵌入不可数维空间中, 这就是概率空间的相容性问题, 可以说明乘积空间的概率是一维空间概率的乘积.

第 3 章是随机过程. 可测性考虑随机过程对样本点的依赖性质、按对时间的一致性分为 Borel 可测性、适应性和循序可测性. 连续性是考虑随机过程对时间的依赖性质, 按对样本点的一致性可分为样本连续、a.s. 连续、依概率连续, 此外还有 (依概率) 不连续. 可分性是将不可列时间区间 $[0,T]$ 上的随机过程的性质 (可测性、有界性、收敛性) 转化到可列空间 $[0,T]\cap\mathbf{Q}$ 上进行研究的工具. 给出可分性的九个等价性定义, 统一文献中不同的提法. 随机过程的连续性、可测性和可分性可以相互转化.

停时是与时间同量纲且与时俱进的随机变量. 将时间推广为停时的同时, 将滤波推广为停时前事件域, 停时关于停时前事件域也是与时俱进的. 随机区间也是与时俱进的, 这体现在它的循序可测性上, 完美地实现了时空的转换, 将随机过程的空间约束化为时间约束. 将这种约束以时间的形式代入数学期望、概率或随机积分的运算中.

鞅论研究随机过程的上升或下降的平均趋势, 相当于确定性函数单调性的推广. 对上鞅而言, 它的条件期望是递减的, 在时间区间上的统计性质, 往往可通过它的末端的数学期望表述, 由此得到上穿不等式和确界不等式. 鞅列的收敛定理是单调有界定理的推广. 一般 (或有界或控制) 鞅停时定理, 表明它的鞅性适用于停时.

独立增量过程和 Markov 过程本身是重要的随机过程, 更是分析 Wiener 过程的工具. Wiener 过程是随机游走运动的数学抽象, 样本函数是连续的, 增量具有鞅性, 增量的方差与时间差成正比.

第 4 章是随机微分方程. 可积简单函数的示性函数是关于时间区间的完全分割, 而简单函数在每个时间区间上取左端点的值. 它对 Wiener 过程的 Itô 积分非常直观, 相当于每个分块的底长取 Wiener 过程的增量. 随机游走的两个微观假设, 作为遗传基因, 决定了 Wiener 过程的鞅性及其线性增量方差, 在 Itô 积分中外化为鞅性和等距公式. 借助于割圆术的思想, 一般可积函数的 Itô 积分是简单函数积分列的极限.

Itô 过程包括初始值、偏移项和扩散项, 可以简写为微分表达式: $\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+$

$g(t)\mathrm{d}W_t$. 根据 Taylor 公式, 可以导出复合函数的 (微) 积分公式, 这就是 Itô 公式. 与确定情形的链式法则相比, 多了一个二阶 Hessian 项: $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(g^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}g\right)$, 这是由于 $\mathrm{d}W_t$ 的二阶项变成了 $\mathrm{d}t$ 的一阶项 (等距公式), 而 Taylor 展式中的其他二阶项都被忽略.

讨论随机微分方程的解的存在和唯一性时, 总假定转移系数和扩散系数在原点处是有界的. 全局 lipschitz 条件保证全局解, 局部 lipschitz 条件保证最大解. 局部 lipschitz 条件要得到全局解, 需要 Lyapunov 函数 (理解为能量函数) 的平均增长不超过指数函数.

非线性系统平衡点的稳定性理论大致经历了三个阶段: Lyapunov 判据、LaSalle 不变集原理和 Barbalat 引理. 根据 Lyapunov 判据, 导数半负定时, 平衡点是稳定的, 导数负定时, 平衡点是渐近稳定的. LaSalle 不变集理论仅适用于非时变系统, 指出当导数半负定时, 系统的解收敛于系统的 LaSalle 不变集. 若不变集仅含平衡点, 则平衡点是渐近稳定的. Barbalat 引理表明一致连续的绝对可积函数趋于零, 可用于证明一般系统 (包括时变系统) 的部分状态收敛于零, 在自适应控制中有广泛应用.

关于随机非线性系统平衡点的渐近稳定性, 基于不可达性和常返性, 文献 [8] 给出关于稳定性、渐近稳定性、一致稳定性和全局稳定性的 Lyapunov 判据, 要求 Lyapunov 函数及其无穷小算子满足相应条件. 基于线性增长条件和局部 Lipschitz 条件, Mao 给出了一种随机的 LaSalle 型不变集原理[12]. 基于局部 Lipschitz 条件, Deng 和 Krstic 则给出了 LaSalle 型不变集原理[3]. 本书进一步改进了文献 [20],[21] 的方法, 在一致连续和绝对可积的条件下, 给出随机 Barbalat 引理, 用于证明随机过程几乎确定收敛到原点. 它适用于对多种微分方程的渐近性分析. 利用随机 Barbalat 引理, 在局部 lipschitz 条件下, 证明了随机全局渐近稳定性的 LaSalle 型不变集原理.

