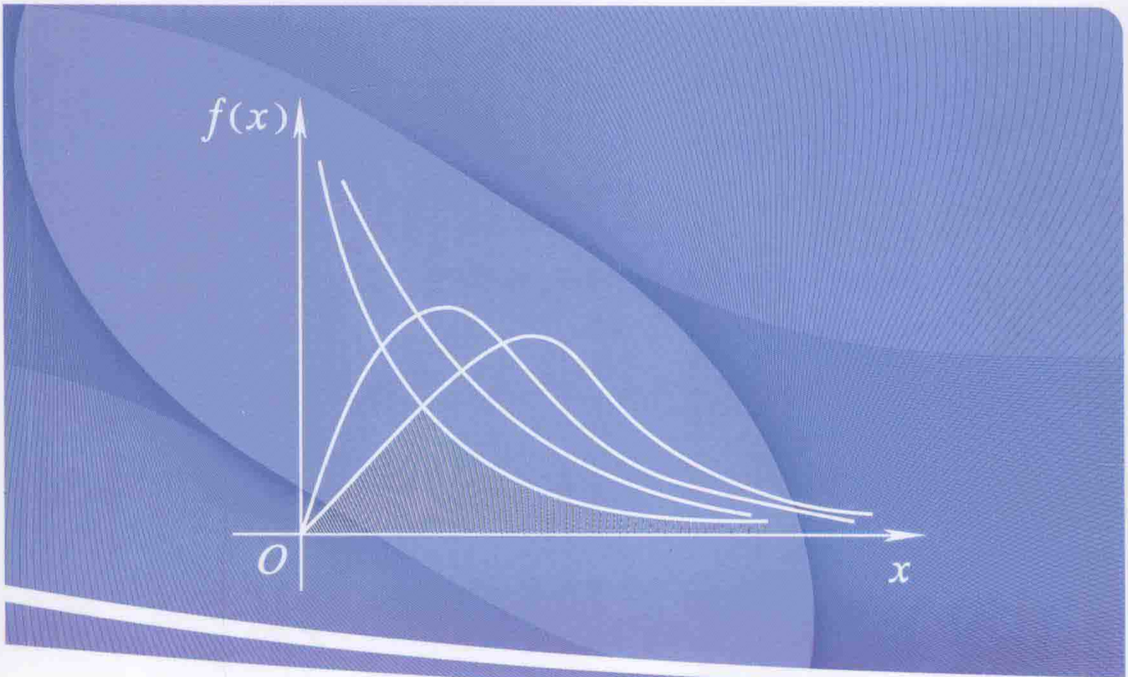
高等学校数学教材系列丛书



《概率论与数理统计》学习辅导

张卓奎　陈慧婵　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

《概率论与数理统计》
学习辅导

张卓奎　陈慧婵　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是《概率论与数理统计》(张卓奎等编著，西安电子科技大学出版社 2014 年 6 月出版)一书的配套教材，也是该书内容的扩展。本书主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

本书每章分六个部分：大纲内容与大纲要求、内容解析、重点与考点、经典题型、习题全解、学习效果测试题及解答。"大纲内容与大纲要求"部分对每章的内容和要求作了明确的描述；"内容解析"部分对每章的主要内容作了较为深入的概括；"重点与考点"部分浓缩主要内容，刻画考点；"经典题型"部分针对主要内容、重点和考点，选择适量的例题进行解析；"习题全解"部分对《概率论与数理论计》一书每章后的所有习题作了较为详细的解答；"学习效果测试题及解答"部分检验学习效果，使学生熟悉标准化考核模式。

本书叙述通俗易懂，概念清晰，实用性强，可作为高等院校"概率论与数理统计"课程的辅导教材或教学参考书，也可作为高等院校教师、报考硕士研究生的考生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《概率论与数理统计》学习辅导/张卓奎，陈慧婵编著．—西安：西安电子科技大学出版社，2015.11
高等学校数学教材系列丛书
ISBN 978-7-5606-3837-9

Ⅰ．① 概…　Ⅱ．① 张…　② 陈…　Ⅲ．① 概率论—高等学校—教材　② 数理统计—高等学校—教材
Ⅳ．① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 247425 号

策划编辑　李惠萍
责任编辑　马武装　王静
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2015 年 11 月第 1 版　2015 年 11 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张　29
字　　数　697 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　48.00 元
ISBN 978-7-5606-3837-9/O
XDUP　4129001-1