第 5 章是随机系统的建模与模拟. 平稳过程是对具有稳定统计性质的随机过程的数学抽象, 分为严平稳和宽平稳过程, 在工程与控制中有广泛的应用.

白噪声是协方差函数等于 δ 函数的严平稳过程. 熟悉它的变形是随机建模、控制与仿真的关键. 在物理上, 它是不可实现的, 在计算机仿真时, 需要用可实现的有限带宽白噪声代替. 在数学上, 将其视为 Wiener 过程的形式导数, 可以从物理模型得到 Itô 随机微分方程, 我们有较好的数学工具来分析它. 由于对形式导数的理解的不同, 物理学家更倾向于建立 Stratonovich 随机微分方程, 因为它保持了直观的链式法则.

为了方便读者自学, 本书对较高要求的部分内容加注了 $*$ 号. 初次阅读时可以跳过这部分内容, 基本不影响理论的完整性. 建议有了一定基础后再精读带 $*$ 号的

内容. 本书可以作为讲授概率论与随机过程的研究生教材, 也可作为高等院校控制理论及其他相近专业研究生的参考书, 同时也可作为从事随机控制理论研究的科技工作者的参考资料.

感谢家人在本书编写过程中的支持, 感谢导师张嗣瀛院士、解学军教授在非线性系统理论和随机控制方向对我的指导和帮助, 感谢石碰教授、夏元清教授、於鑫博士、李武全博士等在随机稳定性与控制研究中的合作. 感谢王炳章教授、程建刚教授在测度论和概率论方面的深刻讨论. 感谢吕文博士在随机过程与随机分析方面的深入探讨. 感谢我的学生杨君博士、崔明月博士、刘永慧博士、张会博士、张典峰博士等在试用期间的反馈信息. 感谢国家自然科学基金 (NO: 61273128) 对本书的资助和科学出版社石悦编辑在本书出版过程中给予的帮助.

本书基于作者自学随机过程的资料, 结合研究随机稳定性时对随机过程的体会心得, 并考虑研究生教学的实际需要, 经数年编写而成. 作者近年在随机系统理论的科研教学, 得益于本书的构思, 也促进了本书的编写. 虽不断调整, 鉴于作者才疏学浅, 不妥之处在所难免, 欢迎各位同仁与朋友批评指正.

吴昭景
2015 年 5 月 10 日于烟台大学

目　录

插 图 目 录

第 1 章　测度论基础

测度论是研究一般集合上的测度和积分的理论, 是现代分析数学中重要工具之一. 本章讲述测度论的基础知识. 对数学分析中的 Riemann 积分 (R 积分)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

作了全方位的推广: 将积分区间推广到可测空间, 可积函数推广到可测函数, 长度推广到测度, 最后合而为一, 将积分推广到对测度的积分

$$\int_A X(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega).$$

在可测空间中, 由全集的部分子集组成的集合系, 对可列个交、并、补运算封闭, 构成 σ 域. 函数的可测性表示因变量对自变量的依赖性, 对四则运算、确界和极限封闭. 可测函数的一般性表现在, 它与离散函数和连续函数都 “差不多”, 因而是二者的统一. 基于 “割圆术” 与 “典型化方法”, 引进了对测度积分, 使得可测函数都可积 (除非无穷减无穷), 同时使得积分与极限换序变得简便易行. L_P 空间理论为泛函分析提供了经典的赋范空间与 Banach 空间的范例. 最后对导数和重积分的推广导致了 Radon-Nikodgm(R-N) 导数和乘积空间, 是条件期望和随机过程定义的理论依据.

总之, 测度论是 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论的进一步抽象和发展, 是实变函数论、概率论和随机分析等现代分析数学的基础. 本章以文献 [23] 为蓝本, 主要参考了文献 [35],[37].

1.1　可 测 空 间

1.1.1　集合与函数

1. 集合的运算

读者应熟知集合的 “交” “并” “补” 运算和 “包含” 关系, 以及与之相应事件的 “与” “或” “非” 逻辑和 “充要” 条件. 并了解下标的 “任给” “存在” 的描述方式和它们的 “否定” 形式. 这三套等价的逻辑 (或语言) 体系贯穿于本书的各种定义、命题和证明中.

对于 A 与 B, 称 $A\setminus B:=\{\omega:\omega\in A,\omega\notin B\}$ 为 A 与 B 的差, 而当 $A\supset B$ 时, 称 $A\setminus B$ 为 A 与 B 的真差. 测度论中经常涉及集合的无限次 (可数或不可数) 运算. 对于并与交运算有以下定义.