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象的一门学科，它已被广泛地应用到工农业生产、科学技术、经济及教育研究等领域，并且在这些领域显示出十分重要的作用。目前，“概率论与数理统计”已经成为高等院校很多专业一门重要的理论基础课，学习与学好该门课程是很多专业最基本的要求。

在学习“概率论与数理统计”课程中，读者普遍感到概念比较抽象，问题难以入手，思维难以展开，学习起来有一定的困难。本书的编写目的是：帮助读者透彻理解概率论与数理统计的基本概念，掌握概率论与数理统计的基本理论与基本方法；帮助读者克服困难，尽快掌握“概率论与数理统计”课程的精髓，练习和巩固所学知识；帮助读者正确理解大纲内容和大纲要求，理解概率论与数理统计的难点与重点，熟悉概率论与数理统计考核题型和命题规律，掌握学习和复习概率论与数理统计的方法及技巧。本书是《概率论与数理统计》一书的配套教材，同时也是该书的扩展。

全书共分 8 章。第 1 章为概率论的基本概念；第 2 章为随机变量及其分布；第 3 章为多维随机变量及其分布；第 4 章为随机变量的数字特征；第 5 章为大数定律及中心极限定理；第 6 章为数理统计的基本概念；第 7 章为参数估计；第 8 章为假设检验。

本书每章由大纲内容与大纲要求、内容解析、重点与考点、经典题型、习题全解、学习效果测试题及解答六部分组成。“大纲内容与大纲要求”部分对每章的内容和要求作了明确的描述；“内容解析”部分对每章的基本内容按照知识结构分为定义、性质和结论几个层面，结合读者应掌握的重点作了比较详细的概括和总结；为了使读者能够抓住重点，学会学好，应对考核，“重点与考点”部分在“内容解析”的基础上进行浓缩，对每章的重点和考点作了概括性的刻画；为了使每章的例题不与教材中例题及习题重复，“经典题型”部分特选编了适量的经典例题，分类解析，用例题的形式体现对每章的基本要求，通过经典题型解析，以题说法，开拓思路，开阔视野，帮助读者理解基本概念，提高分析问题和解决问题的能力；针对读者(特别是初学者)在学习“概率论与数理统计”课程时往往感到内容看明白了，但习题不会做的现象，“习题全解”部分对《概率论与数理统计》一书每章后的所有习题作了较为详细的解答，同时“习题全解”也是“经典题型”的有益补充，相得益彰；“学习效果测试题及解答”部分按照标准化考核模式，每章给出了一套测试题，包括选择题、填空题和解答题三种题型，通过测试帮助读者熟悉考核模式，同时结合测试题解答可以让读者检查自己对每章基本知识、基本理论和基本方法等大纲要求内容的掌握程度，以便查漏补缺。

在本书的编写过程中，得到了西安电子科技大学数学与统计学院、网络学院等院系以及中国科学院西安光学精密机械研究所研究生部的大力支持，还得到了西安电子科技大学教材基金和西安电子科技大学数学与统计学院本科教学质量提升计划基金的资助，许多同事给予了鼓励和帮助，西安电子科技大学出版社的领导也非常关心本书的出版，李惠萍编辑对本书的出版付出了辛勤的劳动，作者在此一并致以诚挚的谢意！

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏，恳请读者批评、指正。

作　者

2015 年 8 月

目　　录

第 1 章　概率论的基本概念

1.1　大纲内容与大纲要求

1. 大纲内容

（1）随机试验、随机事件与样本空间。

（2）事件的运算、关系和运算律。

（3）概率的概念及其性质。

（4）古典概率。

（5）几何概率。

（6）条件概率。

（7）完备事件组和概率的三大公式。

（8）事件的独立性。

2. 大纲要求

（1）理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的运算、关系及运算律。

（2）理解随机事件概率的概念，了解概率的统计意义。

（3）理解概率的公理化定义。

（4）理解古典概型、古典概率的定义，会计算简单的古典概率。

（5）理解几何概率的定义，会计算几何概率。

（6）掌握概率的性质，会利用概率的性质计算随机事件的概率。

（7）理解条件概率的定义，掌握概率的三大公式。

（8）理解事件的独立性概念，会利用事件的独立性计算有关概率。

1.2　内容解析

1. 随机现象与随机试验

（1）随机现象：如果发生的现象在一定的条件下出现的结果是不确定的，既可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，则这类现象为随机现象。

（2）随机试验：将具有以下三个特点的试验称为随机试验：

(i) 可以在相同的条件下重复进行；

(ii) 每次试验的可能结果不止一个，并且可以事先明确试验的所有可能结果；

(iii) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

2. 样本空间与随机事件

1) 样本空间

称随机试验所有可能结果的集合为随机试验的样本空间，记为 Ω。称随机试验中一个可能结果为一个样本点，记为 ω，从而样本空间就是样本点的集合，即 $\Omega=\{\omega\}$。