定义 1.1.1　$\bigcup\limits_{t\in T}A_t=\{\omega:\exists t\in T,\omega\in A_t\}$, $\bigcap\limits_{t\in T}A_t=\{\omega:\forall t\in T,\omega\in A_t\}$.

由此定义可验证如下结论.

定理 1.1.1(De-Morgan 定理)　$\left(\bigcup\limits_{t\in T}A_t\right)^{\mathrm{C}}=\bigcap\limits_{t\in T}A_t^{\mathrm{C}}$, $\left(\bigcap\limits_{t\in T}A_t\right)^{\mathrm{C}}=\bigcup\limits_{t\in T}A_t^{\mathrm{C}}$.

利用集合的运算, 给出集合极限的定义.

定义 1.1.2　设 $(A_1,A_2,\cdots)$ 是一个集列, 如果对每个 $n=1,2,\cdots$, 有 $A_n\subset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 为非降, 记作 $A_n\uparrow$, 并有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 如果对每个 $n=1,2,\cdots$, 有 $A_n\supset A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 为非升, 记作 $A_n\downarrow$, 并有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定义 1.1.3　集列 $\{A_n\}$ 的上、下极限分别为

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

根据表 1.1, 可以得到上、下极限等价的表述:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}A_n&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\left\{\omega:\forall n\geqslant 1,\omega\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right\}\\&=\{\omega:\forall n\geqslant 1,\exists k\geqslant n,\omega\in A_k\}=\{\omega:\omega\in \text{无限多个}A_n\},\\\liminf_{n\to\infty}A_n&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\left\{\omega:\exists n\geqslant 1,\omega\in\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right\}\\&=\{\omega:\exists n\geqslant 1,\forall k\geqslant n,\omega\in A_k\}=\{\omega:\omega\in \text{几乎所有的}A_n\}.\end{aligned}$$

表 1.1　集合、事件、下 (上) 标的对应关系

集合	事件	下 (上) 标
A_i	$\omega\in A_i$, 称 A_i 发生	下标 i
交 $\cap$	与 (and)	任给 $\forall$
并 $\cup$	或 (or)	存在 $\exists$
补 A_i^{C}	非 (no)	否定
含于 $A\subset B$	充分 $\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$	
包含　$A\supset B$	必要 $\omega\in A\Leftarrow\omega\in B$	

定义 1.1.4 对于集列 $\{A_n\}$, 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 则认为集列 $\{A_n\}$ 的极限存在, 并把

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

称为它的极限.

作为集合, 开闭区间可以相互表示.

命题 1.1.2 (1) $[a,\infty) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a-1/k,\infty), (a,\infty) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a+1/k,\infty)$;

(2) $(-\infty,a] = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (-\infty,a+1/k), (-\infty,a) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (-\infty,a-1/k]$.

注 1.1.1 当然也有同类集合间的表示, 如 $[a,\infty) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a-1/k,\infty)$, $(a,\infty) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a+1/k,\infty)$, 实际上以上诸区间端点 $a\pm 1/k$ 可有可无.

注 1.1.2 大于等于 a 的情形对应于大于 $a-1/k$ 的交运算, 可称之为"含等则外交", 同样对于不含等于的情形有"不等则内并"的规律.

2. 用函数表示的集合

数学分析中的映射表示点与点之间的对应关系, 给定映射 $X(\cdot): \Omega \to \bar{\Omega}$, 则 $\forall\omega\in\Omega, \exists\bar{\omega}\in\bar{\Omega}$, 使得 $\bar{\omega} = X(\omega)$ 成立. 而在集合论中, 映射还用来表示点集与点集间的对应关系.

定义 1.1.5 在映射下的原像: 集合 $B\subset\bar{\Omega}$ 在 X 下的原像

$$X^{-1}B = \{X\in B\} = \{\omega : X(\omega)\in B\}.$$

为了便于讨论, 本书假定 $\bar{\Omega} = X(\Omega)$. 首先给出原像的性质.

命题 1.1.3 取原像的运算具有"穿墙功能":

(1) $X^{-1}\bar{\Omega} = \Omega; X^{-1}\varnothing = \varnothing$;

(2) $B_1\subset B_2 \Longrightarrow X^{-1}B_1 \subset X^{-1}B_2, \forall B_1, B_2\in\bar{\Omega}$;

(3) $X^{-1}B^C = (X^{-1}B)^{\mathrm{C}}, \forall B\subset\bar{\Omega}$;

(4) $X^{-1}\bigcup\limits_{t\in T} A_t = \bigcup\limits_{t\in T} X^{-1}A_t, \forall A_t\subset\bar{\Omega}, t\in T$;

(5) $X^{-1}\bigcap\limits_{t\in T} A_t = \bigcap\limits_{t\in T} X^{-1}A_t, \forall A_t\subset\bar{\Omega}, t\in T$.