2) 随机事件

称随机试验的样本空间 Ω 的子集为随机试验的随机事件，简称事件。

3) 基本事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

4) 必然事件

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是自身的子集，在每次试验中总是发生的，称其为必然事件。

5) 不可能事件

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称其为不可能事件。

6) 事件的运算与事件间的关系

(1) 事件的运算：

(i) 和运算(和事件)：称事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$。

称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生的事件为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

类似地，有

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(ii) 积运算(积事件)：称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB。

称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

类似地，有

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = A_1A_2\cdots A_n\cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

(iii) 差运算(差事件)：称事件 A 发生而事件 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$。

(2) 事件间的关系：

(i) 包含关系(子事件)：设 A 与 B 是事件，如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A \subset B$。

(ii) 相等关系：设 A 与 B 是事件，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

(iii) 互不相容(互斥)关系：设 A 与 B 是事件，如果事件 A 与事件 B 同时发生是不可能的，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的(或互斥的)。

(iv) 对立关系：设 A 与 B 是事件，如果 $A \cup B = \Omega$，$AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是相互对立的，称事件 B 是事件 A 的逆事件或对立事件，记为 $\overline{A}$。

(v) 结论：设 A 与 B 是事件，则 $A-B = A\overline{B} = A-AB$。

(3) 运算律：

(i) 吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B=B$，$AB=A$。

(ii) 交换律：$A \cup B=B \cup A$，$AB=BA$。

(iii) 结合律：$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$，$A(BC)=(AB)C$。

(iv) 分配律：$A(B \cup C)=AB \cup AC$，$A \cup (BC)=(A \cup B)(A \cup C)$。

(v) 对偶律：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$，$\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$，$\overline{\overline{A}}=A$。

3. 概率及其性质

1) 频率

(1) 频率的定义：在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

(2) 频率具有如下性质：

(i) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(ii) $f_n(\Omega) = 1$；

(iii) 若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n)$$

2) 概率

(1) 概率的公理化定义：设 Ω 是随机试验的样本空间，若对于随机试验的每一个随机事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(i) 非负性：设 A 是事件，则 $P(A) \geqslant 0$；

(ii) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(iii) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j; i, j=1, 2, \cdots)$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

(2) 概率的性质：

(i) $P(\varnothing)=0$。

(ii) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j; i, j=1, 2, \cdots, n)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(iii) 设 A、B 是事件且 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

从而有 $P(A)\leqslant P(B)$。

(iv) 设 A 是事件，则 $P(A)\leqslant 1$。

(v) 设 A 是事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

(vi) 设 A、B 是事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(vii) 设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$ 是事件，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$ 是事件，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

(viii) 结论：不可能事件的概率为 0，但概率为 0 的事件未必是不可能事件；必然事件的概率为 1，但概率为 1 的事件未必是必然事件。

4. 古典概率

(1) 古典概型：设随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个基本事件 $\{\omega_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 发生的可能性相同，则称这种随机试验为古典概型，或称为等可能概型。

(2) 古典概率计算公式：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{有利于事件 }A\text{ 发生的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件的总数}}$$

5. 几何概率

(1) 直线线段上的几何概率：设线段 l 是线段 L 的一部分，向线段 L 上任意投点，若投中线段 l 上的点的数目与该线段的长度成正比，而与该线段 l 在线段 L 上的相对位置无关，则点投中线段 l 的概率 p 为

$$p = \frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}$$

(2) 平面区域上的几何概率：设平面区域 g 是平面区域 G 的一部分，向平面区域 G 上任意投点，若投中平面区域 g 上的点的数目与该平面区域的面积成正比，而与该平面区域 g 在平面区域 G 上的相对位置无关，则点投中平面区域 g 的概率 p 为

$$p = \frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

(3) 空间区域上的几何概率：设空间区域 v 是空间区域 V 的一部分，向空间区域 V 上任意投点，若投中空间区域 v 上的点的数目与该空间区域的体积成正比，而与该空间区域 v 在空间区域 V 上的相对位置无关，则点投中空间区域 v 的概率 p 为

$$p = \frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}$$

6. 条件概率与概率的三大公式

1) 条件概率

设 A、B 是事件，$P(A) > 0$，称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

2) 古典条件概率计算公式

古典条件概率的计算公式为

$$P(B|A) = \frac{B\text{ 的含在 }A\text{ 中的基本事件数}}{A\text{ 中的基本事件数}}$$

需要指出的是，条件概率 $P(\cdot\,|A)$ 符合概率公理化定义中的三个条件，即

(1) 非负性：$P(B|A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega|A) = 1$；

(3) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \,|\, A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|A)$$

既然条件概率符合上述三个条件，那么对概率所证明的一切结果都适用于条件概率。

3) 概率的三大公式

(1) 乘法公式：设 A、B 是事件，且 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 是事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(2) 全概率公式。

(i) 划分：设 Ω 为随机试验的样本空间，如果事件 B_1，B_2，…，B_n 满足：B_1，B_2，…，B_n 两两互不相容，即 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，且 $P(B_i)>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则称事件 B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 Ω 的一个划分。

(ii) 全概率公式：设 Ω 为随机试验的样本空间，A 为随机事件，B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 Ω 的一个划分，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

(3) Bayes(贝叶斯)公式：设 Ω 为随机试验的样本空间，A 为随机事件，B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

7. 事件的独立性

(1) 两事件的相互独立：设 A、B 是随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A、B 相互独立。

(2) n 个事件的两两独立：设 A_1，A_2，…，A_n 是随机事件，如果

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\quad i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则称事件 A_1，A_2，…，A_n 两两独立。

(3) n 个事件的相互独立：设 A_1，A_2，…，A_n 是随机事件，如果 $\forall\ 2\leqslant k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),\quad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$$

则称事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立。

(4) 结论：

(i) 设 A、B 是事件，且 $P(A)>0$，则 A、B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$；

(ii) 设 A、B 是事件，且 $P(B)>0$，则 A、B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$；

(iii) 设 A、B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

(iv) 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A、B 相互独立与 A、B 互不相容不能同时成立；

(v) 设 A、B 是事件，且 $0<P(A)<1$，则 A、B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ (或 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$)；

(vi) 设 A、B、C 相互独立，则 A 与 BC、A 与 $B\cup C$、A 与 $B-C$ 也相互独立；

(vii) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也相互独立；

(viii) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成它们各自的对立事件，所得到的 n 个事件也相互独立；

(viiii) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意分成 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个没有相同事件的不同的小组，并对每个小组中的事件施行和、积、差和逆运算后，所得到的 k 个事件也相互独立。

1.3 重点与考点

1. 事件的运算、关系和运算律

(1) 利用事件的运算、关系和运算律计算和讨论事件的概率。

(2) 利用事件的运算、关系和运算律分析事件或表示事件。

2. 概率的定义与概率的性质

(1) 概率的公理化定义。

(2) 概率的性质及应用。

3. 古典概率

(1) 古典概型的理解。

(2) 古典概率的计算与应用。

4. 几何概率

(1) 几何概率问题的理解与转化。

(2) 几何概率的计算与应用。

5. 概率的基本公式

(1) 利用基本公式(加法公式、减法公式、条件概率公式和三大公式)计算概率。

(2) 加法公式和减法公式的应用与变式。

(3) 三大公式的使用前提、步骤与应用。

6. 两个事件的相互独立

(1) 两事件相互独立的定义。

(2) 两事件相互独立的结论。

(3) 两事件相互独立的判断及应用。

7. $n(n\geqslant 2)$个事件两两独立与相互独立

(1) $n(n\geqslant 2)$个事件两两独立与相互独立的定义。

(2) $n(n\geqslant 2)$个事件两两独立与相互独立的区别和联系。

(3) $n(n\geqslant 2)$个事件相互独立的结论。

(4) $n(n\geqslant 2)$个事件相互独立的判断及应用。

1.4 经典题型

1. 讨论事件的运算、关系与事件的概率之间的联系

例 1-1 设 A、B 是随机事件，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，$P(B-A)=0.2$，则 A 与 B(　　)。

A. 互不相容　　B. 相互独立　　C. 相互对立　　D. 不相互独立

解 应选 B。

由于

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.5-P(AB)=0.2$$

因此 $P(AB)=0.3$。由

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.3$$

得

$$P(A)=P(AB)+0.3=0.3+0.3=0.6$$

从而

$$P(AB)=0.3=0.6\times 0.5=P(A)P(B)$$

即 A 与 B 相互独立，故选 B。

如果改变条件和问法，那么该例就会有下面两道变式问题。像这样的变式在很多例子中都存在，以后不再赘述。

例 1-2 设事件 A、B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$(　　)。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

解 应选 B。

由于

$$\begin{aligned}P(A-B)&=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3\end{aligned}$$