这种"穿墙功能"是指像空间的集合运算被保留到原像空间. 结合命题 1.1.2 和命题 1.1.3, 则有关于函数的"含等则外交"的结论.

命题 1.1.4　对于 Ω 上的函数 X 和任意的 $a \in \mathbf{R}$, 有

$$\{X \geqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X > a - 1/k\}, \quad \{X > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \geqslant a + 1/k\},$$

$$\{X \leqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X < a + 1/k\}, \quad \{X < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \leqslant a - 1/k\}.$$

证明　$\{X \geqslant a\} = X^{-1}[a, \infty) = X^{-1} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a - 1/k, \infty) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \{X > a - 1/k\}$. 其余作为练习. □

关于函数确界有如下"含等则外交"的结论.

命题 1.1.5　对于 Ω 上的函数 X 和任意的 $a \in \mathbf{R}$, 有

(1) $\left\{\inf\limits_n X_n \geqslant a\right\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n \geqslant a\}$;

(2) $\left\{\sup\limits_n X_n \leqslant a\right\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n \leqslant a\}$;

(3) $\left\{\inf\limits_n X_n < a\right\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n < a\}$;

(4) $\left\{\sup\limits_n X_n > a\right\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n > a\}$;

(5) $\left\{\inf\limits_n X_n \leqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n < a + 1/k\}$;

(6) $\left\{\sup\limits_n X_n \geqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n > a - 1/k\}$;

(7) $\left\{\inf\limits_n X_n > a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n \geqslant a + 1/k\}$;

(8) $\left\{\sup\limits_n X_n < a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{X_n \leqslant a - 1/k\}$.

证明　(1) 和 (2) 由函数确界的定义易得. 由 (1) 和 (2) 根据 de Morgan 定理 1.1.1 知 (3) 和 (4) 成立. 再结合命题 1.1.4, 可以推出 (5) 和 (6). 再由 (5) 和 (6) 根据 de Morgan 定理知 (7) 和 (8) 成立. □

函数列的上下极限定义: $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n = \inf\limits_{n\geqslant 1}\left(\sup\limits_{k\geqslant n} X_k\right)$, $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n = \sup\limits_{n\geqslant 1}\left(\inf\limits_{k\geqslant n} X_k\right)$.

由以上确界的性质可以得到上、下极限 ("含等则外交") 的性质.

命题 1.1.6　关于函数的极限和集合的极限有以下关系:

(1) $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n \geqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} \{X_m \geqslant a - 1/k\}$;

(2) $\left\{\limsup\limits_{n\to\infty} X_n \leqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} \{X_m \leqslant a + 1/k\}$;

(3) $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n \leqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m \leqslant a+1/k\}$;

(4) $\left\{\limsup\limits_{n\to\infty} X_n \geqslant a\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m \geqslant a-1/k\}$;

(5) $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n < a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m < a-1/k\}$;

(6) $\left\{\limsup\limits_{n\to\infty} X_n > a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m > a+1/k\}$;

(7) $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n > a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m > a+1/k\}$;

(8) $\left\{\limsup\limits_{n\to\infty} X_n < a\right\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\{X_m < a-1/k\}$.

证明 推导如下.

$$
\begin{aligned}
(3)\ \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leqslant a\right\} &= \left\{\sup_{n\geqslant 1}\left(\inf_{m\geqslant n} X_m\right) \leqslant a\right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\inf_{m\geqslant n} X_m\right) \leqslant a\right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m \leqslant a+1/k\} \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m \leqslant a+1/k\}.
\end{aligned}
$$

其余留作练习, 其中 (5)—(8) 可由 de-Morgan 定理得. □

注 1.1.3 由注 1.1.1 知, 命题 1.1.4— 命题 1.1.6 中的含 $1/k$ 的不等式中的等号可有可无.

在研究收敛性时, 经常用到以下关系:

$$
\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| \leqslant 0\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| \leqslant 1/k\}.
$$

这实际上就是数学分析中极限的定义. 同样地, 也可考察 Cauchy 收敛准则的集合表示:

$$
\begin{aligned}
&\{X_{n+m} - X_n \to 0(m,n\to\infty)\} \\
=&\{\forall k \geqslant 1, \exists n \geqslant 1, \forall m \geqslant 1, |X_n - X_{n+m}| \leqslant 1/k\} \\
=&\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\{|X_n - X_{n+m}| \leqslant 1/k\}.
\end{aligned}
$$

1.1.2 集合系

1. 集合系的定义

非空全集记作 Ω, 按某规则 (或研究兴趣)$\mathbb{E}$, 取 Ω 的子集 Ω_l, 以 Ω_l 为元素, 组