因此 $P(A)=0.6$，从而

$$\begin{aligned}P(B-A)&=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)\\&=0.5-0.6\times 0.5=0.2\end{aligned}$$

故选 B。

例 1-3 设 A、B 是随机事件，且 $P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.5$，则(　　)。

A. A 与 B 互不相容　　B. AB 是不可能事件

C. AB 未必是不可能事件　　　　D. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解　应选 C。

由于

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-P(AB)=0.5$$

因此 $P(AB)=0$，从而 AB 未必是不可能事件。

事实上，随机地向以 0、1 为端点的线段上投点，设 A 表示事件"点投中以 0、$\frac{1}{2}$ 为端点的线段"，B 表示事件"点投中以 $\frac{1}{2}$、1 为端点的线段"，则 AB 表示事件"点投中 $\frac{1}{2}$ 点"，由几何概率知，$P(AB)=0$，但 $AB\neq\varnothing$，故选 C。

例 1-4　设 A、B 是两个概率不为 0 的互不相容的随机事件，则(　　)。

A. $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互不相容　　　　B. $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不是互不相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　　　D. $P(A-B)=P(A)$

解　应选 D。

由于 A 与 B 互不相容，因此 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$，所以

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)$$

故选 D。

例 1-5　设 A、B 是任意两个随机事件，则下面命题正确的是(　　)。

A. 若 A 与 B 不是互不相容，则 A、B 一定相互独立

B. 若 A 与 B 不是互不相容，则 A、B 有可能相互独立

C. 若 A 与 B 互不相容，则 A、B 一定相互独立

D. 若 A 与 B 互不相容，则 A、B 一定不相互独立

解　应选 B。

若 A 与 B 互不相容，则 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，如果 A 与 B 相互独立，有 $P(AB)=P(A)P(B)=0$，那么 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$，由于 A、B 是任意两个随机事件，因此选项 C、D 不正确。由于 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此只有选项 B 是正确的，故选 B。

例 1-6　设 A、B 是任意两个随机事件，则(　　)。

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　　　B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　　　D. $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解　应选 C。

方法一：由于 $AB\subset A$，$AB\subset B$，因此 $P(AB)\leqslant P(A)$，$P(AB)\leqslant P(B)$，从而

$$2P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$$

即

$$P(AB) \leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

故选 C。

方法二：由于 $AB \subset A \cup B$，因此 $P(AB) \leqslant P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$，从而

$$2P(AB) \leqslant P(A)+P(B)$$

即

$$P(AB) \leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

故选 C。

例 1-7　设 A、B、C 是随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(C)=0.5$，$A \subset B$，A 与 C 相互独立，则 $P(A-C \mid AB \cup C)=$ ________。

解　应填 $\frac{2}{7}$。

由于 $A \subset B$，A 与 C 相互独立，因此

$$AB = A,\quad P(AC)=P(A)P(C)=0.4 \times 0.5 = 0.2$$

$$\begin{aligned} P(A-C \mid AB \cup C) &= \frac{P((A-C)(AB \cup C))}{P(AB \cup C)} = \frac{P(A\bar{C}(A \cup C))}{P(A \cup C)} \\ &= \frac{P(A\bar{C}A \cup A\bar{C}C)}{P(A \cup C)} = \frac{P(A-C)}{P(A)+P(C)-P(AC)} \\ &= \frac{P(A)-P(AC)}{P(A)+P(C)-P(AC)} = \frac{0.4-0.2}{0.4+0.5-0.2} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

故填 $\frac{2}{7}$。

例 1-8　已知事件 A、B 相互独立且互不相容，则 $\min\{P(A), P(B)\}=$ ________。

解　应填 0。

因为在题设条件下，$P(A)$、$P(B)$ 中至少有一个为零，否则 $P(A)>0$、$P(B)>0$，此时事件 A、B 相互独立与 A、B 互不相容不能同时成立，所以 $\min\{P(A), P(B)\}=0$，故填 0。

例 1-9　设 A、B 是随机事件，$P(A)=0.4$，$P(AB)=0.2$，$P(A \mid B)+P(\bar{A} \mid \bar{B})=1$，则 $P(A \cup B)=$ ________。

解　应填 0.7。

由于 $P(A \mid B)+P(\bar{A} \mid \bar{B})=1$，因此 A、B 相互独立，从而由 $P(A)=0.4$，$0.2=P(AB)=P(A)P(B)=0.4P(B)$，得 $P(B)=0.5$，所以

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5-0.2=0.7$$

故填 0.7。

例 1-10　设 A、B 是随机事件，已知 $B \subset A$，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则下